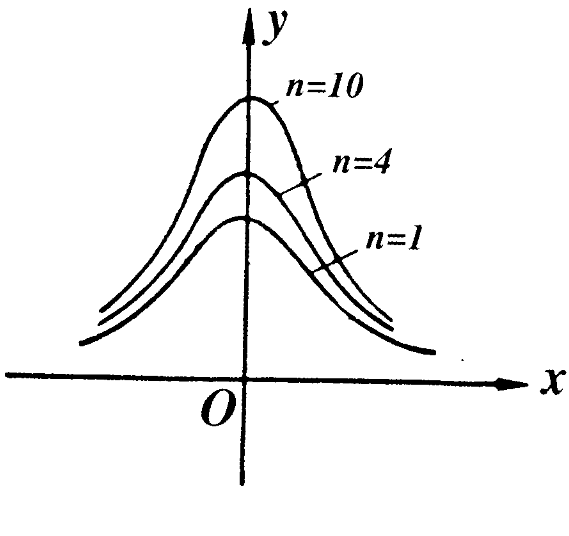
概率论与数理统计



陈文光　崔士襄　主编

学 苑 出 版 社

概 率 论 与 数 理 统 计

主　编：　陈文光　崔士襄

学 苑 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陈文光等主编.-北京:学苑出版社,1996.5

高等学校教材

ISBN 7-5077-1085-8

Ⅰ.概… Ⅱ.陈… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 23704 号

学苑出版社出版　发行

社址:北京万寿路西街 11 号　邮政编码:100036

北京商学院　印刷厂印刷　新华书店经销

850×1168　1/32　8.25 印张　211 千字

1996 年 6 月北京第 1 版　1997 年12月北京第 2 次印刷

印数:1—7500 册

定价:8.50 元

前　言

当前，我国改革开放和现代化建设已进入了一个新的历史时期，科学技术的飞速发展，又为现代化建设增添了活力。为了培养跨世纪的建设人才。不断改进、更新高等院校数学课程的教材势在必行。为此，我们九所高等院校的教师在多年教学实践的基础上，经过集体讨论，编写了《高等数学》、《概率论与数理统计》、《线性代数》三本教材以及与《高等数学》配套使用的《高等数学学习指导书》。

考虑到各专业的不同需要，这套教材的编写努力体现以下特点：引进概念自然，叙述概念深入浅出，清晰明确；定理的证明力求严谨；选择例题典型、充实，力求通过丰富的例题和习题，使读者更好地掌握解题的基本方法和技巧，培养他们应用数学方法分析和解决实际问题的能力。

河北农业大学、四川农业大学、华北电力大学、河北理工大学、甘肃农业大学、新疆农业大学、内蒙古林学院、邯郸高等农业专科学校、河北职业技术师范学院的部分教师参加了本书编写工作，本书参编人员认真完成了初稿的撰写，最后由陈文光副教授修改定稿。

本书在编写过程中参考了某些同类教材和有关书藉，经张德培教授审阅。在此对有关书藉的编者及张德培教授表示感谢。

本书可做为高等院校农医、经济、理工(少学时)类各专业本科及职业高等教育、各类成人高等教育的教科书、也可供科技工作者参考。

由于水平所限，不当之处，恳请批评指正。

编　者

1995.9.

目　　录

第一章　概率的基本概念

§1.1　随机事件及其概率

一、随机试验与样本空间

在给定的条件下进行试验时，我们所观察到的现象大致可分为两种类型：一类是确定性现象，即在给定的条件下必然发生的现象．例如在标准大气压下，水加热至 100℃必然沸腾；另一类是随机现象或偶然现象．在相同的条件下重复进行某种试验，它可能出现这样、也可能出现那样的试验结果．但究竟出现哪种试验结果，验前无法确定，呈现出偶然性的现象．

例 1.1　掷一枚质地均匀的硬币，可能出现“正面”，也可能出现“反面”，但究竟出现“正面”，还是出现“反面”，验前无法肯定．

例 1.2　同时掷一枚二分和一枚五分两个硬币，可能出现“正、正”，“正、反”，“反、正”，“反、反”等四种不同的试验结果，但在试验之前无法肯定究竟会出现上述四种结果中的哪一个结果．

例 1.3　取 10 粒小麦做发芽试验．试验的结果可能有 10 粒、9 粒、8 粒、……1 粒发芽，也可能一粒都不发芽．在试验之前无法断言究竟有几粒小麦发芽．

上述三个例子中所遇到的现象都是所谓的随机现象．即试验的结果受很多偶然因素的影响，呈现出随机性、偶然性；另方面，人们在大量重复试验中还是可以发现其统计规律的，还存在着必然性的一面．

概率论是专门研究随机现象统计规律性的数学分支．

今后，我们把对自然现象进行一次观察或进行一次科学试验，统称为试验，记作 E. 为了区分不同的试验可用符号 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 等来表示.

如果一个试验具有以下特征：

①在一组不变的条件下，试验可以重复进行多次；

②每次试验的结果不尽相同，验前无法肯定出现哪个结果；

③所有可能的试验结果事前可以明确知道.

具有上述三个特征的试验通常叫随机试验，简称为试验.

随机试验总是有各种不同的试验结果. 我们把随机试验 E 的每个可能出现的结果叫做随机事件，简称为事件. 通常用字母 A、B、C 等来表示，又把不可能再分的事件叫基本事件或样本点，记作 ω 或 $\omega_1, \omega_2, \cdots$；由若干基本事件组合而成的事件叫做复合事件. 对于复合事件 A，在一定的条件下，事件 A 发生，是指 A 所包含的某一基本事件发生；反之，若 A 所包含的某一基本事件发生，则称 A发生.

所有基本事件或样本点构成的集合叫样本空间，记作 Ω.

如果用 E_1 表示例 1.2 中同时掷两枚硬币的试验，用 ω_{11}, ω_{10}分别表示二分硬币出现正面和反面的试验结果，而用 ω_{21}, ω_{20}分别表示五分硬币出现正面和反面的试验结果，则样本空间

$$\Omega=\{(\omega_{10},\omega_{20}),(\omega_{10},\omega_{21}),(\omega_{11},\omega_{20}),(\omega_{11},\omega_{21})\}$$

其中$(\omega_{1i},\omega_{2j})$ $(i,j=0,1)$为基本事件或样本点；若用 A 表示“两枚硬币出现一正、一反”的事件，则 $A=\{(\omega_{10},\omega_{21}),(\omega_{11},\omega_{20})\}$是样本空间 Ω 的一个子集，它是一个复合事件.

若用 E_2 表示例 1.3 中的小麦发芽试验，以 ω_i 表示 10 粒小麦中恰有 i 粒发芽的试验结果($i=0,1,2,\cdots,10$)，则样本空间

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$$

其中每个 $\omega_i(i=0,1,2,\cdots 10)$为基本事件或样本点. 用 A 表示“10 粒小麦中发芽粒数大于 5”的事件，则 $A=\{\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$是样本空间 Ω 的一个子集，它也是一个复合事件.

在随机试验规定的条件下，必然出现的事件叫必然事件，而必然不出现的事件叫不可能事件. 必然事件是由所有可能的基本事件构成的事件，记作 Ω. 不可能事件是不包含任何基本事件的事件，记作 Φ.

必然事件与不可能事件已不具有随机性. 为方便计，仍把它们视为随机事件，是随机事件的两个极端情况.

二、事件间的关系及其运算

在同一个试验 E 中，诸随机事件间往往是互相联系的，建立随机事件间的关系及其基本运算，研究复杂事件是由哪些基本事件构成的，以便计算它们发生的可能性.

比如，在检查园柱形产品时，规定产品的长度合格，且直径合格时才算合格. 这时就会遇到“产品合格”、“产品不合格”、“长度合格”、“长度不合格”、“直径合格而长度不合格”、“长度合格而直径不合格”等事件，显然其间存在着某种联系.

下面讨论事件间的几种主要关系

设随机试验 E 的样本空间为 Ω；$A, B, A_i(i=1,2,\cdots)$ 为 E 的随机事件.

1)包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$，或 $B\supset A$. 此时也称事件 A 是事件 B 的子事件，如图 1－1 所示. 比如，在检查园柱形产品的质量时，用 A 表示“直径不合格”，用 B 表示“产品不合格”，显然有 $A\subset B$.

还规定，对任何事件 A，恒有 $\Phi\subset A\subset\Omega$.

事件间的包含关系具有传递性，即若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$.

若事件 B 包含事件 A，同时事件 A 也包含事件 B，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$. 则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

2)事件的和

事件 A 与事件 B 至少发生其一的事件，叫做 A 与 B 的和事件(或并)，记作 $A\cup B$，(如图 1－2). 若用 A 表示“长度不合格”的

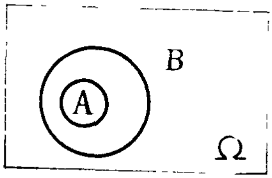


图 1—1

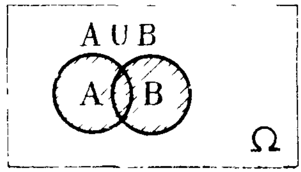


图 1—2

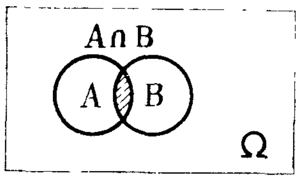


图 1—3

事件，用 B 表示“直径不合格”的事件，则“产品不合格”正好是事件 A 与事件 B 的和事件，即 $A\cup B=\{$产品不合格$\}$

类似地，可以定义“$A_1,A_2,\cdots A_n$ 至少发生其一”的事件 A 为 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 的和（或并），记作

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

上述定义还可以推广到可列多个事件的情形，即 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$ 至少发生其一的事件.

3）事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，叫做 A 与 B 的**积事件**，记作 $A\cap B$（或 AB）（如图 1—3）. 比如在检查园柱形产品的质量时，用 A 表示“长度合格”，用 B 表示“直径合格”的事件，则“产品合格”恰好是 A 与 B 的积事件，即

$$A\cap B=\{\text{产品合格}\}$$

类似地，积事件的概念也可以推广到有限多个或可列多个事

件的情形,即事件

$A=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示事件 A_1、A_2,$\cdots A_n$ 同时发生的事件,而事件

$A=\bigcap_{i=1}A_i$ 表示事件 $A_1,A_2,\cdots A_n\cdots$ 同时发生的事件.

若事件 A 与事件 B 的积事件为不可能事件,即 $A\cap B=\Phi$,则称事件 A 与事件 B **互斥**(或叫**互不相容**)(如图 1—4 所示)

对于互斥事件的和事件 $A\cup B$,记作 $A+B$.

若事件组 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中任意两个均互斥(即当 $i\neq j$ 时,$A_i\cap A_j=\Phi$),则称该事件组**两两互斥**.

对于两两互斥的事件组 $A_1,A_2,\cdots A_n\cdots$,的和事件,记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$

若事件 A 与事件 B 的和事件为必然事件,而 A 与 B 的积事件为不可能事件,即 $A\cup B=\Omega$,$A\cap B=\Phi$,则称事件 A 与事件 B

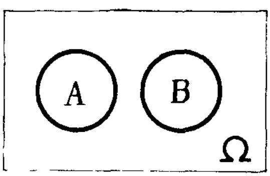


图 1—4

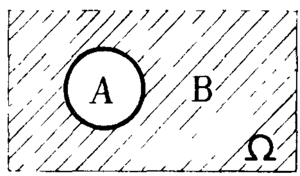


图 1—5

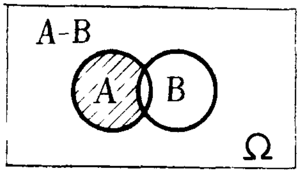


图 1—6

为对立事件(或互逆事件)(如图 1—5 所示). 通常把事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$. 比如"直径合格"与"直径不合格"为对立事件.

值得注意的是:对立事件一定互斥,反之未必.

4)事件的差

事件 A 发生,而事件 B 不发生的事件,叫做 A 与 B 的差事件,记作 $A-B$(如图 1—6)

比如"直径合格而长度不合格"这个事件,是"直径合格"与"长度合格"两个事件的差事件.

显然有 $A-B=A\cap\overline{B}$, $\overline{A}=\Omega-A$.

因为任何一个事件都可用样本空间 Ω 的某个子集来表示. 如果把随机事件间的关系及其运算与集合间的关系及其运算相比较,不难发现它们是一致的. 所以关于集合论的一些术语、记号、运算均可用来描述随机事件间的关系和运算,并得到事件间的运算应满足的规律

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(3) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(4) 对偶公式 $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$, $(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}$

$(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$ $(\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i})=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$

通常称(4)为 De—Morgan 定律.

例 1.4 向指定目标打三枪. 以 A_1,A_2,A_3 分别表示事件:"第一枪击中目标"和"第二枪击中目标"、"第三枪击中目标",试用 A_1,A_2,A_3 表达以下各事件:

①只击中第一枪;

②只击中一枪;

③三枪均未击中目标;

④至少击中一枪；

解 ①“只击中第一枪”的事件表明，除第一枪命中目标（即 A_1 发生）外，其余两枪（第二枪和第三枪）均未中的（即 $\overline{A}_2$、$\overline{A}_3$ 同时发生）. 所以该事件就是 $A_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 的积事件：$A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$.

②“只击中一枪”没有指明究竟是第几枪击中目标，可能第一枪击中、也可能是第二枪，或第三枪击中，所以它应该是 $A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$、$\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3$ 与 $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$ 的和事件，即

$$A_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3+\overline{A}_1\cap A_2\cap\overline{A}_3+\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap A_3$$

③“三枪均未击中目标”则应该是 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 的积事件：$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$.

④“至少击中一枪”，显然是事件 A_1,A_2,A_3 的和事件，即

$$A_1\cup A_2\cup A_3.$$

“至少击中一枪”应该是“三枪均未中的”的对立事件，所以，它也可表示为：

$$\overline{(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)}=A_1\cup A_2\cup A_3$$

三、随机事件的概率

随机事件有其偶然性的一面. 在一次试验中可能出现，也可能不出现；但在大量重复试验中人们还是可以发现其总体规律性的，即它还存在着必然性的一面. 也就是说，随机事件出现的可能性的大小是可以度量的. 随机事件的概率正是用来度量随机事件出现的可能性大小的一个量. 它是概率论中最基本的概念之一.

(1)概率的统计定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的**频率**. 记作 $\omega(A)$，即

$$\omega(A)=\frac{m}{n}$$

显然，对任何事件 A，在 n 次重复试验中发生的频率 $\omega(A)$，总是一个介于 0 与 1 之间的数，即 $0\leqslant\omega(A)\leqslant 1$，且

$$\omega(\Omega)=1 \qquad \omega(\Phi)=0$$

经验表明：在大量重复试验中，随机事件 A 发生的频率具有一定的稳定性．即当试验次数 n 充分大时，随机事件 A 出现的频率总在一个介于 0 与 1 间的常数 p 附近摆动．

历史上曾有不少统计学家做过大量的投掷硬币的试验，其结果在表 1—1 中给出：

表 1—1

试验者	试验次数 n	正面出现的频数 m	频率 $\frac{m}{n}$
底摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表中可以看出，试验次数 n 越大，出现正面的频率越接近 0.5，即频率稳定于 $\frac{1}{2}$．

经验还表明：只要试验是在相同的条件下进行的，则随机事件出现的频率稳定性中的常数 p 就随之确定．这是事件本身的一种属性，不依人的意志而转移．而这种属性正是我们可以对随机事件出现的可能性的大小进行度量的客观基础．所以，在一般情况下，我们可以这样引进概率的定义：

若随着试验次数 n 的不断增大，事件 A 出现的频率 $\frac{m}{n}$ 在某一个确定的常数 p 附近摆动 $(0\leqslant p\leqslant 1)$．则定义事件 A 的**概率**为

$$P(A)=p$$

通常把概率的这种定义，称为概率的统计定义．

由概率的统计定义，可得到概率的性质：

（1）　对任一事件 A，恒有　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2) $P(\Omega)=1 \qquad P(\Phi)=0$

(3) 对于两两互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

这是由于 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互斥，所以事件 $A,A_1,A_2,\cdots A_n$ 出现的频率$\frac{m}{n},\frac{m_1}{n},\frac{m_2}{n},\cdots,\frac{m_n}{n}$(其中 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n$)满足等式

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\cdots+\frac{m_n}{n}$$

因而，相应的概率应该满足

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(2)概率的公理化定义

概率的统计定义虽然简单而且直观，但从数学角度看却不严密. 因为统计定义的依据是"随着试验次数 n 不断增大时，频率所呈现的稳定性". 但究竟 n 应该大到什么程度，以及频率稳定性中所谓"在某个确定的常数 p 附近摆动"该如何理解均没有明确的规定. 为了克服上述缺点，使以后有关推论有所依据，我们准备以概率的统计定义为背景，给出概率的公理化定义：

公理 1 对任一随机事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

公理 2 $P(\Omega)=1$

公理 3 对于两两互斥的可列多个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

通常称上式为**可列可加性**.

于是我们可以概括出概率的公理化定义：

定义 设实值集合函数 $P(A)$ 的定义域是样本空间 Ω 的所有随机事件组成的集合，且满足公理 1、2、3，则称函数 $P(A)$ 为**事件 A 的概率**.

在三条公理的基础上，可以推得概率的如下性质：