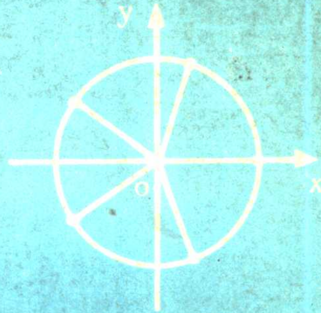
全日制十年制学校高中课本




# 数学习题解答

第三册

戴再平

黑龙江科学技术出版社

全日制十年制学校高中课本

# 数学习题解答

## 第三册

戴再平

黑龙江科学技术出版社

一九八一年·哈尔滨

全日制十年制学校高中课本
数学习题解答
第三册
戴再平
黑龙江科学技术出版社出版
(哈尔滨市南岗区分部街28号)
黑龙江新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 7 4/16 · 字数 150,000
1981年8月第1版　1981年8月第一次印刷
印数 1—152,000
书号：13217·015　　定价：0.63元
(内部发行)

# 出 版 说 明

我们组织编写的《全日制十年制学校高中课本·数学习题解答》，共分四册，分别解答《全日制十年制学校高中课本·数学》一至四册中的全部“习题”与“复习题”。本书是其中的第三册。

为了更好地帮助教师进行教学研究，提高教学质量，我们在组织编写本书时，注意了以下三点：

一、各题的解答，均严格地以课本中相应的基础知识为依据，个别题的思考方法或依据的基础知识，如未见于课本，则作了说明。

二、凡经判断确系课本原题中的错误或多余条件，都加※号作了改正或说明。

三、遇有一题有多种主要的解法，都一一列出。本书主要供中学数学教师在教学中参考。使用全日制十年制学校高中数学课本的业余中学、职业中学、广播函授中学、部队文化学校、技工学校的数学教师，亦可参考使用。

# 目　　录

# 习　题　一

1．写出下列行列式的展开式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 2 & \log_b a \end{vmatrix}$.

**解**　(1) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix}=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$=\sin(x-y)$.

(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}=(x-1)\ (x^2+x+1)-x^3=-1$

(3) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-1-1=-2$.

(4) $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 2 & \log_b a \end{vmatrix}=\log_a b\cdot\log_b a-2=1-2=-1$.

2．求证：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$;

(5) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

**证明** (1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$,

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

$-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -(a_2b_1 - a_1b_2) = a_1b_2 - a_2b_1$,

$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1)$,

$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1)$,

$\therefore \quad \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = ka_1a_2 - ka_1a_2 = 0$.

(5) $\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + kb_1)b_2 - (a_2 + kb_2)b_1$

$= a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

3. 用行列式解方程组：

(1) $\begin{cases} 13x - 7y - 10 = 0, \\ 19x + 15y - 2 = 0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 5, \\ \dfrac{2}{s} - \dfrac{3}{t} = 0. \end{cases}$

**解** (1) 先将方程组化为一般形式 $\begin{cases} 13x - 7y = 10, \\ 19x + 15y = 2. \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 19 & 15 \end{vmatrix} = 13 \times 15 - 19(-7) = 328$,

$D_x = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} = 10 \times 15 - 2(-7) = 164$,

$$D_y=\begin{vmatrix}13 & 10\\ 19 & 2\end{vmatrix}=13\times2-19\times10=-164,$$

$$\therefore\quad x=\frac{D_x}{D}=\frac{164}{328}=\frac{1}{2},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-164}{328}=-\frac{1}{2},$$

故方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\ y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

(2) 设$\dfrac{1}{s}=u,\dfrac{1}{t}=v$,则原方程化为$\begin{cases}u+v=5,\\ 2u-3v=0.\end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5,D_u=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-15,$$

$$D_v=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-10,$$

$$\therefore\quad u=\frac{-15}{-5}=3,\quad v=\frac{-10}{-5}=2$$

从而得　$s=\dfrac{1}{3},\quad t=\dfrac{1}{2},$

故方程组的解为$\begin{cases}s=\dfrac{1}{3},\\ t=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

4. 用行列式解关于$x$, $y$的方程组:

(1) $\begin{cases}x\cos A-y\sin A=\cos B,\\ x\sin A+y\cos A=\sin B;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} x\cos A + y\sin A = \sin A, \\ x\sin A + y\cos A = -\cos A, \end{cases}$ $\left(A \neq \dfrac{2k+1}{4}\pi, k\text{为整数}\right)$.

**解** (1) $D = \begin{vmatrix} \cos A & -\sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix} = \cos^2 A + \sin^2 A = 1$,

$$D_x = \begin{vmatrix} \cos B & -\sin A \\ \sin B & \cos A \end{vmatrix} = \cos B\cos A + \sin B\sin A$$

$= \cos(B-A)$,

$$D_y = \begin{vmatrix} \cos A & \cos B \\ \sin A & \sin B \end{vmatrix} = \cos A\sin B - \sin A\cos B$$

$= \sin(B-A)$.

$\therefore \quad x = \dfrac{\cos(B-A)}{1} = \cos(B-A)$,

$y = \dfrac{\sin(B-A)}{1} = \sin(B-A)$.

故方程组的解为$\begin{cases} x = \cos(B-A), \\ y = \sin(B-A). \end{cases}$

(2) $D = \begin{vmatrix} \cos A & \sin A \\ \sin A & \cos A \end{vmatrix} = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos 2A$

$\because \quad A \neq \dfrac{2k+1}{4}\pi, \quad \therefore \quad 2A \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

从而 $\quad D = \cos 2A \neq 0$,

$$D_x = \begin{vmatrix} \sin A & \sin A \\ -\cos A & \cos A \end{vmatrix} = \sin A\cos A + \sin A\cos A$$

$= \sin 2A$,

$$D_y=\begin{vmatrix}\cos A & -\sin A\\ \sin A & -\cos A\end{vmatrix}=-\cos^2A-\sin^2A=-1,$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sin 2A}{\cos 2A}=\operatorname{tg}2A,\ y=\frac{-1}{\cos 2A}=-\sec 2A.$$

故方程组的解为$\begin{cases}x=\operatorname{tg}2A,\\ y=-\sec 2A.\end{cases}$

5. 判断 $m$ 取什么值时，下列方程组有唯一解：

(1) $\begin{cases}(m^2-1)x-(m+1)y=m+1,\\ m^2x-(m+1)y=m-1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x-(m^2-5)y=-1,\\ (m+1)x-(m+1)^2y=1.\end{cases}$

**解** (1) $D=\begin{vmatrix}m^2-1 & -(m+1)\\ m^2 & -(m+1)\end{vmatrix}$

$$=-(m^2-1)(m+1)+m^2(m+1)=m+1\neq 0,$$

故 $m\neq -1$ 时方程组有唯一解.

(2) $D=\begin{vmatrix}1 & -(m^2-5)\\ m+1 & -(m+1)^2\end{vmatrix}$

$$=-(m+1)^2+(m+1)(m^2-5)$$

$$=(m+1)(m+2)(m-3)\neq 0$$

故 $m\neq -1$，且 $m\neq -2$，$m\neq 3$ 时方程组有唯一解.

6. 解下列关于 $x,y$ 的方程组：

(1) $\begin{cases}ax+(2a-1)y=a^2+2a-1,\\ x+ay=2a;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}mx+y=-1,\\ 3mx-my=2m+3.\end{cases}$

**解** (1) $D=\begin{vmatrix} a & 2a-1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-(2a-1)=(a-1)^2$,

$$D_x=\begin{vmatrix} a^2+2a-1 & 2a-1 \\ 2a & a \end{vmatrix}$$
$$=a(a^2+2a-1)-2a(2a-1)=a(a-1)^2,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & a^2+2a-1 \\ 1 & 2a \end{vmatrix}$$
$$=2a^2-(a^2+2a-1)=(a-1)^2.$$

当 $a\neq1$ 时，方程组有唯一解$\begin{cases} x=a, \\ y=1; \end{cases}$

当 $a=1$ 时，$D=D_x=D_y=0$，方程组有无穷多解，表为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=2-t, \end{cases} \quad (t\text{ 可取任意值}).$$

(2) $D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 3m & -m \end{vmatrix}=-m^2-3m=-m(m+3)$,

$$D_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2m+3 & -m \end{vmatrix}=m-(2m+3)=-(m+3),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3m & 2m+3 \end{vmatrix}=m(2m+3)+3m=2m(m+3).$$

当 $m\neq0$ 且 $m\neq-3$ 时，方程组有唯一解$\begin{cases} x=\dfrac{1}{m}, \\ y=-2; \end{cases}$

当 $m=0$ 时，$D=0, D_x\neq0$，方程组无解；

当 $m=-3$ 时，$D=D_x=D_y=0$，方程组有无穷多解，

$$\text{表为}\begin{cases}x=t,\\ y=3t-1,\end{cases}\quad (t\text{可取任意值})。$$

7. 已知方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}\quad (a_2b_2c_2\neq 0),$$

求证：

(1) 在$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$时，方程组有唯一解；

(2) 在$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$时，方程组无解；

(3) 在$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$时，方程组有无穷多解。

**证明** (1) 由$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，得 $a_1b_2\neq a_2b_1$，

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

故方程组有唯一解。

(2) 由$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$，得 $a_1b_2=a_2b_1$, $b_1c_2\neq b_2c_1$,

$$D=0, D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=b_2c_1-b_1c_2\neq 0,$$

故方程组无解。

(3) 由$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，得 $a_1b_2=a_2b_1$，$b_1c_2=b_2c_1$，

$a_1c_2=a_2c_1$，$D=D_x=0$，

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1=0,$$

故方程组有无穷多解。

8. 用对角线法则计算：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$。

**解** (1) $$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -7 & 2 & 4 \end{vmatrix}=36+4-210-(-21)$$

$$-(-40)-(-36)=-73.$$

(2) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ o & d & e \\ o & o & f \end{vmatrix}=adf.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}=\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha$$

$$+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\gamma-\cos\gamma\sin\alpha$$

$$=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha).$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=abc+hgf+hgf-bg^2-af^2-ch^2$$

$$=abc+2hgf-af^2-bg^2-ch^2.$$

9. 解方程：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-2 \\ 1 & x-2 & 0 \end{vmatrix}=0$； (2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$。

**解** (1) $2(x-1)(x-2)=0$， $\therefore$ $x=1,2$。

(2) $x^3-3x+2=0$，即 $(x-1)^2(x+2)=0$，

$\therefore$ $x=1$，$1$，$-2$。

10. 求证：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=2\sin\theta(1-\cos\theta)$；

(2) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta}$。

**证明** (1) $\begin{vmatrix} 1 & \sin 3\theta & \cos 3\theta \\ 1 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\sin 2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos 3\theta$

$+\sin 3\theta\cos 2\theta-\cos 3\theta\sin 2\theta-\cos 2\theta\sin\theta-\cos\theta\sin 3\theta$

$=\sin(2\theta-\theta)+\sin(\theta-3\theta)+\sin(3\theta-2\theta)$

$=2\sin\theta-\sin 2\theta=2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=2\sin\theta(1-\cos\theta)$。

(2) $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=8\cos^3\theta-4\cos\theta$

$$= 4\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos\theta\cos 2\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}.$$

**11.** 利用行列式的性质，计算：

(1) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & ba+3b & 10a+9b+3c \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 504 & 404 \end{vmatrix}$.

**解** (1) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & -2 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix} \overset{(1)-\frac{2}{3}(2)^*}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & -3 \\ 25 & 32 & 7 \end{vmatrix} = 0.$

(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 12 & 24 & 36 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)\times 12,\ (2)\div 12}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

$\overset{(1)+(3)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 6$

---

* 表示第一行减去第二行的$\frac{2}{3}$倍。以下仿此。