

高等院校力学教材

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

上海市教育委员会 组编

理论力学

陈立群 戈新生 徐凯宇 薛纭 编著

清华大学出版社

高等院校力学教材

上海市教育委员会高校重点教材建设项目

上海市教育委员会 组编

理论力学

陈立群 戈新生 徐凯宇 薛纭 编著

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

作为理论力学教材,本书参照最新的课程基本要求编写。全书除绪论外分10章,依次为力和约束、力系的简化、平衡问题——矢量方法、点的运动和刚体基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动、质点动力学、质点系动力学——矢量方法、平衡问题——能量方法、质点系动力学——能量方法。本书精选了例题,并附有解题指导和习题,另配有全部习题的详细解答供教师参考。

本书可作为教学—研究型高校和教学型高校的机械、土建、水利、航空、动力等专业学生的多学时理论力学课程教材。略去带星号章节后,也可用作其他专业中、少学时理论力学课程的教材。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/陈立群等编著. —北京:清华大学出版社,2006.3

(高等院校力学教材)

ISBN 7-302-12303-9

I. 理… II. 陈… III. 理论力学—高等学校—教材 IV. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 159319 号

出版者:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社总机:010-62770175

地 址:北京清华大学学研大厦

邮 编:100084

客户服务:010-62776969

组稿编辑:杨倩

文稿编辑:赵从棉

印刷者:北京市清华园胶印厂

装订者:三河市春园印刷有限公司

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:170×230 印张:15.5 字数:319千字

版 次:2006年3月第1版 2006年3月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-12303-9/O·510

印 数:1~3080

定 价:23.00元

前 言

理论力学是高等理工科院校普遍开设的一门技术基础课,是后续力学课程和其他相关专业课程的基础。在中国高等教育的改革与发展中,学校的层次和类型不断增加,不同学校和专业对理论力学课程提出了不同的要求,理论力学课程的学时也有所减少。同时,随着高等教育的普及化和高校的扩招,学生的情况也发生了变化。为满足这些变化所产生的对教材的新的需求特编写了本书。本书可作为教学—研究型高校和教学型高校的机械、土建、水利、航空、动力等专业学生的多学时理论力学课程教材。略去带星号章节后,也可用作其他专业中、少学时理论力学课程的教材。

作为理论力学教材,本书参照最新的课程基本要求编写。全书除绪论外共分10章,依次为力和约束、力系的简化、平衡问题——矢量方法、点的运动和刚体基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动、质点动力学、质点系动力学——矢量方法、平衡问题——能量方法、质点系动力学——能量方法。

在编写过程中,我们试图用现代和实用的观点,阐述理论力学的核心内容和方法。既要大体保持本门课程基本内容的完整性,又要注意与先修的高等数学、物理课程的衔接及与材料力学、机械原理等后续课程的过渡。尤其是要充分应用先修课的知识,提高本课程起点,同时为后续课程奠定扎实的理论力学基础。在优化教学内容的同时,加强对学生能力的培养,具体包括力学和数学建模能力、数学模型的分析能力、逻辑思维能力等。在具体写法方面,力求概念清晰,论证严谨,叙述简要。

具体来讲,本书具有下列特点。

(1) 体系调整。在静力学和动力学中,突出矢量方法和能量方法两条主线。在运动学中适当加强了解析方法的内容。

(2) 内容精简。例如,扬弃了理论力学传统教材中的静力学公理体系;在叙述静

力学和动力学的能量方法时,没有考虑非定常约束。

(3) 定位明确。本教材的基本使用对象为教学—研究型高校和教学型高校中等程度学生。在例题和习题选择时也考虑了部分学生的考研需要。

(4) 篇幅紧凑。对学有余力的学生,本教材附有“参考文献”和“阅读建议”引导他们自学更深入的内容,也可供教师备课尤其在扩展教学内容时参考。

(5) 教材模块化,以便于不同学时的课程选用。教材内容以多学时课程基本要求为限,在章节安排上,考虑同时便于中、少学时课程使用。

(6) 考虑到本教材对象的实际情况,本教材可独立使用,不依赖任何电子教材,也没有涉及数值方法和使用计算机的解题训练。

本书第1~3章由上海应用技术学院薛纭教授编写,第4~6章由北京信息科技大学(筹)戈新生教授编写,第7,8章和附录由上海大学徐凯宇教授编写,其他部分由上海大学陈立群教授编写,全书由陈立群加工定稿。编写工作得到各方面的支持和鼓励,编写过程中汲取了已出版的国内外相关教材的许多宝贵经验。本书立项过程中承蒙上海交通大学刘延柱教授和洪嘉振教授以及上海大学程昌钧教授热情推荐。书稿承蒙北京理工大学梅凤翔教授和上海交通大学刘延柱教授详细审阅,并提出许多宝贵意见。作者谨表示衷心感谢。

本书受到“上海市教育委员会高校重点教材建设项目”资助,在此鸣谢!

目 录

绪论	1
0.1 理论力学的内容	1
0.2 理论力学发展简史	2
0.3 理论力学的学习方法	4
第 1 章 力和约束	6
1.1 力、力矩和力偶	6
1.2 约束的基本类型	13
1.3 物体的受力分析和受力图	16
习题	19
第 2 章 力系的简化	22
2.1 力系的基本特征量——主矢与主矩	22
2.2 一般力系向某点的简化	24
2.3 平行力系和重心	27
习题	30
第 3 章 平衡问题——矢量方法	33
3.1 力系的平衡方程及其应用	33
3.2 考虑摩擦的平衡问题	42

3.3 平面桁架的静力计算	50
习题	53
第 4 章 点的运动和刚体基本运动	61
4.1 点的运动	61
4.2 刚体的平移	71
4.3 刚体的定轴转动	72
习题	78
第 5 章 点的合成运动	82
5.1 绝对运动、相对运动和牵连运动	82
5.2 速度合成定理	84
5.3 加速度合成定理	88
习题	96
第 6 章 刚体的平面运动	101
6.1 刚体平面运动的描述	101
6.2 平面运动刚体上点的速度	104
6.3* 平面运动刚体上点的加速度	111
习题	118
第 7 章 质点动力学	122
7.1 质点运动的动力学建模	122
7.2 质点运动的动力学分析	125
7.3* 非惯性参考系中的质点运动	135
习题	139
第 8 章 质点系动力学——矢量方法	142
8.1 动量定理和动量矩定理	143
8.2 动力学建模的动静法	160
8.3 碰撞问题	172
习题	178

第 9 章 平衡问题——能量方法	184
9.1 功和势能	185
9.2 虚功原理	189
9.3* 广义坐标表示的虚功原理	193
习题	198
第 10 章 质点系动力学——能量方法	202
10.1 动能和动能定理	203
10.2* 拉格朗日方程	208
10.3 动力学综合应用	214
习题	220
附录 A 常见几种均质物体的转动惯量和回转半径	225
习题答案	228
参考文献	236
阅读建议	237

绪 论

0.1 理论力学的内容

力学是描述和预测固体和流体位置和形状随时间变化的科学。位置和形状的变化也被称为机械运动。位置和形状变化是自然界中最普遍的运动形态,包括大至宇宙,小至基本粒子的运动。更复杂的变化形态,如物理、化学乃至生物活动,也包含位置和形状的变化。同时,位置和形状变化也是工程系统中广泛存在的运动形态。对不同类型位置和形状变化的研究产生了不同的力学分支。力学虽然起源于物理学,但它的内容已经远远超过物理学的内容。由于在工程问题中应用的广泛性,力学在工程技术的推动下按自身逻辑演化,成为一门独立的科学。力学属于技术科学的范畴,是许多工程技术的理论基础,又在广泛的应用过程中不断得到发展。不论是历史较长的土木工程、建筑工程、水利工程、机械工程、船舶工程等,还是后起的航空航天工程、核技术工程、生物医学工程等,都愈来愈多地需要力学的支持,而有些就是在力学理论指导下发展起来的。力学同时也是一门基础科学,阐述的是具有普遍意义的规律。力学的目的是解释和预测自然界和工程系统中的物理现象,并以此作为工程应用的基础。

作为一门力学课程,理论力学涉及力学的最普遍和最基本的概念、定律和定理,是其他各门力学分支的共同基础。同时,理论力学也是相关专业后续课程的基础。为建立与力学有关的各种基本概念和理论,理论力学主要研究质点和质点系的位置随时间的变化。质点是只有质量没有体积的几何点。当所研究对象的运动范围远远超过它本身的几何尺度时,其形状对运动的影响极其微小,可以忽略不计,此时该研

研究对象可以简化为质点。有限或无限个有某种联系质点构成的系统称为质点系。刚体、变形固体、流体等都可以看作质点系。对于那些在运动中变形极小,或虽有变形但不影响其整体运动的系统,可以完全不考虑其变形而认为系统中各个质点间的距离保持不变。这种不变形的质点系称为刚体。由多个刚体组成的系统称为刚体系。理论力学的研究对象包括质点、质点系、刚体和刚体系。

理论力学的特点是要求建立运用理论知识对从实际问题,特别是工程问题中抽象出来的各种力学模型进行分析和计算。所谓力学模型就是对自然界和工程技术中复杂的实际研究对象的合理简化。质点和刚体都是基本的力学模型。实际物体简化为何种力学模型,取决于问题的性质。例如,分析航天器绕地球运行的轨道运动时,由于航天器的尺寸远远小于轨道半径,可以将航天器简化为质点;相应地,研究小卫星编队飞行时,编队飞行的小卫星可以简化为质点系;但在分析航天器以绕质心转动的姿态运动时,需要将航天器简化为刚体;对于带有挠性太阳帆板的航天器,刚体模型仍过于简化,不能正确反映问题的实质,需要引入更复杂的模型。

理论力学的内容由3部分组成:静力学、运动学和动力学。静力学主要分析系统平衡时所有力系应满足的条件,也讨论系统的受力分析,以及力系简化的方法。运动学仅从几何角度分析系统的运动,如轨迹、速度和加速度等,不考虑引起运动的物理原因。动力学分析系统的运动与作用于系统的力系之间的关系。静力学中所涉及的静止和平衡是运动的特殊形态,因此,也可以认为静力学是动力学的一种特殊情形。但由于工程技术的需要,静力学已积累了丰富的内容,成为理论力学相对独立的一个组成部分。

0.2 理论力学发展简史

理论力学的早期发展是作为物理学的主要组成部分。公元前4世纪,中国的墨翟便对力和重心的概念作了初步的解释。古希腊的亚里士多德和阿基米德分别在公元前4世纪和公元前3世纪总结了杠杆原理和浮力原理。在人类对力学认识的不断深化的漫长过程中,16世纪后期伽利略正确地认识了惯性和加速度的概念,提出了运动相对性原理;开普勒分析了大量天文观测数据,在1609年和1619年提出了行星的运动定律;在他们的研究成果的基础上,1687年牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中提出了描述宏观物体运动的基本定律,即万有引力定律和运动三定律。人们在实践活动中对牛顿力学基本原理的无数次检验证实,对于速度远远小于光速和系统作用量(动量 \times 位移或能量 \times 时间)远大于普朗克常数的运动物体,牛顿定律具有高度正确性。18世纪以后,随着工业技术的发展,涌现出大量需要解决的问题,促进了力学的进一步发展。渐渐地,力学得以发展成为一门独立的科学。

在动力学发展的同时,静力学也在相对独立地发展。静力学的发展始终与实际工程问题相关。斯蒂芬 1586 年论证了力合成的平行四边形法则,对力的分解、合成与平衡有了较系统的认识。伐里农在他 1687 年出版的《新力学大纲》中首先对力矩的概念和运算规则作出了科学说明。在 1725 年该书最后版本中,首先使用了“静力学”一词。伐里农在静力学中的重要贡献还有空间任意力系可以简化为主矢和主矩的结论。力系的简化和平衡的系统理论,即静力学理论体系的建立是潘索在 1803 年出版的《静力学原理》中完成的。书中提出了力偶的性质,完善了任意力系简化理论,明确了静力学平衡条件是主矢和主矩为零。

前述静力学的理论体系以矢量为基本研究工具。静力学问题的研究还可以从能量观点进行,其核心结论是虚功原理。虚功原理的基本思想早在 1608 年斯蒂芬研究滑车平衡时就已萌发。17 世纪伽利略研究斜面上重物的平衡时也产生类似的思想。1725 年约翰·伯努利提出虚功原理的一般表述,但没有任何证明。1788 年拉格朗日首先以滑轮系统的研究为基础给出该原理的物理证明,繁复而不严密。1798 年傅里叶给出几何证明,在其中分析了单独的几何约束。1803 年潘索采用傅里叶的方法,对若干有实际背景的约束进行了深入的讨论。1806 年安培给出了虚功原理的证明,在其中定义了理想约束并说明了常见约束均满足该定义。该证明在现在的一些理论力学教材中仍沿用。

就运动学而言,在伽利略提出加速度概念后,1673 年惠更斯考虑了点在曲线运动中的加速度。刚体运动学的一般理论是由欧拉建立的。欧拉在 1765 年出版的《刚体运动理论》中,明确了刚体定点有限转动等价于绕过定点的某一轴的转动,刚体的定点运动可以用 3 个角度描述。1830 年,夏莱证明了刚体一般运动是以刚体上某点为基点的平行移动和相对通过该基点的轴的转动的合成。该结论的平面特例早在 4 世纪被古罗马的帕普斯所知,他的书中证明了平面图形的位移可以分解为平移和转动。1834 年,安培提出“运动学”一词,并建议将运动学作为力学的独立部分。1835 年,科里奥利指出在旋转参考系中存在附加加速度,并于 1843 年给出相关证明。

动力学的发展沿矢量和能量两条路径进行。虽然矢量的概念在后来才正式定义,矢量方法的精神开始于在碰撞问题研究中动量概念的引入。1644 年,笛卡儿引入了动量概念,虽然他不理解动量的矢量性质。1677 年,马略特利用前人的碰撞实验证明了动量守恒定律。1687 年,牛顿发表的《自然哲学的数学原理》标志着对单自由质点而言的动力学矢量方法的完成。18 世纪,随着机器生产的迅猛发展,要求对构成机械系统的受约束质点系和刚体进行动力学分析。达朗贝尔考虑受约束质点的运动,在 1743 年出版的《动力学》中,他首先区分了外力和内力,而内力可以互相抵消,因此有效力静态地等于外力,该结论被称为达朗贝尔原理。该原理将约束归结为力的作用而提供了解决受约束质点系动力学问题的一般方法。1758 年,欧拉建立刚体的动力学方程,将矢量方法应用于刚体动力学。

动力学的能量方法始于 1669 年惠更斯在研究碰撞问题时引入活力的概念并得到活力(动能的两倍)守恒。1686 年,莱布尼兹建立动能定理的雏形,导出活力变化与力按距离作用的关系。1807 年,杨首先使用了“能量”一词。动能定理的现代形式是在 19 世纪 20 年代由科里奥利明确引入功的概念后才建立的。动力学发展的里程碑是拉格朗日的《分析力学》(1788 年初版),其中总结了从能量观点对受约束质点系运动的研究成果。他引进了可完全描述系统运动状态的广义坐标,并建立了用系统动能表示的动力学方程,现在称为拉格朗日方程。拉格朗日工作的特点是引进标量形式的广义坐标、能量和功,完全摆脱了以矢量为特征的几何方法。应用拉格朗日方程于受约束机械系统可以避免系统内理想约束力的出现,在很大程度上克服了矢量方法面临的运动方程中出现大量未知约束力的困难。

19 世纪以后,特别是 20 世纪以来,动力学沿着矢量和能量路径继续发展,但这些内容已经超出理论力学课程的范围。对力学史感兴趣的读者可参见有关专著。

理论力学的发展简史表明,相关力学的研究起源于观测和实验,在发展过程中与数学同步发展,将物理理论系统地表达为数学抽象的简洁形式。理论力学的发展也与工程技术的需求密切相关。

0.3 理论力学的学习方法

理论力学课程讨论物理现象,具有物理科学的特点;理论力学又与数学中的矢量运算、微积分、线性代数和微分方程关系密切;同时也是工程专业后续课的基础。理论力学的基础是物理中的力学部分,因此课程不依赖经验和独立观测。由于系统完整,逻辑严谨,演绎严密,理论力学在一定程度上具有数学课程的特点。同时,理论力学又不是抽象的纯理论学科,而是应用学科。事实上,对多数工科学生而言,理论力学是从纯数理学科过渡到专业课程过程中需要学习的与工程技术有关的第一门力学课程。

基于理论力学的上述特点,学习该课程时应注意下列问题。首先,理论力学系统性强,各部分联系紧密。学习时应循序渐进,及时解决不清楚的问题,以免影响后面内容的理解。其次,要积极思考,善于发现问题并及时解决。注意各章的主要内容和重点,做到主次分明。注意各相关章节间内容和方法上的区别和联系。注意有关公式推导的根据和关键,弄清公式的物理意义及其应用条件和范围。注意有关概念的来源、含义和用途。再次,培养分析和解决问题的能力。要特别注重从工程实际中抽象出力学问题,应用理论力学知识对提炼出的力学问题进行数学描述,并求解相应的数学问题。在分析中,既要作定性的分析,又要作定量的计算。最后,做习题是运用理论解决问题的基本训练。做题前应复习有关内容,以达到应有效果。要注意例题

的分析方法和解题步骤,力求从中受到启发,但不能机械地生搬硬套。做题时如果发现有的内容还没有透彻理解,应该再次复习。推导和计算要一丝不苟,数值计算结果要有恰当的有效数字。这样,通过习题就可以较深入地理解和掌握基本概念和基本理论。

如上所述,求解习题是理论力学学习的重要内容。同时,理论力学的习题求解也被大多数学生认为是难点。这里再进一步叙述理论力学学习题求解的一般过程。第一,明确研究对象。把所研究的系统从所在的环境中分离出来。在静力学和动力学中,需要画受力图以明确系统受力情况。第二,用数学公式表达描述研究对象特性的物理或几何关系。在静力学中,主要是平衡方程。在运动学中,是运动质点或刚体的运动方程。在动力学中,是动力学方程的矢量或能量表达。用不同的方法可能导出形式不同的数学公式,它们将导致相同的结果,但求解难易程度可能存在差别。第三,求解数学方程。静力学中主要是线性代数方程组,偶尔也涉及非线性代数方程。运动学包括求导运算和矢量方程的求解。动力学中可能涉及代数方程,也可能涉及微分方程,这些方程可能是线性的也可能是非线性的。最后,分析结果的物理意义及合理性。如果所得到的结果不合理,需要重新核对前面3个步骤。总之,一旦将问题清楚地表述,必须严格依据理论力学中的相关原理和公式进行分析,进而得到问题的解答,在此过程中不需要任何个人直觉和想像力。当然,校核答案时需要常识和个人经验。

只要方法适当,经过不懈的努力,学生完全可以达到理论力学课程的要求:准确理解基本概念,熟悉基本定理和公式并能灵活运用,了解一些力学研究和应用的基本方法。

第 1 章

力和约束

普通物理学已经包括力学的基本知识。在此基础上,本章将从矢量运算的角度讨论力的合成与分解,引入描述力的转动效应的力矩,并讨论一种不能再简化的力系——力偶。工程问题的特点是所研究对象一般都受到约束。约束可以理解为周围物体对系统的力作用,也可以理解为周围物体对系统运动的限制。本章从前一观点分析约束,关于用能量方法分析平衡问题的第 9 章将从后一观点分析约束。基于约束的特性,可以进行受力分析,即确定所研究物体受到各个力的作用位置和方向。

力和约束的知识,不仅是静力学中力系简化和平衡问题分析的基础,也是动力学问题研究的前提,还是后续课程中相关力学计算的必要准备。

本章首先介绍力、力矩和力偶的概念和相关计算,包括力的投影、力系的分类、汇交力合成的基本法则、汇交力系的合成、力对点和轴的矩及其关系、力偶的概念、力偶系的合成。然后讨论工程中常见几类约束的约束力特性。最后阐述受约束系统的受力分析和受力图的绘制。

1.1 力、力矩和力偶

1. 力和力系

力是物体间的相互机械作用,这种作用能使物体的运动状态和形状发生改变。

所谓机械作用是指物体间的接触或场(例如重力场)的作用。力对物体的作用效果取决于力的三要素,即力的大小、方向和力的作用点。力的大小即物体之间机械作用的强度。在我国法定采用的国际单位制中,力的计量单位是牛顿,记为 N($1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$)。力的方向即物体之间机械作用的方向。力的作用点即物体之间机械作用的部位。显然,物体之间的接触都不可能是点接触,因此,力作用的区域抽象为点是一种简化,此时称为集中力。当不能这样简化时,就称为分布力。如果力是在空间分布的,称为体积力,如重力;如果力是沿面分布的,称为面积力,如接触力。沿线的分布力也是一种力学简化。分布力的强度称为载荷集度,用字母 q 表示,它是单位体积(或单位面积、单位长度)上的作用力。

由于力的三要素以及同一作用点的两个力的加法遵循后面将叙述的平行四边形法则,因此,力是矢量。几何上可以表示为带箭头按比例的有向线段,用黑体字母 \mathbf{F} 表示。矢量可以用相对于某个坐标系的投影表示。以力的作用点 O 为原点建立直角坐标系 $Oxyz$,沿各坐标轴方向的单位矢量称为此坐标系的基矢量,用 i, j 和 k 表示。力矢量 \mathbf{F} 与 $Oxyz$ 各坐标轴的夹角依次为 α, β 和 γ ,称为方向角,如图 1.1 所示。则力 \mathbf{F} 在各轴上的投影 F_x, F_y 和 F_z 可以表示为

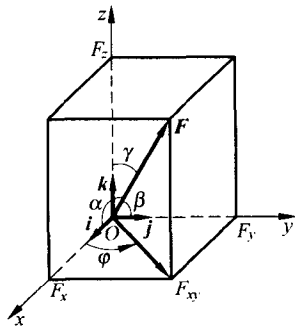


图 1.1 力在空间的表示

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \cos \alpha, \quad F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = F \cos \beta, \quad F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = F \cos \gamma \quad (1.1.1)$$

其中 F 为力矢量的模, $F = |\mathbf{F}|$, 即力的大小, 角 α, β 和 γ 的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为方向余弦。力矢量 \mathbf{F} 可以表示成

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (1.1.2)$$

式中 $F_x \mathbf{i}, F_y \mathbf{j}$ 和 $F_z \mathbf{k}$ 也分别称为力 \mathbf{F} 沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的分量。

几何上 F_x, F_y 和 F_z 等于以力矢量 \mathbf{F} 为对角线的平行正六面体的 3 条棱的边长。式(1.1.1)给出了已知力的大小和 3 个方向角计算力的投影的计算公式。反过来,也可以根据力的 3 个投影来计算力的大小和方向,即

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (1.1.3)$$

将式(1.1.1)代入式(1.1.3)前一式,等式两边平方后约去 F , 导出方向余弦间关系

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.1.4)$$

这表明 3 个方向角中只有 2 个是独立的。确定力在空间的方位只需 2 个坐标, 如用 φ 和 γ 表示, φ 是力在平面 Oxy 内的分量与 x 轴的夹角, 如图 1.1 所示。此时, 力在 3 个坐标轴上的投影为

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = F \sin \gamma \cos \varphi, \quad F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = F \sin \gamma \sin \varphi, \quad F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = F \cos \gamma \quad (1.1.5)$$

这种计算力的投影的方法称为二次投影。

物体受到的作用力往往不止一个而是一群,这一群力称为力系。按力的作用线是否在同一平面内可分为空间力系和平面力系,按力的作用线是否相交于一点又可分为汇交力系和一般力系,力作用线互相平行的力系称为平行力系。若一力与一力系对物体的作用效果相同,则称这个力是该力系的合力,而力系中的各个力是这个力的分力。计算力系合力的过程称为力的合成。

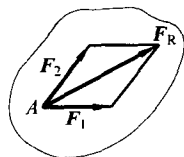
汇交力合成所遵循的基本规律为平行四边形法则。作用于同一点的两个力可以合成一个力,合力也作用于这一点,合力的大小和方向由以表示两力的有向线段为边所构成的平行四边形的对角线确定。

设作用于物体上同一点 A 的两个力为 F_1 和 F_2 , 则合力 F_R 用矢量式表示为

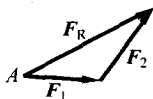
$$F_R = F_1 + F_2 \quad (1.1.6)$$

如图 1.2(a) 所示。由于合力将平行四边形分成两个全等的三角形,因此,求合力无需作出平行四边形,只需作出力的三角形即可,这种方法称为力的三角形法则,如图 1.2(b) 所示。这一力的合成方法可以推广到汇交力系。设在物体的 A 点作用有 4 个力组成的汇交力系 F_1, \dots, F_4 , 按力的可传性原理将这些力的作用点都沿作用线移到 A 点。不失一般性,按自然数顺序用力的三角形法则计算合力:

$$F_{R1} = F_1 + F_2, F_{R2} = F_{R1} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3, F_R = F_{R2} + F_4 = F_1 + F_2 + \dots + F_4 \quad (1.1.7)$$



(a) 力的平行四边形法则



(b) 力的三角形法则

图 1.2 两力合成

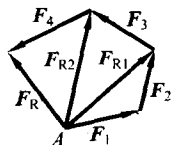
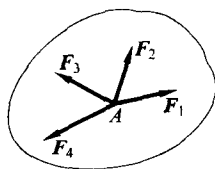


图 1.3 汇交力系的合成:力的多边形法则

图 1.3 表明,计算 F_{R1} 和 F_{R2} 的中间过程可以省略,只需将诸力矢量首尾相连,从第一个力的起点(汇交点 A)向最后一个力的终点作出的矢量就是该汇交力系的合力 F_R 。这一方法对任意有限个力 $F_i (i=1, 2, \dots, n)$ 组成的汇交力系都成立,这种求合力的方法称为力的多边形法则,用矢量式表示为

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (1.1.8)$$

将汇交力系中各力表示成如式(1.1.2)的形式

$$F_i = F_{xi}i + F_{yj}j + F_{zk}k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.9)$$

代入式(1.1.8),按基矢量提取公因子,化作

$$\mathbf{F}_R = \left(\sum_{i=1}^n F_{xi} \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^n F_{yi} \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^n F_{zi} \right) \mathbf{k} \quad (1.1.10)$$

基矢量 \mathbf{i}, \mathbf{j} 和 \mathbf{k} 前的系数即为合力的投影, 即

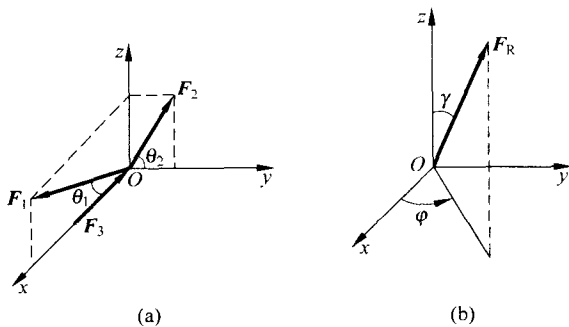
$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{xi}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{yi}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^n F_{zi} \quad (1.1.11)$$

由此可知, 合力在任一轴上的投影等于分力在同一轴上投影的代数和, 此结论称为合力投影定理。合力的大小 F_R 及其方向余弦 $\cos\alpha_R, \cos\beta_R$ 和 $\cos\gamma_R$ 分别为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}; \quad \cos\alpha_R = \frac{F_{Rx}}{F_R}, \quad \cos\beta_R = \frac{F_{Ry}}{F_R}, \quad \cos\gamma_R = \frac{F_{Rz}}{F_R} \quad (1.1.12)$$

这种求合力的方法称为解析法。

例 1.1.1 某物体的 O 点作用有空间汇交力系。 $F_1 = 400\text{N}, F_2 = 200\text{N}, F_3 = 100\text{N}, \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ$, 如图(a)所示。用解析法计算其合力。



例 1.1.1 图

解 由合力投影定理, 合力在坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} F_{Rx} = F_1 \cos\theta_1 - F_3 = 246.4\text{N} \\ F_{Ry} = F_2 \cos\theta_2 = 100\text{N} \\ F_{Rz} = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 = 373.2\text{N} \end{cases}$$

合力的大小和方向分别为(如图(b)所示)

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = 458.2\text{N}$$

$$\gamma = \arccos \frac{F_{Rz}}{F_R} = 35.5^\circ, \quad \varphi = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = 22.1^\circ$$

2. 力矩

普通物理学课程已经说明, 力使物体绕轴转动的效应由力矩来度量。在工程中还存在物体绕一点转动的现象, 如陀螺或汽车的操纵杆等, 因此需要在更一般的意义