张君达 主编

高中数学
奥林匹克专题讲座

光明日报出版社

高中数学奥林匹克专题讲座

张君达　主编

光明日报出版社

（京）新登字101号

高中数学奥林匹克专题讲座

*

光明日报出版社发行
（北京永安路106号）
邮政编码：100050
电话：3017733—225
新华书店北京发行所经销
北京通县向阳印刷厂印刷

787×1092 1/32 印张15.125字数225千字
1993年1月 第1版 1993年1月 第1次印刷
印数：1-10060册
ISBN 7-80091-397-X/G·578

定价：6.30元

序

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年)，这是力量，灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1990年，作为第一个亚洲东道国——中国举办了第31届国际数学奥林匹克，这对中国的数学教育的发展无疑是一个有力的促进，近几年来，中国队在国际数学奥林匹克中取得了引人瞩目的成绩：

1988年获团体总分第二名(29届，澳大利亚)；

1989年获团体总分第一名(30届，西德)；

1990年获团体总分第一名(31届，中国)；

1991年获团体总分第二名(32届，瑞典)；

1992年获团体总分第一名(33届，俄罗斯)；

北京的学生取得了较好的成绩，他(她)们是：

北大附中的滕峻(28届，金牌)，高峡(28届，铜牌)；

人大附中的严华菲(30届，银牌)；

北京四中的张朝辉(31届，金牌)；

北大附中的张里剑(32届，金牌)王绍昱(32届，金牌)，刘彤威(32届，银牌)；

北大附中的周宏(33届，金牌)。

这一成绩的取得与国家教练组、北京教练组、北京数学奥林匹克学校的工作和各级教育部门的支持是分不开的。

数学奥林匹克初始作为激发学生学习数学的兴趣、传播

数学知识与思想、推动数学课外活动开展的一项有意义的活动而发生；进而发展为发现和选拔青少年参与高层次数学学习的一个有力措施而存在。时至今日，“青少年数学智力开发”、“数学业余学校的教材建设”等课题的研究已受到数学教育工作者的关心与重视。在梅向明主编，张君达副主编的“中学数学奥林匹克丛书”(1988，北京师范学院出版社)出版后，我们陆续收到许多国内外读者的来信。期间，日本东京图书株式会社出版了由日本国际数学奥林匹克委员会翻译的“丛书”的日文本，台湾明曜数学研究中心出版了“丛书”的繁体中文本。在“丛书”的基础上，我们组织编写了《高中数学奥林匹克专题讲座》。

经过多年的奥林匹克数学教学的实践与研究，针对全国高中数学联赛的要求，我们讨论并撰写了切合高中学生实际的《高中数学奥林匹克专题讲座》。本书作者具有丰富的奥林匹克数学的教学经验，其中有

1989年北京队主教练、特级教师周沛耕；(第22，23讲)

1990年北京队主教练、高级教师王人伟；(第1,3,18讲)

北京海淀数学奥林匹克学校校长、高级教师王建民；(第21讲)

国家教委(清华大学)理科实验班教练兼班主任、高级教师邵光砚(第4,10,16讲)；以及曾在北京队和北京数学奥林匹克学校高中部执教的魏林(第2,11,15讲)、邓钧(第9，13,17讲)、陈楚炎(第19,20讲)、王植(第5,12讲)、邵丽娟(第14讲)倪斯杰(第8讲)、李念伟(第7讲)、张君达(第6讲)等同志。他们的工作受到了学生及其所在学校和各级教育部门的称誉。

相对于正规数学课堂教学，数学奥林匹克学校的教学是个提高的过程。但相对于培养各级数学竞赛的优秀选手，

数学奥林匹克学校的教学应视作普及。亟须注意的是数学业余学校的普及性，普遍提高学生的数学素质促进其全面发展应是数学课外教育的宗旨之一。

希望《高中数学奥林匹克专题讲座》能成为数学业余学校和数学课外活动的参考资料。书中不妥之处，尚请读者不吝指正。

张君达

1992年9月

目　　录

第一讲　从平面到空间

一、平面与空间问题的类比

许多平面几何中的命题可以推广成立体几何中的相应命题。反之，解决立体几何的问题，常常先研究该问题在平面内的相应命题及解决方法，然后推广到空间，寻求相应的解决方法。

例1 等腰三角形底边上任意一点到两腰距离和为定值。

分析　这是一个平面几何中很基本的命题，有多种证法。我们关心的是该命题在三维空间中的推广，以及它的各种证法如何推广到三维空间中去。

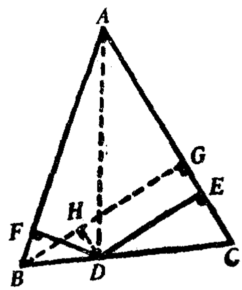

图1-1

证法1　如图1-1，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BC上一点，$DE\perp AC$于E，$DF\perp AB$于F，连接AD，作$BG\perp AC$于G。

$$\because S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}AC\cdot DE+\frac{1}{2}AB\cdot DF$$

$$=\frac{1}{2}AC(DE+DF)$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BG$$

又$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle \,DE}$

$\therefore DE+DF=BG=$定值

该命题推广到空间，变成相应命题："正三棱锥底面上任一点到三个侧面的距离和等于定值"。它的证明方法与证法1相仿，只是"三角形面积转化成了三棱锥体积"。

证法2　作$DH\perp BG$于H，$DEGH$是矩形，得$DE=HG$。在$\triangle BHD$与$\triangle DFB$中，$\angle BHD=\angle DFB=rt\angle$，$BD$是公共边，$\angle HBD=\angle EDC=90^\circ-\angle C=90^\circ-\angle B=\angle FDB$。于是得$\triangle BHD\cong\triangle DFB$，$BH=DF$，所以$DE+DF=BG$。

这一证明方法可推广到空间，得相应的证法。在平面问题中"作$DH\perp BG$于H"，相当于在空间问题中"过D点作垂直于AH的平面，与AH交于K"（如图1-2）。在平面问题中将BG截成两段，一段HG与DE相等，另一段BH与DF相等；在空间问题中，可将AH截成两段，一段$KH=DE$，另一段AK欲证它等于$DF+DG$，只需再作一次截面：过D点作截面与面AVC平行，这个平面将M点到ANS的垂线段分成两截，其中一段与DG相等，另一段与DF相等。

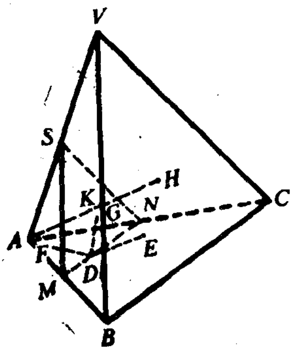

图1-2

证法3　如图1-1，$DE=DC\cdot\sin C$，$DF=DB\cdot\sin B$，$\because\angle B=\angle C$，$\therefore DE+DF=(DC+DB)\sin C=BC\cdot\sin C=BG$。

这一证法的思路是利用等腰三角形两底角相等的性质，将DE与DF转化成用底边上线段表示。推广到空间，就可利用正三棱锥各侧面与底面所成角相等(设此角为θ)，将D点到三侧面的距离和转化成底面上D点到ΔABC三边距离和与$\sin\theta$的乘积，由于ΔABC是正三角形，D到三边距离和等于一边上的高，于是得证。

另外还有其他证明方法，也都可以在空间找到相应的方法。

例2 四面体$ABCD$内接于半径为R的球O内，球心O在该四面体内，连结AO、BO、CO、DO并延长分别与对面交于A_1、B_1、C_1、D_1。求证：

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1 \geqslant \frac{16}{3}R$$

分析 相应的平面内的命题是"ΔABC内接于圆O，且O点在ΔABC内，连结AO、BO、CO并延长分别交对边于A_1、B_1、C_1，则$AA_1+BB_1+CC_1 \geqslant \frac{9}{2}R$"。如图1-3，$\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}=1$，即

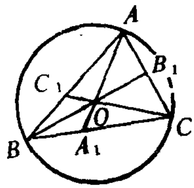

图1-3

$$\frac{AA_1-R}{AA_1}+\frac{BB_1-R}{BB_1}+\frac{CC_1-R}{CC_1}$$

$=1$，即$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}=\frac{2}{R}$。由哥西不等式，得

$$(AA_1+BB_1+CC_1)\left(\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}\right) \geqslant 9$$

$$\therefore AA_1+BB_1+CC_1 \geqslant \frac{9R}{2}.$$

将平面问题的证明方法推广到空间，就得到了本例的证明方法。

证明 $\because \frac{OA_1}{AA_1}=\frac{V_{O-BCD}}{V_{ABCD}}$，$\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{V_{O-ACD}}{V_{ABCD}}$，

$\frac{OC_1}{CC_1}=\frac{V_{O-ABD}}{V_{ABCD}}$，$\frac{OD_1}{DD_1}=\frac{V_{O-ABC}}{V_{ABCD}}$，且$V_{ABCD}=V_{O-BCD}$

$+V_{O-ACD}+V_{O-ABD}+V_{O-ABC}$，

$$\therefore \quad \frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OD_1}{DD_1}=1$$

即
$$\frac{AA_1-R}{AA_1}+\frac{BB_1-R}{BB_1}+\frac{CC_1-R}{CC_1}+\frac{DD_1-R}{DD_1}=1$$

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}+\frac{1}{DD_1}=\frac{3}{R}$$

由哥西不等式，得

$$\left(\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{CC_1}+\frac{1}{DD_1}\right)(AA_1+BB_1+CC_1+DD_1)$$
$$\geqslant 16$$

$$\therefore AA_1+BB_1+CC_1+DD_1\geqslant\frac{16}{3}R$$

例3 A、B是平面α同侧的两个定点，在α上找点P，使$\angle APB$最大。

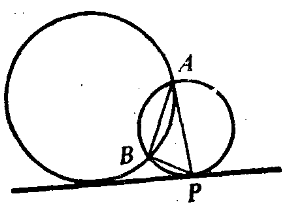

图1-4

分析 本题相应的平面内的命题是"A、B是直线l同侧的两个定点，在l上找点P，使$\angle APB$最大"。为解决这一问题，可以AB为弦作圆（见图1-4），其中至少有一个圆与直线l相切，较小圆与l的切点即为所求p点(当AB与l垂直时，两圆相等，这时p点有两个)．

解 如图1-5，设直线AB与α相交于O，若$AB\perp\alpha$，则p点轨迹为以O为圆心，以$\sqrt{AO\cdot BO}$为半径的圆周。

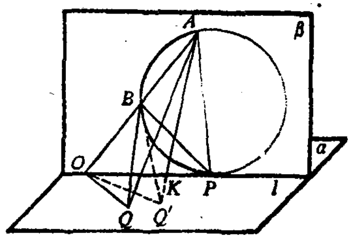

图1-5

若AB与α不垂直，则可过AB作唯一平面β，使$\beta\perp\alpha$，且α与β交于l。在l上取点P，使$OP=\sqrt{AO\cdot BO}$。这样的P点有两个，现取使$\angle AOP$为锐角时的P点即为所求。现就此一般情况下证明$\angle APB$最大。

(1) 若Q点是l上的任意点(与P不重合)，因为$OP=\sqrt{AO\cdot BO}$，所以过A、B、P的圆与l相切。若Q与P在O点同侧，则必有$\angle AQB<\angle APB$(圆外角小于同弧上的圆周角)。若Q与P在O点异侧，可先作$\odot ABP'$，使其与l相切于P'，P'与P在O点两侧，则有$\angle AQB<\angle AP'B<\angle APB$。

(2) 若Q点是α上任意点且不在l上，则连结AQ、BQ、OQ，由于$\angle AOP$是AB与α所成角，所以$\angle AOP<\angle AOQ$。现将ΔAOQ绕AO旋转到β平面内，由于$\angle AOP<\angle AOQ$，Q点必转到l的下方，设为Q'。AQ'与l交于K，则$\angle AQB=\angle AQ'B<\angle AKB\leqslant\angle APB$。

说明 在证明$\angle AQB<\angle APB$(Q点不在l上)时，可能会想到作$QH\perp l$于H，欲证$\angle AQB<\angle AHB$，但这一结论是错误的(如当H与O重合时，显然有$\angle AQB>\angle AHB$)。

例4 已知四面体$A_1A_2A_3A_4$的六条棱上二面角的大小分

别为θ_{12}、θ_{13}、θ_{14}、θ_{23}、θ_{24}、θ_{34}，且这些角都是锐角。

求证：$\cos\theta_{12}\cdot\cos\theta_{13}\cdot\cos\theta_{14}\cdot\cos\theta_{23}\cdot\cos\theta_{24}\cdot\cos\theta_{34}\leqslant\frac{1}{729}$.

分析 本题在平面内的相应命题是"ΔABC中$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leqslant\frac{1}{8}$"。这一命题有多种证法，现在要选择一种容易推广到三维空间去的证法。不妨设ΔABC是锐角三角形。

$$a=b\cos C+c\cos B\geqslant 2\sqrt{bc\cos B\cos C}$$

$$b=c\cos A+a\cos C\geqslant 2\sqrt{ca\cos A\cos C}$$

$$c=a\cos B+b\cos A\geqslant 2\sqrt{ab\cos A\cos B}$$

将三个不等式相乘，两边消去abc，即得

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}$$

这一证明用到了三角形中的射影定理及平均不等式。三角形中的射影定理推广到空间，就是三棱锥中的面积射影定理。

证明 过A_1作对面$A_2A_3A_4$的垂线A_1H，垂足为H，则有

$$S_{\Delta A_2A_3A_4}=S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot\cos\theta_{23}+S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot\cos\theta_{34}+S_{\Delta A_1A_4A_2}\cdot\cos\theta_{24}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot S_{\Delta A_1A_4A_2}\cdot\cos\theta_{23}\cos\theta_{34}\cos\theta_{24}}$$

同样可得

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{S_{\Delta A_1A_3A_4}\cdot S_{\Delta A_1A_4A_2}\cdot S_{\Delta A_2A_3A_4}\cdot\cos\theta_{13}\cos\theta_{12}\cos\theta_{23}}$$

$$S_{\Delta A_1A_3A_4}\geqslant 3$$

$$\cdot\sqrt[3]{S_{\triangle A_1A_2A_3}\cdot S_{\triangle A_1A_4A_2}\cdot S_{\triangle A_2A_3A_4}\cdot\cos\theta_{13}\cos\theta_{34}\cos\theta_{41}}$$

$$S_{\triangle A_1A_4A_2}\geqslant 3$$

$$\cdot\sqrt[3]{S_{\triangle A_1A_2A_3}\cdot S_{\triangle A_1A_3A_4}\cdot S_{\triangle A_2A_3A_4}\cdot\cos\theta_{14}\cos\theta_{42}\cos\theta_{12}}$$

将上面四个不等式相乘、并消去$S_{\triangle A_1A_2A_3}\cdot S_{\triangle A_2A_3A_4}\cdot$

$S_{\triangle A_3A_4A_1}\cdot S_{\triangle A_2A_4A_1}$、得

$$\cos\theta_{12}\cdot\cos\theta_{13}\cdot\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cdot\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}\leqslant\frac{1}{729}$$

不难看出，当且仅当正四面体时等式成立。

例5 已知空间n个不全共面的点，求证：必存在一个圆，它恰好经过其中三个点。

分析 平面内相应命题是“已知同一平面内n个不全共线的点，必存在一条直线恰好经过其中两个点”。这就是著名的西尔维斯特定理。现在的关键在于如何将空间问题转化成平面问题，从而运用这一定理。

证明 设n个点为A_1、A_2、…、A_n，连结$A_1A_i(i=2,3,\cdots n)$，共$n-1$条直线，必存在一个与A_1A_i均不平行的平面α，设A_1A_i与α交于点A'_i（对于不同的i、j，可能有$A'_i=A'_j$，但由于A_1、A_2、…、A_n不全共面，至少存在三个不同的A'_i），所得A'_i不全共线（否则这n个点共面）。由西尔维斯特定理，至少存在一条直线恰通过其中两点A'_i、A'_j。这时，过A_1、A_i、A_j的圆恰过这三个点（在平面$A_1A_iA_j$上可能还有这n个点中的其他点，但即使有，也都在直线A_1A_i或A_1A_j上，而过A_1、A_i、A_j三点的圆与直线A_1A_i及A_1A_j交点仅A_1、A_i、A_j三个）。

例6 已知空间坐标系中一定点P的坐标为(x_0,y_0,z_0)。

试求一点$Q(x,y,z)$，使满足$x\leqslant y\leqslant z$，且$|PQ|$最小。

分析 先退回平面，其相应的问题是“已知定点$P(x_0,y_0)$，求点$Q(x,y)$，使$x\leqslant y$且$|PQ|$最小”。这一问题不难解决，若$x_0\leqslant y_0$，那么当$x=x_0$，$y=y_0$(即Q与P重合)时，$|PQ|$最小，且最小值为零；若$x_0>y_0$，那么过P点作直线$y=x$的垂线，垂足即为所求Q点，这时$x=y=\frac{x_0+y_0}{2}$。现证明此时$|PQ|$达到最小。

$$|PQ|=\sqrt{\left(x_0-\frac{x_0+y_0}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{x_0+y_0}{2}\right)^2}$$

对于任一其他点$Q'(x,y)$ $(x\leqslant y)$，则

$$|PQ|'=\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}$$

$$|PQ'|^2-|PQ|^2=\left(x-\frac{x_0+y_0}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_0+x_0}{2}\right)^2+(x_0-y_0)(y-x)\geqslant 0$$

$\therefore |PQ'|\geqslant|PQ|$

解 若$x_0\leqslant y_0\leqslant z_0$，则当$x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$时，$|PQ|=0$，取得最小值，且满足$x\leqslant y\leqslant z$。

若$x_0>y_0\leqslant z_0$，则取$x_1=y_1=\frac{x_0+y_0}{2}$，$z_1=z_0$。若此时$y_1\leqslant z_1$，则$x=y=\frac{x_0+y_0}{2}$，$z=z_0$，使$|PQ|$最小；若$y_1>z_1$，则令$x=y=z=\frac{x_0+y_0+z_0}{3}$，能使$|PQ|$最小。

若$x_0\leqslant y_0>z_0$，则取$x_1=x_0$，$y_1=z_1=\frac{y_0+z_0}{2}$。此时，若$x_1\leqslant y_1$，则令$x=x_1$，$y=z=\frac{y_0+z_0}{2}$，能使$|PQ|$取得最

小值；若$x_1>y_1$，则令$x=y=z=\frac{x_0+y_0+z_0}{3}$，能使$|PQ|$取得最小值。

若$x_0>y_0>z_0$，则令$x=y=z=\frac{x_0+y_0+z_0}{3}$，此时$|PQ|$最小。

证明 略(证明方法与平面问题完全类似)。

说明 由二维问题推广或三维问题，解决方法类似，仅仅情况多一些，有些情况还需要分步调整。本例还可推广到四维、五维甚至n维空间中去。

二、利用截面、射影或视图，将空间问题转化成平面问题

并不是所有的空间问题都有相应的平面问题，因此前面所述的方法对于有些问题来说并不适用。但是尽可能将空间问题转化成平面问题，或者将空间问题的某一局部转化成平面问题是常用的方法，而这种转化常常需要借助于截面，射影或者视图。

例7 半径为r的球内切于一个正三棱锥，求此正三棱锥全面积的最小值。

分析 有关两个几何体相接或相切的问题，一般总要选取一个适当的截面，这个截面要能充分反映这两个几何体的特点，并能反映它们之间的关系。本例中，由对称性，棱锥的高必通过内切球球心，因此应该过高SO_1及一条侧棱作一截面，将空间问题转化成平面

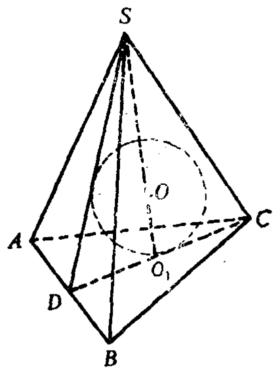

图1-6