现代偏微分方程引论

齐民友 徐超江 王维克 编著

本书介绍现代偏微分方程理论的一个重要组成部分——微局部分析自20世纪80年代末以来的两个活跃领域：非线性微局部分析以及非齐性拟微分算子和相应次椭圆理论。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY
▸ 全 国 优 秀 出 版 社 ▸ 武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

现代偏微分方程引论

齐民友 徐超江 王维克
编著

武汉大学出版社

内 容 简 介

微局部分析自20世纪60年代中创立以来在推动偏微分方程理论的发展上已有长足的进步。迄至70年代末已成定型，人称“70年代算法”。其后更向精密化发展；同时由线性领域向非线性领域发展。这显然是90年代大有希望的研究方向。本书的目的是就两个专门问题：非线性奇性分析以及次椭圆问题介绍这些发展，其中不少内容是作者本人的研究成果。本书的结构大体上是：第2,3,4章主题是非线性微局部分析，包括J.-M. Bony所创立的仿微分算子理论以及非线性奇性分析。后三章包括了非齐性Sobolev空间上的拟微分算子理论和它在次椭圆问题上的应用，以及高次微局部的理论等。以上两部分都是当前正在活跃发展的研究领域。为了使读者能明了这些进展的由来并方便读者阅读，在第1章中系统而又概括地介绍了经典的微局部分析。

图书在版编目(CIP)数据

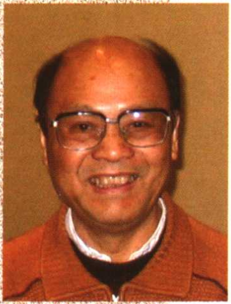
现代偏微分方程引论/齐民友，徐超江，王维克编著. —2版. —武汉：武汉大学出版社，2005.4
(武汉大学学术丛书)
ISBN 7-307-04555-9

Ⅰ.现…　Ⅱ.①齐…　②徐…　③王…　Ⅲ.偏微分方程
Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第030449号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：880×1230　1/32　印张：11.125　字数：305千字　插页：3
版次：2005年4月第1版　　2005年4月第1次印刷
ISBN 7-307-04555-9/O·325　　定价：23.00元



齐民友

1930年出生，1952年毕业于武汉大学数学系，并从事偏微分方程理论的研究。现任武汉大学数学研究所教授、博士导师，国务院学位委员会数学组成员。他的工作《Fuchs型和奇性偏微分方程的研究》获得1987年国家自然科学四等奖。

徐超江

1956年出生，1982年毕业于武汉大学数学系，1986年获法国南巴黎大学理学博士学位，1990年获法国“科学研究指导者”文凭。现任武汉大学数学研究所所长、教授、博士导师。他主持的工作《线性与非线性微局部分析》获得1991年国家教委科技进步二等奖。

王维克

1954年出生，1982年毕业于武汉大学数学系，1989年获武汉大学理学博士学位。现任武汉大学数学研究所教授。他参加的工作《线性与非线性微局部分析》获得1991年国家教委科技进步二等奖。

引　言

1822 年 Fourier 发表了他的名著"热的解析理论". 自此，我们有了 Fourier 级数、Fourier 积分，总之有了调和分析. 在数学中几百年来一直充满着活力向前发展而且对数学以及其他科学产生了越来越大的影响. 这样的数学分支不多，调和分析毫无疑问是一个例子（也许另一个例子是 Lie 群）. Fourier 的著作的意义也远远超出了数学本身. 下面只从与本书有关的角度来谈谈这个问题.

Fourier 在他的书里研究了有限长杆上的热传导方程的混合边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t,0)=u(t,l)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x), \end{cases}$$

并用我们今天熟知的分离变量法将它的解写成了

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \mathrm{e}^{-(n\pi a/l)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

这样他回答了 18 世纪围绕弦振动方程产生的一场争论：当时即已知道，弦振动方程的通解是 $\varphi(x-ct)$，φ 是任意函数，于是，什么叫"任意函数"？例如用两个式子在不同区间上定义的函数，如

$$\varphi(x)=\begin{cases} cx, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant x_0<l, \\ cx_0+A(x-x_0), & \text{当 } A=cx_0(x_0-l)^{-1},\ x_0\leqslant x\leqslant l \end{cases}$$

算不算一个函数？而 Fourier 的级数解告诉我们，刻画温度分布的函数，不论其形状如何，都同时可以用一个级数——或者说用其系数所成的序列 $\{a_n\}$ 来表示. 如果视 n 为自变量，并记为 ξ，则 $\{a_n\}$ 也

可视为 ξ 的函数，但 ξ 限于取整数值．我们不妨记为 $\hat{\varphi}(\xi)$，说明它与 $\varphi(x)$ 有关．如果同一个物理过程可以用两个不同的式子或 $\varphi(x)$ 或 $\hat{\varphi}(\xi)$ 来表示，则关于什么是一个函数的争论也就退居后位了．

Fourier 这本书的最后一部分讨论半无限长杆上的温度分布，得到了 Fourier 积分，用我们今天的记号来写，即是

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \tag{1}$$

而

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx. \tag{2}$$

现在我们将此式，即由 $\varphi(x)$ 到 $\hat{\varphi}(\xi)$ 的变换称为 Fourier 变换，而将前式称为逆变换．这样有了一种对偶：$\varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$.

多年来，Fourier 级数与 Fourier 积分成了分析数学的核心之一，特别是现在称之为“硬分析”的那一部分．由它所带来的数学上的贡献有：Riemann 积分、Lebesgue 积分，特别是集合论．从微分运算角度来看，由(1)有

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = (2\pi)^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}(\xi\hat{\varphi}(\xi))d\xi.$$

即是说微分与乘法对偶．可见，对偶的概念比一般的对应乃至同构还要丰富，广义函数理论的基石也是对偶．但这是我们今天的理解．在当时，人们还只能知道“求导”也可以“看”成一种乘法．其实这是一个历史久远的思想．L. Euler 在研究常系数线性常微分方程时，就把它写作

$$\sum_{k=0}^{m}(a_k D^k)y = f(x), \tag{3}$$

而

$$y = f(x)\Big/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k. \tag{4}$$

他可以对多项式 $\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$ 作因式分解，可以把 $1\Big/\sum_{k=0}^{m} a_k D^k$ 化为分项分式……这一切我们在大学二年级课程中都已熟知，并称之为“形式解法”，因为当时人们的理解确实是形式的．

20 世纪 20～30 年代量子物理学的出现不但是科学史上而且是人类思想史上的大革命. 对于它的影响作全面的估计不是本书的任务，但是它的出现同时也开辟了数学上的新时期是毫无疑问的. 至少，说全部经典的泛函分析都是由量子物理催生的，这不是过分之词. 从本书的角度来看，对偶的思想又有了十分实质的发展. 量子物理要求将经典的物理量量子化，即用算子(自伴的)来表示. 例如 D_{x_j} 表示 x_j 方向的动量，这样，同一个物理状态可以用两种不同的方式来表示(称为表象)：用 x 表示(坐标表象，x 表象)或用 ξ 表示(动量表象，ξ 表象). 对偶的表象之互相转化可以用 Fourier 变换来实现. 所以，调和分析特别是 Fourier 变换成了量子物理的有效的数学工具. 但在量子物理中，互相对偶的量不能同时准确地测量. 如果 x 与 ξ 的测量分别有误差 $\Delta x, \Delta\xi$，则

$$\Delta x\,\Delta\xi \geqslant h/2\pi,\quad h \text{ 是 Planck 常数},$$

这就叫“测不准原理”. 测不准关系与算子的不可交换性紧密相关. 所以我们还需要将不可交换性引入调和分析.

以上所述可以说是微局部分析产生的数学和物理背景. 但它作为一种系统的理论出现应该说是 20 世纪 60 年代中期的事，即以拟微分算子的出现为标志. 拟微分算子的直接前身是 Zygmund, Calderon 所建立的奇异积分算子理论. 奇异积分算子理论是调和分析的重大发展，它一出现，就对解决偏微分方程的重大问题——Cauchy 问题的唯一性做出了重大贡献. 拟微分算子的出现又在椭圆算子的指标问题(Atiyah-Singer 指标定理)的研究上起了重大作用. 它归根结蒂是调和分析的新发展，而且确实考虑了不可交换性. 微分方程的 Euler 形式解法的根本局限如下：即方程的系数 a_k 是常数，所以 a_k 与 D^k 可以交换：$a_k D^k = D^k a_k$. 但若 $a_k = a_k(x)$，则上式不成立. 用现代的语言说即 $a_k(x)$与 D^k 的交换子“乘积”不为 0,

$$[a_k(x), D^k] \neq 0, \tag{5}$$

这时形式解法就无能为力了. 所以，Fourier 变换可以用于讨论常系数偏微分方程，而对变系数方程 $\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f$ 就需要用拟

微分算子了. 拟微分算子形状上就是推广的 Fourier 变换:

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\xi x}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \tag{6}$$

$a(x,\xi)$称为其象征. 例如对上述偏微分方程就有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{7}$$

因此要建立算子作为一方、象征作为另一方的对应关系. 适应量子物理的需要, 算子的乘积应为不可交换的, 与此相应, 对象征需要建立一种不可交换的"乘法". 又, 在求解(3)时, 我们将微分算子的逆形式写为 $1\Big/\sum_{k=0}^{m}a_k D^k$, 现在要求 A 之"逆", 则应考虑以 $[a(x,\xi)]^{-1}$为象征的拟微分算子. 所有这些问题在拟微分算子理论中都得到了圆满的解决. 所以, 微局部分析, 特别是拟微分算子理论, 不妨说是量子物理时代的调和分析.

微局部分析理论的出现告诉我们, 过去我们是在 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 Ω 上讨论偏微分方程, 现在应该把 x 与 ξ 放在完全平等的地位, 而在 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$上讨论它. $\mathbf{R}^n\backslash 0$ 是 ξ 的变化域. $\xi=0$ 总是应该排除的, 这与 $\Omega\times(\mathbf{R}^n\backslash 0)$的几何构造大有关系. 用现代语言来说, 即 Ω 的余切丛除去零截面: $T^*\Omega\backslash 0$. 因此, 可以说, 微局部分析就是在 $T^*\Omega\backslash 0$ 上讨论偏微分算子, 首先是它的代数演算.

在余切丛上讨论物理问题, 在物理上很早就有先例. 其一是光的波动学说中的 Huygens 原理. 这个原理简单地说, 即光的传播有波前面, 波前面的前方是光波影响未到之处, 其后方则在光波的影响区域之内. 波前的各点又成了新的光源, 再产生次级波前. 次级波前的包络面即下一个时刻的新波前. 在这样的几何分析中, 波前的法线(在现代数学的语言中应该说是余法线), 起了很关键的作用. 如果从某一点起沿波前面的法线追踪, 即得到"射线". 波前面的位置与波前面传播的方向是同样重要的. 在这个意义上来说, Huygens 原理是一个微局部的原理: 既要考虑波前面上各点的坐标 x, 又要考虑该点处波前面的余法线向量 ξ. 另一个例子是渐近解的问题. 自从量子物理出现以来, 即产生量子力学与经典力学的关系

问题．物理学家很明白，若视 Planck 常数为一个小参数 ε，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，量子力学就转化为经典力学．因此，将一个偏微分方程的解按小参数展开——即所谓渐进展开，就成了数学物理中一个重要的方法．物理学家则称之为 WKB 方法，或几何光学近似、准经典近似等．但是这种渐近展开时常只是局部有效．由局部性过渡到整体性有一种障碍，在光学中时常称为焦散现象．20 世纪 60 年代，前苏联数学家 V. P. Maslov 指出，这种障碍的出现是因为人们常局限于 x 表象．如果平等地采用 x 表象与 ξ 表象，或者用混合表象(一部分变元仍为 x，另一部分为 ξ)，则问题自然解决．其后的 Fourier 积分算子理论，也可以说是这个思想的展开．这种思想发展至今已成了一个重要的数学分支——半经典(或准经典)分析．

这些在物理上非常明确的思想在数学上一直到 20 世纪 60～70 年代才形成完整的数学理论，这与数学工具的发展有密切的关系．上面说过拟微分算子的直接前身是 A. Zygmund 和他的学生 A. P. Calderon 所领导的学派，在 50 年代关于奇异积分算子的研究．关于准经典近似的工作则必须回到关于解析力学的近代表述，特别是辛几何理论以及相关的拓扑学的研究．还应该指出，日本数学家佐藤干夫关于超函数理论的研究，以及他所创立的学派所建立的代数分析学，是在实解析函数框架下的微局部分析，它广泛地应用了代数学的最新的发展．正因为微局部分析继承和发展了这样多数学分支的成果，所以有时给人以望而生畏的感觉．

总之，微局部分析不只是偏微分方程的一个分支，而是它发展至今的一种观点、一种思想、一种方法．有许多最新的研究工作，尽管没有说自己就是微局部分析，但实际上都恰好表现了这种观点、思想和方法．它的出现至少使整个线性偏微分方程理论改变了面貌．这方面最完整的概括是 L. Hörmander 的四卷本巨著[Hö2]．

在作者之一写的书[Qi]的序言中曾说过："这个领域还在迅速发展，看不出有停下来或者放慢步伐的迹象，例如，正当我们用了很大力量来掌握微局部分析时，它却已被人称为'70 年代算法'，而到了 20 世纪 80 年代中期的现在，它又发展到新的水平．"现在可以

说，微局部分析已经成熟了. 如果说在 70 年代，还需要建立框架，现在则是需要解决新的具体问题. 这样，一方面我们会感到它比较容易掌握了. 另一方面则新问题层出不穷. 从目前看，越来越多地与应用数学和其他科学，如物理和力学结合，是一个明显的趋势. 我们建议，读者若有可能翻阅一下 1990 年在日本京都召开的国际数学家大会的文集，特别注意 R. Melrose [Mel3], M. Taylor [Ta3], A. Majda [Ma], P.-L. Lions [Li], L. Tartar [Tar]等人的报告，若能浏览一下法国 Ecole Polytechnique 的讨论班每年一册的文集和每年一度的 Saint Jean de Mont 会议的论文集，就会对当代偏微分方程理论的这种观点、思想和方法发展的现况有深刻的印象了.

正因为微局部分析还在迅速发展之中，这本书不可能涉及很多方面，而只挑选了两个问题. 首先是非线性微局部分析. 非线性偏微分方程解具有线性方程所没有的奇性，这一点首先是 G. F. B. Riemann 指出的. 他在 1860 年研究有限振幅的声波的传播时，第一次提出了"激波"这一名词. 激波是一种强奇性，但甚至在弱奇性范围内，无论是从几何角度或从分析角度来看，非线性问题都表现出更为丰富的内容. 近年来的事实表明，微局部分析用于非线性偏微分方程是卓有成效的. 首先需要提出研究的框架，这就是 Sobolev 空间，而所谓奇性即是指解 u 是属于某个 Sobolev 空间 $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$的广义函数，而 s 比较小. 但是 Sobolev 空间之元均为 $\mathscr{S}'$广义函数，它的奇性可以通过 Fourier 变换表现出来，即x 域中的非光滑性的点(不妨称为"坏"点，其集合即奇支集sing supp u)，可以用 ξ 域中 $\hat{u}(\xi)$的增长性(即缺少急减性质)来刻画，而急减性质的破坏发生在某些我们称之为"坏"方向的方向上. 把"坏"点与"坏"方向结合起来，就得到很重要的波前集的概念. 把这种作法与 Huygens 原理作一个比较是很有趣的. 在讨论非线性偏微分方程解的奇性时，还不能只停留在波前集的一般概念上，而要着重研究这样一类解，它们是某个 Sobolev 空间的元素 u，而且有一个确定的子流形，使 u 在该流形的切向上相对地比较光滑，奇异性则发生在其余法线方向

上．这种广义函数称为余法分布，其奇性相应地称为余法奇性，这个概念的物理背景是显而易见的．

为了处理这类问题，拟微分算子理论需要进一步发展．一个途径是研究只有有限光滑性(而不是 C^∞)的象征．另一个则是 J.-M. Bony 提出的仿微分算子理论．产生困难的根源仍在广义函数的奇性．以最简单的非线性运算乘法为例，两个广义函数u_1,u_2一般不能相乘，就是因为各个因子的奇性导致的，因此只要对其波前集作一定的限制，就可以合理地定义其乘积．但现在我们可以更有系统地处理非线性运算．我们可以在 ξ 域中将 u_1 与 u_2 之奇性分离出来，并对其较"好"的成分来进行运算．这种将 ξ 域中的奇性分离出来的方法早在 20 世纪 30 年代 Littlewood 与 Paley 的工作中即已提供了．利用这个工具，J.-M. Bony 和他的学生们建立了仿乘积、仿复合，以及一般的仿微分算子理论．同时还适应边值问题研究的需要，建立了对某一子流形的切向的仿微分算子理论．

与线性方程情况不同，非线性奇性在相互作用下会产生新的奇性．举例来说，讨论一个双曲型方程的两解 u_1 与 u_2，它们在(x_1,ξ_1)与(x_2,ξ_2)附近微局部地属于 H^{σ_1} 与 H^{σ_2}，这些奇性将沿过(x_j,ξ_j)，$j=1,2$ 的次特征传播，而可能在(x_0,ξ)相遇．在相遇后这两个奇性很可能并不相消，而在该点附近成为微局部的 σ 阶奇性，而

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2-\frac{n}{2}.$$

若(x_0,ξ)恰好又是特征点，则这个 H^σ 奇性将沿着过(x_0,ξ)的次特征传播，这样解就出现了新的奇性．这个领域中至今仍存在大量未解决的问题．

从微局部分析观点来论述非线性问题的，可以参看 L. Hörmander [Hö6]．这是他在 1986～1987 年在 Lund 大学的一个讲义，对非线性双曲型方程近年来许多重要工作做出了新的概括．还可以看 M. Taylor [Ta2]，这本书论述的范围则超过了 Hörmander 的讲义．关于 Bony 学派的工作，可以参看他自己的总结[Bon5]．这几本书和文章都有丰富的文献目录．

第二个问题是关于椭圆性问题. 在整个偏微分方程理论中，椭圆型方程(线性和非线性的)理论是发展得最好的. 自20世纪50年代末，开始了退化椭圆方程的研究. 这是由于不论在物理、力学或其他数学分支(复分析和微分几何)中都出现了重要的退化椭圆算子. 其中一个重要的例子是Hörmander的平方和算子

$$A = \sum_{j=1}^{m} X_j^2(x) + X_0(x) + C(x), \tag{8}$$

这里 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 是 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的实的 C^∞ 向量场. 这类算子不但包含了椭圆算子，还包括抛物型算子. L. Hörmander 的经典性的结果表明：当 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 满足所谓 Hörmander 条件时，A 是亚椭圆算子. 其中就有不少退化的椭圆算子. 例如

$$X_j = \partial_{x_j},\ 1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad X_n = x_1 \partial_{x_n},$$

它们是满足 Hörmander 条件的. 但

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^2(x) = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2 + x_1^2 \partial_{x_n}^2$$

是一个具有很强退化性质的退化椭圆算子.

L. Hörmander 指出，这种算子是次椭圆(sub-elliptic)算子. 说 m 阶算子 L 是一个次椭圆算子，即对它有以下的所谓次椭圆估计成立：

$$\| u \|_{m-\varepsilon} \leqslant C_1 \| Lu \|_0 + C_2 \| u \|_0,$$
$$u \in C_0^\infty(\Omega),\ 0 < \varepsilon < 1, \tag{9}$$

即发生光滑性的损失. 如果 L 是椭圆算子，则(9)式对 $\varepsilon = 0$ 成立. (9)式这种估计(在不同空间中)是研究椭圆方程的基本工具，最早的是 Schauder 估计. 现在的问题是，若算子 L 适合(9)式而 $\varepsilon = 0$，L 是否一定是椭圆算子? 本书第6章回答了这个问题，答案是肯定的.

次椭圆算子是一个很重要的类别，可以说它是仅次于椭圆算子的一大类. 因此，自然想把它推广到非线性情况上. 如果 A 是拟线性的，即有

$$Au = \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x, u, Xu) X_i X_j u + B(x, u, Xu) = 0,$$

则我们可以用 Bony 的仿微分算子将它线性化. 如果经过仿线性化

后的方程适合 Hörmander 条件，则 A 仍然是亚椭圆算子.

退化椭圆算子的研究需要对拟微分算子作一个推广，就是应用另一种算子演算(后来 Hörmander 称之为 Weyl 演算). 定义拟微分算子形如

$$a^{w}(x,\mathrm{D})u = (2\pi)^{-n}\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\xi}a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi.$$

提出这种算子是为了量子力学的需要，因为它对 x 与 y 有明显的对称性，如果 $a(\cdot,\xi)$ 是实值函数，则 $a^{w}(x,\mathrm{D})$ 将是自伴算子，这当然使它在量子力学上特别方便，因为量子化的物理量都应该用自伴算子来表现. 它还有许多其他的优点，例如利用它来求逆，将可得到准确逆而非拟逆，等等.

J.-M. Bony 与 N. Lerner [B-L] 在非线性微局部分析中引入 Weyl 演算，是为了提出二次微局部化(以至高次微局部化)理论. 但是我们可以从另一个角度来看待它，即可发现它对退化椭圆算子乃至次椭圆性的研究是很有好处的. 为此，我们重新来看 Hörmander 的象征类 $S^{m}_{1,0}$，其中的元适合估计式

$$|\partial_x^{\beta}\partial_\xi^{\alpha}a(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},$$

$$\text{或} \leqslant C[(1+|\xi|^2)^{1/2}]^{m-|\alpha|}.$$

左方的向量场 $\{\partial_x,\partial_\xi\}$ 构成 $T(T^*\Omega)$ 的一个“典则”的基底，与它对偶的 $T^*\Omega$ 上的度量是

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}\xi_i^2).$$

这是 Euclid 度量. 如果我们改用另一个度量

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{d}x_i^2 + \frac{\mathrm{d}\xi_i^2}{1+|\xi|^2}\right),$$

则与它对偶的向量场是

$$\{\partial_x,\partial'_\xi\} = \{\partial_x,(1+|\xi|^2)^{1/2}\partial_\xi\}.$$

如果用这样的向量场，则 $S^{m}_{1,0}$ 的基本估计式成为

$$|\partial_x^{\beta}\partial_\xi'^{\alpha}a(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{m/2}.$$

同样，$S^{m}_{\rho,\delta}$ 类相应于度量

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}[(1+|\xi|^2)^{\delta}dx_i^2 + (1+|\xi|^2)^{-\rho}d\xi_i^2].$$

我们要注意，$|\xi|^2$ 是一个最典型的椭圆算子——Laplace 算子 $-\Delta$ 的象征. 从几何上看 Laplace 算子的特点是：对点 x 的均匀性以及各向同性，我们在本书中称为齐性(homogeneity)而与齐次函数的齐次相区别. 实际上，一致椭圆的二阶偏微分算子

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} + c(x)$$

即是系数充分规则，且存在两个正常数 $c>0$ 与 $C>0$ 使

$$c|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C|\xi|^2$$

成立的算子. 这个定义也是以 Laplace 算子的象征 $|\xi|$ 为标准的.

进一步我们看到 Sobolev 空间的定义也是以 Laplace 算子为基础的.

但是，退化的椭圆算子所对应的度量恰好是非齐性的(non-homogeneous). 所以，研究退化椭圆算子的一个途径就是找到一个适用的度量，并且应用 Weyl 演算，例如[Zh]中指出的(这里稍加改变)，对于

$$p(x,D) = D_{x_1}^2 + x_1^{2k}D_{x_2}^2,$$

相应的度量就是

$$\begin{aligned} ds^2 = & M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{2/k}dx_1^2 + dx_2^2 \\ & + M^{-1/k}(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-2\delta(1-1/k)}d\xi_1^2 + \langle\xi\rangle^{-2}d\xi_2^2, \end{aligned}$$

其中 $\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2$，$M(x,\xi) = \xi_1^2 + x_1^{2k}\xi_2^2 + \langle\xi\rangle^{2\delta}$，$\delta = (1+k)^{-1}$. 这样，次椭圆性的研究涉及一种新的几何. 其实，很早就有人看到了这一点，例如，A. Nagel, E. M. Stein 和 S. Wainger [N-S-W]. 我们不妨说将会有一种新的“次椭圆几何”，这当然都要等待今后的研究工作.

附带还要提到，R. Melrose [Mel1]曾从几何角度讨论过一般的边值问题，而与 Weyl 演算不同，后者需要的是余切丛上的度量.

至此，我们再回到引言开始时所说的“70 年代算法”问题，这是

C. Fefferman 在[Fe1]中说的. 这是一篇很重要的文章, 主旨是讨论如何在余切丛 $T^*\Omega\backslash 0$ 中局部化, 并用以将一个一般的拟微分算子对角化, 由此解决了许多重要问题. 若与 Littlewood-Paley 比较, 则 L-P 只是在 ξ 域中局部化. 同时在 x 域和 ξ 域中局部化是不可能的, 因为这与量子物理的根本原理"测不准原理"矛盾. [Fe1]的标题即"测不准原理", Weyl 演算中也提到测不准原理. 还应该提到现在引起人们极大关注的小波理论也是围绕着这个思想而来的, 也可以说是一种"微局部"理论. 这样说来, "70 年代算法" 应该是指微局部分析的初创时期形成的理论, 我们不妨称之为"经典的微局部分析", 后来的发展不妨称为"精密的微局部分析"(analyse microlocale precis). 本书的写法在第 1 章回顾了经典微局部分析, 第 2 章介绍了精密微局部分析在当前发展中比较系统的基础, 也就是本书所采用的 Bony 的仿微分算子理论. 然后依次介绍以上两个方面的工作, 这些工作是我们这个工作集体感到兴趣的. 本书内容的来源有的是讨论班上的报告, 有的是一些课程的讲义, 当然还有我们自己的研究工作. 因此, 应该向所有参加了讨论班的教师以及研究生们致谢, 在此就不一一列名了.

关于本书的读法, 我们作如下的建议: 如果读者已经熟悉经典的拟微分算子理论, 则第 1 章可以略去. 如果读者对非线性波有兴趣, 可以直接读第 2,3,4 章以及第 7 章. 如果对椭圆方程和退化椭圆问题有兴趣, 则可以只读第 2 章和第 5～7 章.

本书作者多年来得到国家自然科学基金的资助, 特别是天元基金的偏微分方程一般理论项目以及同样名称的数学重大项目的支持. 作者们还分别得到了自然科学基金青年基金、国家教委博士点基金及留学回国人员基金、霍英东教育基金的支持. 本书可以看做是天元项目部分工作的总结, 因此, 它不仅是作者三人的工作, 也是参与了这些研究的同志们的共同的成果.

齐 民 友

1993 年 9 月于武汉珞珈山

目　　录