ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

中学数学丛书

圆锥曲线

张广德 赵明富

湖北教育出版社

中学数学丛书
圆 锥 曲 线
张广德　赵明富
*
湖北教育出版社出版　湖北省新华书店发行
黄冈县印刷厂印刷
787×1092毫米 32 开本 5.875印张 1 插页 132,000 字
1983年10月第 1 版　1983年10月第 1 次印刷
印数：1—22,400
统一书号：7306·31　　定价：0.55元

出 版 说 明

为了帮助广大中学生更好地掌握中学数学基础知识，扩大视野，提高能力，我们敬请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了一套《中学数学丛书》，本丛书《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四册，已经以湖北人民出版社名义出版，其余各册，改由湖北教育出版社出版。

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时，对中学教师亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

第一章　圆锥曲线

圆锥曲线是平面截割圆锥面所得的一类曲线．因平面与圆锥相对位置的不同，这类曲线又可以分成几种类型．如图 1.1 所示，如果把一个直圆锥的每一条母线向两方无限延长，就得到具有两叶的直圆锥面．用一个不经过锥顶的平面来截这圆锥面，如果截面和直圆锥面的轴所成的角是 θ，直圆锥面的半顶角（即直圆锥面的母线和它的轴所成的角）是 α，那么

1．当 $\alpha<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，截得的交线是椭圆；其中 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，截得的交线是圆，它是椭圆的特殊情形．

2．当 $\theta=\alpha$ 时，截得的交线是抛物线．

3．当 $0\leqslant\theta<\alpha$ 时，截得的交线是双曲线；这时截面与锥面的两叶相交，得到双曲线的两支．

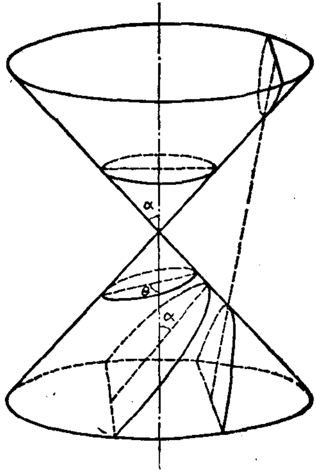

图　1.1

圆锥曲线在理论上和应用上有着重要的地位．创立综合几何学的古希腊人曾经用综合法广泛地研究过圆锥曲线的各种性质．有了解析几何之后，研究圆锥曲线的代数方法取代了综合方法．圆锥曲线成了为平面解析几何的主要研究对象．代数方法的运用使得这些曲线成为了直角坐标系

下二次方程的图形，因而圆锥曲线又称为二次曲线.

§1. 曲线和方程

用解析法研究几何图形是通过坐标系建立曲线的方程，然后再由方程来讨论曲线的性质. 因此，研究曲线和方程的关系成为解析几何中最重要的基本内容之一.

（一）曲线和方程的关系

曲线可以看作是按照某种规律运动的点的轨迹（图 1.2）. 这样，如果设曲线上动点 M 的坐标是 (x, y)，则当 M 点在运动时，它的坐标 x 和 y 也随着相应地变化. 因此，对于动点 M 来说，x 和 y 就成为一对变量. 由于 M 点是按照某种规律在运动，因而 x 和 y 这两个变量也随着动点的规律相互依赖、相互制约. 用代数方法把动点的坐标 x 和 y 之间的联系表示出来，就得到包含 x 和 y 两个变量的方程.

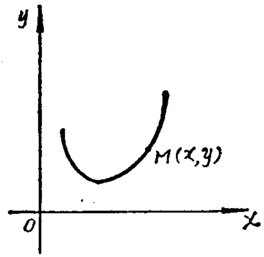

图 1.2

例如，要求出以原点 $O(0,0)$ 为圆心、r 为半径的圆的方程. 我们在图 1.3 的圆上设任意一点即动点 M 的坐标为 (x, y). 这样，当 M 点在运动过程中，总是遵循它到原点 O 的距离等于半径 r 这样一个规律，因此有

$$|MO| = r.$$

由两点间的距离公式

$$|MO| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

于是 $$\sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

两边平方，得

$$x^2+y^2=r^2. \qquad ①$$

①就是圆 O 的方程.

下面我们分析图 1.3 中的圆 O 和方程①之间的关系.

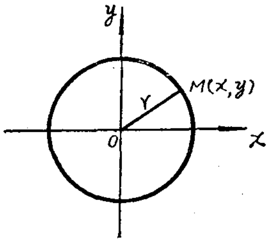

图 1.3

方程① 表示点 (x, y) 到原点 $O(0,0)$ 的距离的平方等于半径的平方，即表示动点所必须满足的条件（与原点的距离为 r）. 显然，满足这样条件的点都在图 1.3 中的圆上；反之，在图 1.3 中的圆上的点 (x, y)，因为与 O 点的距离是 r，所以又都适合①. 在这样的意义下，方程①表示了与原点 O 的距离等于 r 的点的轨迹（以 O 为圆心、r 为半径的圆）. 根据轨迹的意义，方程①和圆 O 有如下的关系：

i）圆 O 上的点的坐标都适合方程①；

ii）适合方程①的所有的点都在圆 O 上.

于是我们完全可以用方程①来代表图 1.3 中的圆 O. 我们称方程①是圆 O 的方程，圆 O 是方程①的曲线.

一般地，我们有下面的**定义**.

如果曲线 C 在给定的直角坐标系下符合下列条件：

i）曲线 C 上所有的点都适合方程 $F(x, y)=0$；

ii）坐标适合方程 $F(x, y)=0$ 的点都在曲线 C 上. 那么，方程 $F(x, y)=0$ 叫做曲线 C 的方程；曲线 C 叫做方程 $F(x, y)=0$ 的曲线.

在定义中，我们给出了曲线的方程和方程的曲线这样两个紧密联系着的概念. 下面我们进一步分析这两个概念.

1. 曲线的方程

我们知道，在某一个命题“$A \Rightarrow B$”中，A 是 B 成立的充分

条件；B 是 A 成立的必要条件．如果有 $A\Rightarrow B$，又有 $B\Rightarrow A$，则可以合并写成 $A\Longleftrightarrow B$，即 A 与 B 互为充要条件．

在前面定义中的条件 i）指出，如果点在曲线 C 上，那么它的坐标适合于方程 $F(x,y)=0$．因此，点的坐标适合于方程 $F(x,y)=0$ 是这个点在曲线 C 上的必要条件，我们把这个条件称为方程 $F(x,y)=0$ 的必要性．

条件 ii）指出，如果点的坐标适合于方程 $F(x,y)=0$，那么它在曲线 C 上．因此，点的坐标适合于方程 $F(x,y)=0$ 也是这个点在曲线 C 上的充分条件，我们把这个条件称为方程 $F(x,y)=0$ 的充分性．

所以，曲线的方程就是点在曲线上的充要条件的解析表达式．

这样，如果 $F(x,y)=0$ 是曲线 C 的方程，那么它就应该同时具备必要性和充分性，缺一不可．

在前面的例子中，正是因为 $x^2+y^2=r^2$ 同时具有必要性和充分性，我们才说它是圆 O 的方程．

下面我们再举两个例子加以说明．

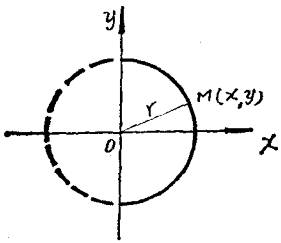

图 1.4

例 1 设曲线 C 是图 1·4 中的右半圆，方程 $x^2+y^2=r^2$ 是曲线 C 的方程吗？

如果点 $M(x,y)$ 在曲线 C 上，那么 $|OM|=r$，因而点 M 的坐标适合方程 $x^2+y^2=r^2$，这说明方程 $x^2+y^2=r^2$ 是点 (x,y) 在右半圆上的必要条件．

反过来，适合方程 $x^2+y^2=r^2$ 的 (x,y) 所对应的点却并不都在右半圆上．例如点 $(-r,0)$ 适合方程，但是它不在曲线 C 上．

这说明方程 $x^2+y^2=r^2$ 不具备充分性．作为曲线上点的轨迹条件来说，方程 $x^2+y^2=r^2$"宽"了些，所以它不是曲线 C 的方程．

但是，如果对方程附加一个条件 $x\geqslant 0$，即

$$x^2+y^2=r^2(x\geqslant 0), \quad ①$$

那么方程①就是曲线 C 的方程．

例 2　设曲线 C 是到两坐标轴的距离相等的点的轨迹，它由图 1.5 中直线 l_1 与 l_2 组成，方程 $x=y$ 是曲线 C 的方程吗？

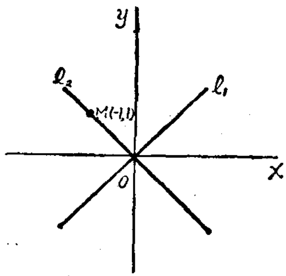

图　1.5

显然，适合方程 $x=y$ 的点在直线 l_1 上，因而也在曲线 C 上．这说明方程 $x=y$ 具备了充分性．

但是曲线 C 上的点却不都适合方程 $x=y$．例如点 $M(-1,1)$ 在 l_2 上，因而也在曲线 C 上，然而它的坐标 $(-1,1)$ 不适合方程．这说明方程 $x=y$ 不具备必要性．作为曲线上点的轨迹条件来说，方程 $x=y$"窄"了些，因此方程 $x=y$ 不是曲线 C 的方程．

事实上，曲线 C 的方程应该是方程

$$|x|=|y|.$$

它不仅具备充分性，同时也具备必要性．

2．方程的曲线

按照轨迹的意义，如果曲线 C 是适合某条件的点的轨迹，那么曲线 C 必须具备以下两点：

i）**纯粹性**　在曲线 C 上的点都适合条件；

ii）**完备性**　适合条件的点都在曲线 C 上．

我们说曲线 C 是方程 $F(x,y)=0$ 的曲线，也就是说曲

线 C 是“点的坐标适合方程 $F(x, y)=0$ 的点的轨迹.”在方程的曲线的定义中，条件 i) 指出了曲线 C 应该具有纯粹性，即不允许出现“杂”的现象；条件 ii) 指出曲线应该具有完备性，即不允许出现“漏”的现象.

对于方程 $x^2+y^2=r^2$ 而言，以原点 O 为圆心、r 为半径的圆 O 既具有纯粹性又具有完备性，因而图 1.3 中的圆 O 是方程 $x^2+y^2=r^2$ 的曲线.

对于方程 $x=\sqrt{r^2-y^2}$ 而言，图 1.3 中的圆 O 只具有完备性而不具备纯粹性，因而它不是方程 $x=\sqrt{r^2-y^2}$ 的曲线. 这里出现了“杂”的现象. 在图 1.4 中用虚线画出的左半圆上的点都不适合方程 $x=\sqrt{r^2-y^2}$. 因而方程 $x=\sqrt{r^2-y^2}$ 的曲线是图 1.4 中的右半圆.

对于方程 $|x|=|y|$ 而言，例 2 中的直线 l_1 只具备纯粹性而不具备完备性，因而图 1.5 中的直线 l_1 也不是方程 $|x|=|y|$ 的曲线，这里出现了“漏”的现象. 在图 1.5 中直线 l_1 与 l_2 的并集是方程 $|x|=|y|$ 的曲线.

综上所述，曲线的方程和方程的曲线这两个重要概念给出了曲线和方程的对应关系：平面上的曲线可以用含有 x、y 的方程来表示；含有 x、y 的方程也可以用平面上的曲线来表示. 因此，解析几何的基本问题首先是：已知曲线，求它的方程；已知方程，画出它的曲线. 然后，再利用方程研究曲线的性质.

（二）求已知曲线的方程

曲线就是动点的轨迹. 求已知曲线的方程，也就是在给定的坐标系中，把动点应满足的轨迹条件用方程表示出来.

例 3 已知线段 AB 的长为 a，求到 A、B 两点距离的平

方和是定值 k^2 的点 M 的轨迹方程($2k^2>a^2$).

解：以直线 AB 为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，因而点 A、B 的坐标分别为 $(-\frac{a}{2},\ 0)$，$(\frac{a}{2},\ 0)$（图 1.6）.

设 $M(x,y)$ 是轨迹上任意一点，由题设条件知

$$|MA|^2+|MB|^2=k^2. \quad ①$$

由两点间距离公式，得

$$\left(\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)^2+\left(\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}\right)^2=k^2. \quad ②$$

整理后化简得

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}(2k^2-a^2). \quad ③$$

上述过程说明轨迹上任意一点 M 的坐标 (x,y) 都适合方程③，即方程③具备必要性. 为了判断方程③是否为所求的轨迹方程，还须讨论它是否具备充分性，即坐标满足③的点都在轨迹上.

设点 $M_1(x_1,y_1)$ 的坐标适合方程③，即

$$x_1^2+y_1^2=\frac{1}{4}(2k^2-a^2).$$

那么

$$x_1^2+ax_1+\frac{a^2}{4}+x_1^2-ax$$

$$+\frac{a^2}{4}+2y_1^2=k^2,$$

$$\left(x_1+\frac{a}{2}\right)^2+y_1^2+\left(x_1-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$+y_1^2=k^2.$$

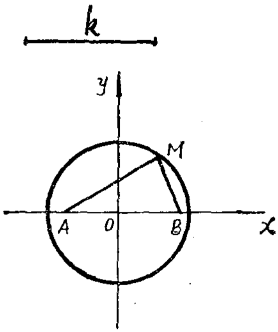

图 1.6

于是

$$\left(\sqrt{\left(x_1+\frac{a}{2}\right)^2+y_1^2}\right)^2+\left(\sqrt{\left(x_1-\frac{a}{2}\right)^2+y_1^2}\right)^2=k^2,$$

$\therefore$ $$|M_1A|^2+|M_1B|^2=k^2.$$

即坐标适合方程③的点 $M_1(x_1, y_1)$ 都在轨迹上.

基于上述，根据曲线的方程的定义，可知所求的轨迹方程为

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}(2k^2-a^2).$$

因为 $2k^2>a^2$，所以它的图形是以线段 AB 的中点为圆心、以 $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}$ 为半径的圆.

我们知道，判断一个方程是否为已知曲线的方程不仅要证明它具备必要性，而且还要证明它具备充分性. 在上例中，导出方程③的过程也就证明了方程③具备必要性，充分性的证明过程实际上是方程③的导出过程的逆过程. 如果能够判断方程的推导过程是可逆的，那么也就说明了所得的方程具备充分性. 因此，运用方程的同解理论也可以证明充分性. 在例 3 中，我们可以用如下方法考虑.

方程②是所求的轨迹方程，这是显然的. 因此我们只要判断方程②和③的同解性就可得出方程④是否为轨迹方程的结论. 事实上，由②变到③的过程只用到了方程的同解变形(移项和两边乘以不为零的常数)，所以方程②和③同解，因此方程③就是所求的方程.

例 4　已知两点 $F_1(-5, 0)$ 和 $F_2(5, 0)$，求适合条件 $|MF_1|-|MF_2|=8$ 的动点 M 的轨迹方程.

解：设 $M(x, y)$ 是轨迹上的任意一点. 因为

$$|MF_1|-|MF_2|=8, \quad ①$$

所以 $$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=8. \quad ②$$

移项后两边平方，再整理得

$$4\sqrt{(x-5)^2+y^2}=5x-16, \tag{③}$$

两边再平方，得

$$16[(x-5)^2+y^2]=(5x-16)^2, \tag{④}$$

整理得

$$9x^2-16y^2=144. \tag{⑤}$$

下面研究方程⑤是否与②同解．我们分析方程两次平方前后的情况．

方程③是由方程$\sqrt{(x+5)^2+y^2}=8+\sqrt{(x-5)^2+y^2}$两边平方而得，因为$8+\sqrt{(x-5)^2+y^2}>0$，所以③和②同解．

方程③与混合方程组

$$\begin{cases}16[(x-5)^2+y^2]=(5x-16)^2,\\5x-16\geqslant 0\end{cases} \tag{Ⅰ}$$

同解*，也就是与混合方程组

$$\begin{cases}9x^2-16y^2=144,\\5x-16\geqslant 0\end{cases} \tag{Ⅱ}$$

同解，因而③与⑤不同解．事实上，当$x\leqslant -4$时方程⑤有解而方程③无解，因此方程⑤只具备必要性而不具备充分性，不能作为轨迹方程．

实际上混合方程组（Ⅱ）也就是方程

$$9x^2-16y^2=144\ (x\geqslant 4), \tag{⑤'}$$

---

* 这里和下面用到了定理：在实数范围内，方程$\sqrt{R(x)}=P(x)$和混合方程组$\begin{cases}R(x)=P^2(x)\\P(x)\geqslant 0\end{cases}$同解．

这就是所求的轨迹方程.

它的图形是图 1.7 中用实线画出的双曲线的右支. 而图中用虚线所画出的双曲线的左支正是当 $x\leqslant-4$ 时方程⑤所表示的曲线，它不是本题的轨迹曲线，而是满足条件$|MF_1|-|MF_2|=-8$的点的轨迹.

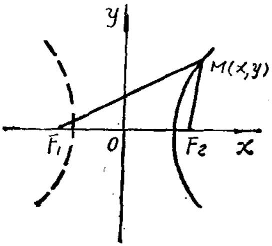

图 1.7

由例 3 和例 4 可以看出求已知曲线的方程的一般步骤是：

(1) 选择适当的坐标系，把已知曲线上的任意一点设为 $M(x, y)$；

(2) 利用曲线上的点所满足的几何条件（充要条件）列出等式；

(3) 将上式用 x、y 表示，列出方程；

(4) 把所列的方程化成最简形式；

(5) 判断这个方程是否为曲线的方程.

如果在方程的简化过程中都是同解变形，那么最后一步的判断证明常常略去.

象例 4 那样将方程化简须要加以限制的情形是经常出现的，我们要特别注意. 下面一个例子说明，方程同解变形的过程本身可以给出这个限制条件，并且这种限制常常与几何直观是一致的.

例 5　已知ΔABC的两个顶点为 $A(0,5)$ 和 $B(0,-5)$，顶点 C 为动点，两动边的斜率的乘积等于 -5，求顶点 C 的轨迹方程.

解：设顶点 C 的坐标为 (x, y)，两动边的斜率分别为 k_{AC} 和 k_{BC}，由题设条件得