

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

spark 星火书业

高等数学辅导 及习题精解

(与同济五版教材配套)

上册

同济大学 彭辉 主编

联系考研, 渗透精讲历年考研真题

- 知识表格 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

新华出版社

高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

高等数学辅导 及习题精解

(与同济大学第五版《高等数学》配套)

上册

主 编 彭 辉 徐 峰 张永凤

副主编 吕成军 谭成波 王金龙

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导及习题精解 / 彭辉等主编. —北京: 新华出版社, 2005. 8

ISBN 7-5011-7166-1

I. 高... II. 彭... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 082481 号

高等数学辅导及习题精解: 同济第五版

彭 辉 主编

*

新华出版社出版发行

(北京市石景山区京源路 8 号 邮编: 100043)

新华书店经销

德州文源印务有限公司印刷

*

880×1230 毫米 32 开本 27.00 印张 680 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5011-7166-1 定价: 29.60 元

前言

高等数学是理工科院校的一门重要的基础课程,也是硕士研究生入学考试的必考科目。同济大学主编的《高等数学》第五版(以下简称《教材》)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为高等数学这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者学好《教材》、学好高等数学,我们根据多年的教学经验编写了与此配套的《高等数学辅导与习题精解》。本书旨在帮助、指导广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与技巧,提高应试能力和数学思维水平。

本书共分十二章,每章又分若干节,章节的划分和标题与《教材》一致。在本书中每节包括三大部分内容:

一、知识要点与考点:用表格形式简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理,并提出理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题,特别指出了各类考试中经常考查的重要知识点;

二、经典例题解析:广泛查阅资料,精选出了具有代表性、典型性的例题进行分类解析。在解题过程中,有“思路探索”:帮助读者尽快找到解决问题的思路和方法;有“方法点击”:帮助读者找到解决问题的关键、技巧与规律;

三、习题精解:对《教材》里每节习题全部做了解答,部分有代表性的习题在解答时也给出了“思路探索”和“方法点击”:有的习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力,另外本书还用“警示语”的形式对解题要点、技巧和易错的地方做了简短警示。

为了对每章所学过的知识进行复习巩固,当每章最后一节编写完成后,另外增加四部分内容:

一、本章知识结构及内容小节:本书用结构图形式将本章知识点有机联系起来,组成网络结构。便于学生从总体上更加系统地掌握本章知识体系和核心内容;

二、教材总复习题全解:对每道题都给了解答,有的题还给出了“思路探索”和“方法点击”,以便帮助读者尽快找到解决问题的思路和方法;找到解决问题的关键、技巧与规律;

三、历年考研真题解析:从历年考研统考试题中精选出典型题目,并进行详细解答和分析。在本书的最后还附有2004年、2005年全国研究生

前 言

QIANYAN

入学考试试题真题及解答。

四、同步自测题及解答:精选有代表性、测试价值高的题目(有些题目选自历年全国研究生入学考试试题),以此检测学习效果,提高应试水平。

本书的编写力求突出以下几个特点:

一、对基本知识力求系统化,便于学习者整体的理解和掌握知识,在头脑中形成清晰、稳固的认知结构,这是提高解题能力和数学思维水平的基础。

二、应试性特点明显。本书针对部分读者要报考研究生,特选取部分研究生入学考试的典型试题,分析思路,提炼方法,并在灵活性、严密性、准确性、简捷性诸多方面做出表率,真正提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握重点、了解考研动向、开拓自己视野。

三、本书力求在讲解基本知识的过程中渗透教学思想方法;通过例题讲解、习题解答及自测题练习,在提高读者的解题能力、应试能力的同时,提高其综合数学素养。本书不仅成为在读大学生同步学习的优秀辅导书,又是广大教师的得力教学参考书,还可为本科毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分。在此,向这些书籍的编著者表示感谢;由于作者水平有限及编写时间仓促,书中疏漏与不妥之处,在所难免,敬请广大读者提出宝贵意见,以便再版时更正、改进。

作者

2005年8月于上海

目 录

| | |
|------------------------------------|-------|
| 前 言 | (1) |
| 第一章 函数与极限 | (1) |
| 第一节 映射与函数 | (1) |
| 第二节 数列的极限 | (17) |
| 第三节 函数的极限 | (21) |
| 第四节 无穷小与无穷大 | (27) |
| 第五节 极限运算法则 | (31) |
| 第六节 极限存在准则 两个重要极限 | (35) |
| 第七节 无穷小的比较 | (42) |
| 第八节 函数的连续性与间断点 | (46) |
| 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 | (53) |
| 第十节 闭区间上连续函数的性质 | (56) |
| 本章知识结构及内容小结 | (61) |
| 历年考研真题解析 | (67) |
| 同步自测题及参考答案 | (72) |
| 第二章 导数与微分 | (76) |
| 第一节 导数概念 | (76) |
| 第二节 函数的求导法则 | (86) |
| 第三节 高阶导数 | (94) |
| 第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 | (100) |
| 第五节 函数的微分 | (108) |
| 本章知识结构及内容小结 | (115) |
| 历年考研真题解析 | (119) |
| 同步自测题及参考答案 | (125) |
| 第三章 微分中值定理与导数的应用 | (129) |
| 第一节 微分中值定理 | (129) |
| 第二节 洛必达法则 | (140) |
| 第三节 泰勒公式 | (147) |
| 第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性 | (154) |
| 第五节 函数的极值与最大值、最小值 | (166) |
| 第六节 函数图形的描绘 | (176) |
| 第七节 曲率 | (181) |
| 第八节 方程的近似解 | (186) |

| | |
|--------------------------------|--------------|
| 本章知识结构及内容小结 | (189) |
| 历年考研真题解析 | (196) |
| 同步自测题及参考答案 | (202) |
| 第四章 不定积分 | (207) |
| 第一节 不定积分的概念与性质 | (207) |
| 第二节 换元积分法 | (214) |
| 第三节 分部积分法 | (229) |
| 第四节 有理函数的积分 | (239) |
| 第五节 积分表的使用 | (248) |
| 本章知识结构及内容小结 | (253) |
| 历年考研真题解析 | (261) |
| 同步自测题及参考答案 | (263) |
| 第五章 定积分 | (268) |
| 第一节 定积分的概念与性质 | (268) |
| 第二节 微积分基本公式 | (278) |
| 第三节 定积分的换元法和分部积分法 | (286) |
| 第四节 反常积分 | (299) |
| 第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数 | (306) |
| 本章知识结构及内容小结 | (310) |
| 历年考研真题解析 | (319) |
| 同步自测题及参考答案 | (322) |
| 第六章 定积分的应用 | (325) |
| 第一节 定积分的元素法 | (325) |
| 第二节 定积分在几何上的应用 | (326) |
| 第三节 定积分在物理学上的应用 | (341) |
| 本章知识结构及内容小结 | (347) |
| 历年考研真题解析 | (350) |
| 同步自测题及参考答案 | (356) |
| 第七章 空间解析几何与向量代数 | (360) |
| 第一节 向量及其线性运算 | (360) |
| 第二节 数量积 向量积 * 混合积 | (368) |
| 第三节 曲面及其方程 | (375) |
| 第四节 空间曲线及其方程 | (383) |
| 第五节 平面及其方程 | (388) |
| 第六节 空间直线及其方程 | (395) |
| 本章知识结构及内容小结 | (404) |
| 历年考研真题解析 | (411) |
| 同步自测题及参考答案 | (414) |

第一章 函数与极限

本章首先学习函数及其相关概念,并介绍函数的基本性质和常见初等函数;接着讨论数列、函数的极限,包括极限定义的各种形式和求几种不同形式极限的常用方法;然后介绍无穷小量和无穷大量,包括无穷小量的比较;最后说明函数的连续性,并介绍利用连续函数的性质求解一些常见问题的方法。

函数是高等数学的研究对象.极限的方法是研究函数的基本方法,贯穿于高等数学的始终,它是初等数学与高等数学的分水岭.因此,理解函数的概念,掌握极限的理论是学好高等数学的基础。

第一节

映射与函数

一、知识要点与考点

1. 区间与邻域

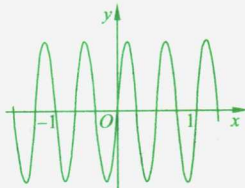
| | | |
|------|-----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 有限区间 | 开区间 | $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ |
| | 闭区间 | $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ |
| | 半开半闭区间 | $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ |
| 无限区间 | | $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$ $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ $[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ |
| 邻域 | 点 a 的 δ 邻域 | $U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \mid x - a < \delta\}$ |
| | 点 a 的去心 δ 邻域 | $\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$ |

2. 函数及相关概念

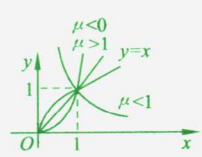
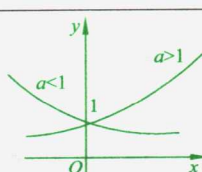
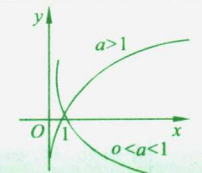
| 名称 | 定 义 | 说 明 |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 函数 | <p>设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为 $y = f(x), x \in D$ 其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f, 即, $D_f = D$.</p> <p>函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即</p> $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ | <p>(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值;</p> <p>(2) 表示函数的记号可以任意选取;</p> <p>(3) 构成函数的要素是, 定义域 D_f 及对应法则 f;</p> <p>(4) 当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时, 两个函数相等.</p> |
| 分段函数 | 在自变量不同变化范围内, 对应法则不同, 即用不同式子来表示同一个函数 | |
| 复合函数 | <p>设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_1, 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D) \subset D_1$, 则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D$ 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D, 变量 u 称为中间变量.</p> | <p>(1) g 与 f 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是: 函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 $f(x)$ 的定义域 D_f 中, 即 $g(D) \subset D_f$;</p> <p>(2) 结合律成立, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, 但没有交换律, 即 $f \circ g \neq g \circ f$.</p> |
| 反函数 | <p>设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$, 称此时映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 对每个 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$, 使 $f(x) = y$, 于是有 $f^{-1}(y) = x$. 一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.</p> | <p>若 f 是定义在 D 上的单调函数, 则 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在.</p> |
| 初等函数 | 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数 | |

3. 函数的几种特性

| 性质 | 定义 | 图例说明和注意 | |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 单调性 | 单调上升(单调递增) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ | | |
| | 单调下降(单调递减) 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ | | |
| 若严格不等号成立, 则称严格单调上升(下降) | | | |
| 有界性 | 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\exists M > 0, \forall x \in X$, 有 $ f(x) \leq M$ (或 $\exists m, M, m \leq f(x) \leq M$ 成立), 则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界函数 | <p>即函数的图形位于 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间</p> | |
| 无界性 | 函数 $f(x)$ 在 X 上定义, 若 $\forall M > 0, \exists x' \in X$, 使得 $ f(x') > M$, 则称 $f(x)$ 在 X 上无界 | 例: $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 因为 $\forall M > 0$, 取 $x' = \frac{1}{3M}$, 则 $f(x') = 3M > M$ | |
| 奇偶性 | 偶函数 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任 $-x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数. | | 函数的奇偶性是相对于区间而言的, 若定义域关于原点对称, 则该函数就不是奇或偶函数. |
| | 奇函数 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任 $-x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数. | | |

| 性质 | 定义 | 图例说明和注意 |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 周期性 | <p>设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个不为零的数 l, 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期.</p> |  <p>一般将 $f(x)$ 的最小正周期简称为 $f(x)$ 的周期, 但周期函数不一定存在最小正周期, 如常数函数. 定义中, 并不要求函数的定义域必须有界.</p> |

4. 基本初等函数

| 名称 | 定义 | 说明或图例 |
|------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 幂函数 | $y = x^\mu (\mu \in \mathbb{R})$ | <p>(1) 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时 $x \in [0, +\infty)$ 当 $\mu = 3$ 时 $x \in (-\infty, +\infty)$ 不论 μ 取什么值, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义. (2) 当 $\mu > 0$ 时, 单调递增; 当 $\mu < 0$ 时, 单调递减.</p>  |
| 指数函数 | $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ | <p>(1) 定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$ (2) 若 $a > 1$, 单调递增. 当 $a < 1$ 时, 单调递减.</p>  |
| 对数函数 | $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ | <p>(1) 定义域: $x \in (0, +\infty)$ (2) 若 $a > 1$, 单调递增. 当 $a < 1$ 时, 单调递减. (3) $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 互为反函数 (4) $a = e$ 时, 记为 $y = \ln x$</p>  |

| 名称 | 定义 | 说明或图例 | |
|----------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 基本初等函数 三角函数 | 正弦函数 $y = \sin x$ | (1) 定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$; 值域为 $[-1, 1]$; (2) 奇函数, 周期 $T = 2\pi$ 的周期函数, 有界函数 $ \sin x \leq 1$ | |
| | 余弦函数 $y = \cos x$ | (1) 定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$ 值域为 $[-1, 1]$ (2) 偶函数, 周期 $T = 2\pi$ 的周期函数, 有界函数 $ \cos x \leq 1$ | |
| | 正切函数 $y = \tan x$ | (1) 定义域: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (2) 奇函数, 周期 $T = \pi$ 周期函数, 单调递增. | |
| | 余切函数 $y = \cot x$ | (1) 定义域: $x \neq k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (2) 周期 $T = \pi$, 周期函数, 单调递减. | |
| | 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ | 周期 $T = 2\pi$ 周期函数在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上无界. | |
| | 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ | 周期 $T = 2\pi$ 周期函数在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上无界. | |

| 名称 | 定义 | 说明或图例 |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 反正弦函数 $y = \arcsin x$ | (1) 定义域为: $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (2) 奇函数, 单调递增 | |
| 反余弦函数 $y = \arccos x$ | (1) 定义域为: $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$ (2) 单调递减 | |
| 反正切函数 $y = \arctan x$ | (1) 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (2) 奇函数, 有界 $ \arctan x < \frac{\pi}{2}$, 单调增函数 | |
| 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ | (1) 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$ (2) 有界函数 $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$, 单调递减 | |

5. 重点、难点与考点

| | |
|----|-----------------------|
| 重点 | 邻域、复合函数、分段函数、定义域、函数性质 |
| 难点 | 复合函数的复合过程 |
| 考点 | 求函数定义域 |
| | 求复合函数、考研中出现分段函数的复合函数 |

二、经典例题解析

基本题型 I: 求函数定义域

例1 求下列函数的定义域.

(1) $y = \ln(x^2 - 1) + \arcsin \frac{1}{x+1}$.

(2) $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$.

解:(1) 由题意 $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x + 1 \neq 0, \\ \left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1. \end{cases}$ 由 $x^2 - 1 > 0$ 得 $x < -1$ 或 $x > 1$.

由 $\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq 1$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 0$, 故定义域为 $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

(2) 由题意 $\begin{cases} \frac{5x-x^2}{4} > 0 \\ \ln \frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

故原函数定义域 $[1, 4]$.

【方法点击】 求初等函数的定义域有下列原则: ① 分母不能为零. ② 偶次根式的被开方数大于等于零. ③ 对数的真数大于零. ④ $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x| \leq 1$. ⑤ $\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. ⑥ $\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

基本题型 II: 求函数表达式

例 2 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$

解法一: 用变量代换, 令 $u = x + \frac{1}{x}$, 解出 $x = (u \pm \sqrt{u^2 - 4})/2$ 代入原式, 得

$$f(u) = \frac{(u \pm \sqrt{u^2 - 4})^2}{4} + \frac{4}{(u \pm \sqrt{u^2 - 4})^2} = u^2 - 2$$

$$\text{即 } f(x) = x^2 - 2$$

解法二: 用拼凑法

$$\text{可令 } g(x) = x + \frac{1}{x}, h(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

将 $h(x)$ 拼凑成以 $g(x)$ 表示的代数式

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\text{令 } t = g(x) = x + \frac{1}{x}, \text{ 则 } f(t) = t^2 - 2$$

$$\text{即 } f(x) = x^2 - 2$$

【方法点击】 含有未知函数的方程叫做函数方程, 观察法和变量代换法是解简单函数方程的两种最基本的方法. 本题综合运用了代换法和拼凑法的思想.

例 3 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 + 1, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$

解: 因当 $0 < |x| < 1$ 时, $|f(x)| = \sqrt{1-x^2} < 1$

$$\text{所以 } f[f(x)] = \sqrt{1-f^2(x)} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{当 } |x| \geq 1 \text{ 时, } |f(x)| = |x^2 + 1| > 1$$

$$\text{所以 } f[f(x)] = f^2(x) + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } |f(0)| = |\sqrt{1-0^2}| = 1$$

所以 $f[f(0)] = [f(0)]^2 + 1 = 2$

综上所述

$$f[f(x)] = \begin{cases} -x, & -1 < x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ x^4 + 2x^2 + 2, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

【方法点击】 复合函数的求解方法主要有两种:

a) 代入法: 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替, 适用于初等函数的复合.

b) 分析法: 抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 适用于初等函数与分段函数的复合或两段函数的复合.

基本题型 III: 求反函数.

例 4 求 $y = f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ 的反函数

【思路探索】 由 $y = f(x)$ 出发解出 x 的表达式, 然后交换 x 与 y 的位置, 即可求得反函数 $y = f^{-1}(x)$.

解: (1) $x > 0$ 时, $y = 1 + x^2$ 解出 $x = \pm \sqrt{y-1}$, 且 $x > 0$, 所以 $x = \sqrt{y-1}$, $y > 1$; (2) $x = 0$ 时, $y = 0$; (3) $x < 0$ 时, $y = -1 - x^2$ 解出 $x = \pm \sqrt{-1-y}$, 且 $x < 0$,

所以 $x = -\sqrt{-1-y}$, 从而 $-1-y > 0$, 即 $y < -1$

综上

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y > 1 \\ 0, & y = 0 \\ -\sqrt{-1-y}, & y < -1 \end{cases}$$

即所求反函数

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-1-x}, & x < -1 \end{cases}$$

【方法点击】 反函数求解方法比较固定, 具有很强的程序性, 关键是把握好定义域和符号的变化, 特别是对于分段函数要牢记所求函数表达式的区间.

基本题型 IV: 把复合函数分解为基本初等函数的复合

例 5 把 $y = \arctan[a^x \sqrt{1-x^2} + \ln(x^2+2)]$ 表示成基本初等函数的复合.

解: 设 $u_1 = 1, u_2 = x^2, u_3 = a^x, u_4 = \ln x, u_5 = 2, f = \arctan x,$

$$g = \sqrt{x}, \text{ 则 } y = f \cdot [u_3 \cdot \lg \cdot (u_1 - u_2) + u_4 \cdot (u_2 - u_5)].$$

由指数函数对数函数、三角函数复合而成.

【方法点击】 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础, 而由里到外, 逐级分解是解决问题的关键. 做题时不能跨越某个级别, 漏掉某个基本初等函数, 要分清复合函数的成分或结构.

基本题型 V: 函数有界性的问题

例 6 证明函数 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

证明: $|f(x)| = \left| \frac{x^2+1}{x^4+1} \right| \leq \frac{(x^2+1)^2}{x^4+1} = \frac{x^4+1+2x^2}{x^4+1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4+1} \leq 1+1=2$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 且 2 是上界.

【方法点击】 证明函数有界的常用方法:

- ① 利用函数有界性的定义, 对函数取绝对值, 然后对不等式进行放缩处理.
- ② 采用导数求最值的方法.
- ③ 根据连续函数的性质. (②、③ 例题见后续相应章节.)

基本题型 VI: 函数单调性的问题

例 7 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减小, 证明: 对任意两点 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

【思路探索】 $\frac{f(x)}{x}$ 单调是唯一的条件, 因此要从 $\frac{f(x)}{x}$ 出发, 逐步构造和结论联系的桥梁.

证明: 不妨设 $0 < x_1 \leq x_2$, 故有: $\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1}$

$\therefore x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1)$, 又 $\because x_2 < x_1 + x_2$, 则:

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2}$$

$\therefore x_2 f(x_1+x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1) \leq x_2 (f(x_2) + f(x_1))$

即 $f(x_1+x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.

$\frac{f(x)}{x}$ 单降.

【方法点击】 单调性是函数的一个性质, 充分利用单调性的定义, 结合不等式的放缩技巧可以得出许多有用的结论.

例 8 判断函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的单调性.

解: $\forall x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 < x_2$,

$$\therefore \cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \sin \frac{x_2-x_1}{2}$$

$$\frac{x_2-x_1}{2},$$

三角函数公式是重要工具.

由于 $x_1 < x_2$, 故有 $0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \pi, 0 < \frac{x_2-x_1}{2} < \pi$,

$\therefore \sin \frac{x_1+x_2}{2} > 0, \sin \frac{x_2-x_1}{2} > 0$, 设 $\cos x_2 - \cos x_1 < 0$,

即 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减.

【方法点击】 证明函数单调性的主要方法有:

- ① 利用函数单调性定义.
- ② 利用导数证明.

基本题型 VII: 函数奇偶性问题.

例 9 已知 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, $|a| \neq |b|$, 证明 $f(x)$ 是奇函数

【思路探索】 证 $f(-x) = -f(x)$, 先求出 $f(x)$

证明: 可令 $t = \frac{1}{x}$ 代入方程, 得

$$af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = a, \text{ 即 } af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx$$

将原方程及上面方程的两端分乘 a, b , 再相减

$$\text{得 } a^2 f(x) - b^2 f(x) = \frac{ac}{x} - b cx = \frac{ac - b cx^2}{x}$$

$$\text{因 } |a| \neq |b|, \text{ 所以 } f(x) = \frac{ac - b cx^2}{(a^2 - b^2)x}$$

$$\text{因 } f(-x) = \frac{ac - b c(-x)^2}{(a^2 - b^2)(-x)} = -f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

【方法点击】 判断函数奇偶性通常采用的方法有:

- ① 从定义出发, 或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).
- ② 证明 $f(-x) + f(x) = 0$ 或 $f(-x) - f(x) = 0$.

基本题型 VIII: 函数周期性问题

例 10 设 $a < b$, 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(a-x) = f(a+x)$, $f(b-x) = f(b+x)$. 证明: $f(x)$ 为周期函数.

证明: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,

$$\begin{aligned} f(x+2b-2a) &= f(b+x+b-2a) = f(b-(x+b-2a)) \\ &= f(a+a-x) = f(a-(a-x)) = f(x). \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 是周期函数, $2b-2a$ 是它的一个周期.

【方法点击】 判定函数为周期函数的主要方法: ① 从定义出发, 找到 $T \neq 0$, 使得 $f(x+T) = f(x)$. ② 利用周期函数的运算性质证明.

解决此类问题的关键是首先猜想到一个周期 T , 这就要求具备较强的恒等变形能力与观察能力.

基本题型 VIII: 函数周期性问题

例 11 已知函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 求其最小正周期.