

理论力学

■ 高等学校教材 [下册]

■ 西南交通大学 黄安基 主编



高 等 学 校 教 材

理 论 力 学

(下册)

西南交通大学 黄安基 主编

中 国 铁 道 出 版 社

1991年·北京

内 容 简 介

本教材是根据高等学校工科各专业1987年制订的《理论力学课程教学基本要求》(100~110学时),在1981年出版的《理论力学》教材的基础上进行修订的。

本教材分上、下两册,本书为下册,主要介绍动力学部分。内容有:动力学基本定律、动量定理、动量矩定理、动能定理、碰撞、动静法、分析力学基础、线性振动理论基础。

本书可作为高等学校工科各专业理论力学教材,也可供职工大学的教学以及有关工程技术人员参考。

高等学校教材

理 论 力 学

(下册)

西南交通大学 黄安基 主编

*

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑 程东海 封面设计 王毓平

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 850×1168mm 1/32 印张: 14.5 字数: 383 千

1991年5月 第1版 第1次印刷

印数: 1—5000册

ISBN7-113-00973-5/O·34 定价: 3.65元

目 录

动 力 学

第十三章 动力学基本定律	1
第一节 动力学基本定律	1
第二节 质点运动微分方程	7
第三节 质点在非惯性系中的运动	21
习 题	32
第十四章 动量定理	40
第一节 动力学普遍定理概述	40
第二节 质点与质点系动量定理	41
第三节 质心运动定理	50
*第四节 变质量质点的运动	57
习 题	65
第十五章 动量矩定理	76
第一节 质点与质点系的动量矩	76
第二节 质点与质点系动量矩定理	78
第三节 刚体的转动惯量	90
第四节 相对于动矩心的动量矩定理	103
*第五节 质点在有心力作用下的运动	110
*第六节 回转仪近似理论	122
习 题	126
第十六章 动能定理	137
第一节 力 的 功	137
第二节 质点与质点系的动能定理	151
第三节 刚体的动能	163
第四节 势力场与势能	168
第五节 动力学普遍定理的综合应用	173

习 题	179
第十七章 碰 撞	192
第一节 碰撞基本特征	192
第二节 碰撞时的动力学普遍定理	197
第三节 两物体的对心碰撞	204
第四节 撞击中心	213
*第五节 两物体的偏心碰撞	216
习 题	222
第十八章 动静法	231
第一节 惯性力与质点动静法	231
第二节 质点系动静法	236
第三节 刚体定轴转动时轴承的附加动反力	257
第四节 转子的静平衡与动平衡	265
习 题	269
第十九章 分析力学基础	281
第一节 质点系的自由度	281
第二节 虚位移原理	286
第三节 保守系统平衡的稳定性	306
第四节 达兰贝尔原理与动力学普遍方程	311
第五节 第二类拉格朗日方程	321
习 题	334
第二十章 线性振动理论基础	349
第一节 振动现象	349
第二节 单自由度系统的自由振动	353
第三节 单自由度系统的受迫振动	377
第四节 减振与隔振的概念	390
*第五节 两个自由度系统的自由振动	398
*第六节 两个自由度系统的受迫振动	414
第七节 振动实验	424
习 题	432
习题答案	444

动 力 学

第十三章 动力学基本定律

第一节 动力学基本定律

在静力学中，研究了作用在质点或刚体上的力系的合成方法和平衡条件，但没有研究当力系不满足平衡条件时质点或刚体将如何运动。在运动学中，从几何角度研究了点和刚体的运动，但没有研究运动是怎样产生的，与它们的质量和受力情况又有什么联系。因此，静力学和运动学所研究的只是物体机械运动的一种特殊情况。

动力学是研究物体的机械运动与它的质量和受力情况之间的关系，即研究物体机械运动状态变化的普遍规律。在工程实际中，存在着很多动力学问题，如炮弹的飞行、火箭的发射、人造卫星和宇宙航行等等。

和运动学一样，本书中动力学也是从研究质点的运动开始（运动学不考虑质量，故称为点），进而推广到一般质点系和刚体的运动。应该指出，质点只是力学中一个科学抽象的概念，虽然在研究它的运动时不考虑它的体积大小，但不能把它和微观粒子如电子、核子等混同起来。

1. 动力学基本定律

动力学基本定律是动力学的基础，但它们只能直接应用于质点。对于刚体和质点系，应该将它们先分别应用于每一质点，然后推导出刚体和质点系的运动规律。

(1) 第一定律 质点如不受外力作用，则将保持静止或作

匀速直线运动。

质点保持静止或作匀速直线运动，也就是保持其运动状态不变，这一性质称为惯性。故点的匀速直线运动，称为惯性运动。牛顿第一定律，也称为惯性定律。这一定律早已于1630年为伽利略所指出。

对于物体的惯性，我们是熟悉的，例如，汽车突然开动时，车中的人会向后仰；突然刹车时，人会向前倾；车急速转弯时，人要向外侧倾斜，实际上是倾向线路的切线方向等都说明了惯性现象。

当质点受到外力作用，而这些作用又不互相抵消时，它的运动状态将按一定的规律发生变化。第二定律就表明了这一变化规律。

(2) 第二定律 质点受外力作用时，将产生加速度，加速度的方向与力的方向相同，大小与力的大小成正比。

如质点同时受几个外力作用(图13-1a)，则定律中所说的“力”，应是这一共点力系的合力，即质点所受各力的几何和 ΣF 。因此，第二定律可表示为(图13-1b)

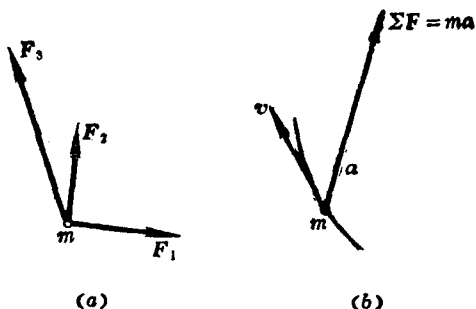


图 13-1

$$\Sigma F = ma \quad (13-1)$$

式中 a 为质点的加速度矢量， m 是比例常数(正数)，称为质点的质量。上式称为质点动力学基本方程。

若 $\Sigma F = 0$ ，则 $a = 0$ ，此时质点将保持静止或作匀速直线

运动。

(13—1) 式说明, ΣF 的大小和方向决定质点的加速度大小和方向。当 ΣF 的大小或方向有变化时, a 的大小或方向也随之变化。但 ΣF 并不直接决定质点的速度, 速度的方向完全可以与力的方向不同 (图13—1 b)。例如, 铅垂上抛的质点, 其速度是向上的, 但它所受的重力却是铅垂向下。炮弹飞行时, 它所受的重力仍是铅垂向下, 但它的速度则沿轨迹的切线方向。

(13—1) 式还表明: 在同样的力作用下, m 愈大, 则 a 愈小。即当力一定时, 质量大的质点运动变化小, 其保持原有运动状态的性质就更明显, 即惯性大。因此, 质点的质量就是其惯性的度量。火车的质量大, 惯性也大, 刹车后要经过较长时间才能停下来。由于物体具有质量, 在有限力作用下, 其加速度不可能是无限大, 因此当它具有一定速度时, 要停下来总需要一个过程。

牛顿认为, 物体的质量就是物体所含的“物质的量”, 把作为物质属性之一的质量直接和物质本身等同起来, 得出了质量不变, 质量与物质运动无关的结论。这是不确切的。在实验事实的基础上, 爱因斯坦 (A.Einstein) 于1905年建立了狭义相对论, 表明当质点的速度接近光速 ($0.3 \times 10^8 \text{ km/s}$) 时, 其质量将有显著变化, 其关系式为

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13-2)$$

式中 v ——质点的速度;

c ——真空中的光速;

m_0 ——质点在静止 ($v = 0$) 时的质量, 称为 **静止质量**。

只是在 v 远小于 c 的情况下, 质量 m 与 m_0 的差别很小, 才可以看作常量。第二定律就是在这一个条件下适用的规律。

(3) 第三定律 两质点相互作用的力, 总是大小相等、方向相反, 且沿同一直线, 分别作用在两质点上。

在静力学里，解决物体平衡问题时要用到它。在动力学里，这一定律依然成立，在研究质点系动力学问题时具有重要作用。

由于作用和反作用，引起了机械运动在相互作用的两质点间发生转移。力就是这种机械运动转移的反映。当我们把实现运动转移的双方分开、只研究机械运动状态发生变化的一方时，另一方的作用就被抽象为力。

2. 惯性参考系

对于不同的参考系，质点运动的描述如轨迹、速度和加速度等，将有所不同。在运动学中，参考系的选择可以是任意的。但在动力学中，在应用动力学基本定律时，所谓“静止”、“匀速直线运动”、“加速度”等，必须明确相对于哪一参考系。

例如，当汽车开动或刹车时，在车上观察（即对于与车厢固结的参考系），可以看到乘客的上身突然向后或向前倾。乘客上身并未受外力推动，但加速度却由零变为非零，可见对于相对于地面加速运动的参考系，动力学基本定律不能适用。故在应用动力学基本定律时，参考系不能任意选取。

实验和实践证明，对于与地面固结的参考系，牛顿运动定律在绝大多数工程问题中是足够准确可用的。参考系相对于地面的加速运动不显著时，牛顿运动定律的应用与在地面应用时的差别不大。在匀速直线平动的巨轮上，力学现象与在陆地上或船停时完全一样，因此在封闭舱内的乘客难以察觉轮船是否正在航行。

动力学基本定律在其中能正确成立的参考系，称为**惯性参考系**，简称**惯性系**。在一般问题中，与地球固结的参考系或相对于地面作惯性运动的参考系，可近似地看作惯性系。实际上，地球既有自转，又绕着太阳公转，故在研究行星或宇宙飞船的运动时，应将参考系的原点取在太阳系的中心，三个坐标轴指向三个恒星。以后如不加说明，总是将与地面固结的参考系看作惯性系。

以牛顿三定律为基础的力学，通常称为古典力学或经典力学。它的科学体系主要是在15至17世纪内，在机器的应用和航海事业的发展等生产条件下形成的。古典力学的形成，是人类对自然界机械运动的认识的巨大飞跃。

由于生产和科学技术的发展，人们对客观世界认识的不断深入，本世纪初通过科学实验发现，古典力学原理只是正确反映了宏观物体作低速机械运动时的客观规律。当物体运动速度接近光速时，须用相对论力学的规律；当研究电子、核子等质量很小的微观粒子的运动时，须用量子力学的规律。

近代科学技术的发展，越来越明确了古典力学的适用范围，但并没有否定它的相对真理性和实用价值。直至今日，动力学基本定律仍然是解决一般工程问题以至宇宙航行问题、天体运动问题等的力学理论基础。

3. 力学单位制

力学中的每一个物理量都要用适当的单位来度量，而且某些物理量之间又具有一定的关系，并不是每个物理量的单位都可以任意规定。与力学关系比较密切的基本量有长度、质量和时间，它们的基本单位为m、kg和s。

在法定计量单位制中，力是导出量，即一个力使质量为1kg的物体产生 1m/s^2 的加速度，这个力的大小称为1N，如图13—2所示。

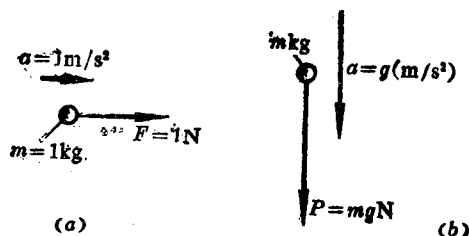


图 13—2

根据牛顿第二定律 $F = ma$ ，故

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m/s}^2 = 1\text{m} \cdot \text{kg/s}^2$$

可见，力的单位N（导出单位）为 $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ ，此外，力的单位还可用kN。

思考题

1. 要使车子在水平直线轨道上匀速前进，为什么还需不断对它施加水平推力？这与惯性定律有无矛盾？

2. 若不计空气阻力，自由下落的石块与向下扔（即给以向下的初速）的石块，哪一个加速度较大？为什么？

3. 已知月球表面的重力加速度约为在地球表面时的 $1/6$ 。问：在地球上质量为 60kg 的人在月球上时体重将为多少？他在月球上时质量又为多少？

4. 用天平或中国式杆秤称出的，是物体的重量还是物体的质量，上题的人如在月球上用磅秤称量，与在地球上称量的结果有无不同？

5. 电梯里放一重物，问在下述几种情况中重物对地板的压力如何，比较这几种情况中的压力大小。（a）电梯静止不动；（b）电梯匀速上升；（c）电梯匀速下降；（d）电梯减速上升；（e）电梯减速下降。

6. 以下说法（或图）是否正确？如果有错误，应怎样修改？（a）质点如有运动，则一定受力，其运动方向总是与所受力的方向一致。（b）质点运动时，速度大则所受力也大，速度小则所受力也小，速度为零则不受力。

（c）质点 M 沿曲线 AB 运动（图13—3），它所受的力 F 如图示。（d）人用 300N 的力推车子，车子若能加速前进，则车子给人的反力必小于 300N 。

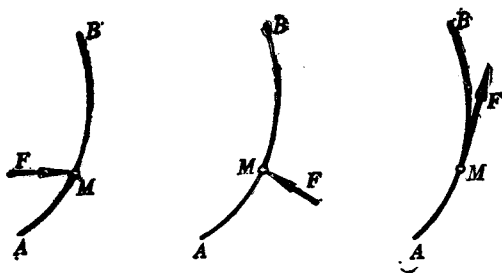


图 13—3

第二节 质点运动微分方程

动力学第二定律给出了质点动力学基本方程，它说明了质点运动的变化与它所受力之间的关系。这是一个矢量方程，为了便于运算，常将它改写成投影式。下面分别研究采用弧坐标或直角坐标时的投影式。

1. 切向和法向投影式

设用弧坐标法研究质点的运动。质点的轨迹为已知曲线（图 13—4）， $Oxyz$ 为惯性参考系。将（13—1）式两边投影到轨迹的切线、主法线和副法线上，投影轴的正向如图所示， t 轴指向弧坐标 s 增加的一边， n 轴指向曲线的凹侧， b 轴的指向按右手坐标制确定。得

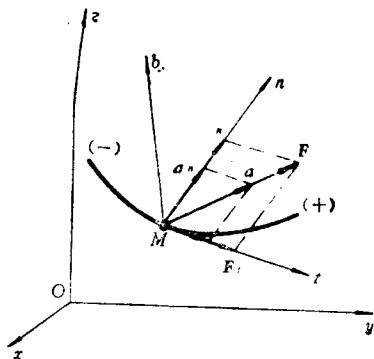


图 13—4

注：为简便计，图中 F 代表 ΣF 。

$$\left. \begin{aligned} ma_t &= \Sigma F_t \\ ma_n &= \Sigma F_n \\ ma_b &= \Sigma F_b \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

由第八章第四节知：

$$a_t = \ddot{s} = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad a_b = 0$$

式中 ρ 为轨迹在 M 点的曲率半径。故有

$$m\dot{v} = \Sigma F_t, \quad \frac{mv^2}{\rho} = \Sigma F_n, \quad 0 = \Sigma F_b \quad (13-4)$$

上式可称为用弧坐标表示的质点运动微分方程。最后一式说明，质点所受各力的合力应位于质点轨迹的密切面内。

若已知质点的运动方程 $s = f(t)$ (或点在某瞬时的运动情况), 求质点所受力的变化规律 (或在某瞬时的 ΣF_x 、 ΣF_y), 则只要将质点的运动方程对时间求导数 (或将已知的 a_x 、 a_y 代入上式左边) 就可以了。这类问题称为质点动力学第一类问题。相反, 若已知质点所受力的变化规律, 求它的运动规律, 则要求解质点运动微分方程。这类问题称为质点动力学第二类问题。有些问题中往往兼有这两类问题。

例13-1 车间里的天车上, 用钢丝绳吊着质量为 m 的物体沿横向作匀速运动, 速度为 v_0 (图13-5a)。当突然急刹车时, 重物将绕悬挂点摆动 (相当于单摆)。设绳长为 l , 求绳子的最大拉力。

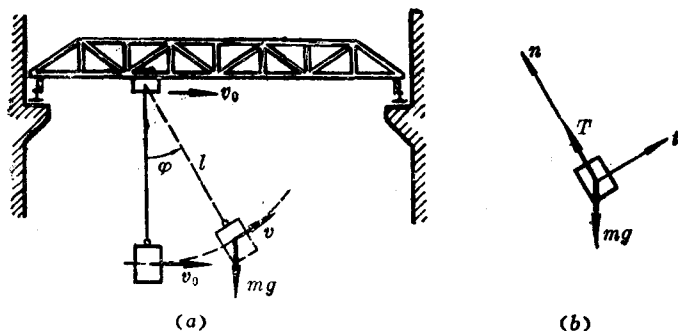


图 13-5

解 画出重物在一般位置的受力图 (图13-5b), T 为钢丝绳拉力, 重力大小为 mg 。设此时钢丝绳与铅垂线成 φ 角, 重物的速度为 v 。

投影轴 t 、 n 的正向如图示 (t 轴指向 s 增加的一边, 也即 φ 增加的一方), 重物作平面曲线运动, 可不必考虑 b 轴。由 (13-4) 式得

$$m \dot{v} = -mg \sin \varphi, m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \varphi \quad (a)$$

质点的运动规律未知, 故第一式为第二类问题, 在求出质点的运动规律后, 可由第二式求 T , 这是第一类问题。

因为

$$s = l\varphi$$

故

$$v = \dot{s} = l \dot{\varphi}, \quad \dot{v} = l \ddot{\varphi}$$

(a) 式的第一式成为

$$m \cdot l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad (b)$$

上式左边乘以 ω , 右边乘以 $\dot{\varphi}$ (利用关系式 $\omega = \dot{\varphi}$), 并将 $\ddot{\varphi}$ 写为 $\dot{\omega}$, 得

$$l\omega\dot{\omega} = -g\sin\varphi\dot{\varphi}$$

或

$$l\omega d\omega = -g\sin\varphi d\varphi$$

积分得

$$l \cdot \frac{\omega^2}{2} = g\cos\varphi + C \quad (c)$$

式中 C 为积分常数。根据已知条件: $\varphi = 0$ 时, $\omega = \frac{v_0}{l}$, 可求得

$$C = \frac{v_0^2}{2l} - g$$

将 C 代入 (c) 式, 化简后得

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - 1) + \frac{v_0^2}{l^2}$$

故

$$v^2 = l^2\omega^2 = v_0^2 - 2gl(1 - \cos\varphi) \quad (d)$$

(d) 式就是重物的速度变化规律。当 φ 增大时, v 随之减小, 当 $\varphi = 0$ 时, 即开始急刹车时, v 值为最大。

由 (a) 式第二式得

$$T = mg\cos\varphi + m \cdot \frac{v^2}{l} \quad (e)$$

当 v 为最大值时, $\cos\varphi$ 也为最大值, 故此时 T 具有最大值。当 $\varphi = 0$ 时, $v = v_0$, 有

$$T_{\max} = mg + m \cdot \frac{v_0^2}{l} \quad (f)$$

当 $\varphi = 0$ 时, 钢丝绳沿铅垂线。若重物处于静止, T 应等于 mg 。但由于它具有速度 v_0 , 也就是具有加速度 $a_n = v_0^2/l$, T 也相应增加了。 (f) 式右边第一项为质点处于静止时的反力, 称为**静反力**; 第二项是由于质点具有加速度而引起的反力, 称为**附加动反力**。

例13-2 已知地球平均半径 $R = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$, 求在地面附近人造卫星环绕地球所需的速度 (称为第一宇宙速度)。

解 设人造卫星 M 环绕地球作匀速圆周运动, 速度为 v (图13-6a)。略去空气阻力, 它所受的力只有重力 P 。

当它在地面附近运行, 可令 $r = R$ 。由 $(13-4)$ 式得

$$m \cdot 0 = 0, \quad m \cdot \frac{v^2}{R} = P$$

式中 m 为人造卫星质量。设 g 为地球表面的重力加速度, 则 $P = mg$,

故由上式第二式得

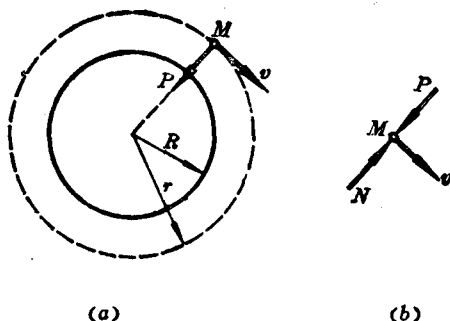


图 13-6

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{0.00981 \times 6370} = 7.9 \text{ km/s}$$

这就是在地球表面的第一宇宙速度。

实际上,在这样大的速度情况下,地面的空气阻力是不能略去不计的。为了减少空气阻力,人造卫星应在高空运行, $r > R$, 在该处的第一宇宙速度 $v = \sqrt{gr}$ 。

设人造卫星上物体所受的支承反力为 N (图13-6b), 则由

$$ma_n = \Sigma F_n, \text{ 得 } m \cdot \frac{v^2}{r} = P - N$$

故
$$N = P - m \cdot \frac{v^2}{r}$$

但
$$P = mg, v^2 = gr$$

故
$$N = mg - m \cdot \frac{gr}{r} = 0$$

可见,在人造卫星(或宇宙飞船)上的物体似乎失去了重量。物体重量减轻的现象,称为**失重**。实际上,人造卫星上的物体并不是真的没有重量,只是静反力正好与附加动反力抵消,如果用弹簧秤称量,物体的“重量”将等于零。

例13-3 在地球赤道上空运行的同步卫星距离地面的高度应为多少?

解 地球同步卫星运行一周的时间应与地球自转一周的时间相同。设同步卫星到地面的高度为 H , 以 R 表示地球在赤道处的半径, ω 表示地球自转的角速度, F 表示同步卫星所受的地球引力, 则由 $ma_n = \Sigma F_n$, 有

$$m(R+H)\omega^2 = F$$

又由 (13-5) 式知

$$F = G \frac{Mm}{(R+H)^2}$$

故最后得

$$(R+H)\omega^2 = \frac{GM}{(R+H)^2}$$

已知万有引力常数 $G = 6.673 \times 10^{-20} \text{ km}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, 地球质量 $M = 5.976 \times 10^{24} \text{ kg}$, 又 $R = 6378 \text{ km}$, $\omega = 2\pi/86164 \text{ rad/s}$, 故

$$R+H = (GM/\omega^2)^{1/3} = 42170 \text{ km}$$

同步卫星到地面的高度应为

$$H = 42170 - 6378 = 35790 \text{ km}$$

2. 直角坐标投影式

在有些问题中, 用直角坐标法研究点的运动较为方便。这时可将 (13-1) 式两边投影到直角坐标轴上。

设质点作空间曲线运动。取直角坐标系 $Oxyz$, 将 ΣF 和质点的加速度 a 投影到 3 个坐标轴上, 得

$$ma_x = \Sigma F_x, \quad ma_y = \Sigma F_y, \quad ma_z = \Sigma F_z. \quad (13-5)$$

若 $Oxyz$ 为惯性参考系, 则上式中

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}$$

x 、 y 、 z 为质点的坐标。故 (13-10) 式成为

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x, \quad m\ddot{y} = \Sigma F_y, \quad m\ddot{z} = \Sigma F_z. \quad (13-6)$$

上式可称为用直角坐标表示的质点运动微分方程。当质点作平面曲线运动或直线运动时, 方程的个数可相应减少。

与用弧坐标的情况一样, 用直角坐标时, 质点动力学问题也可分为第一类问题和第二类问题。

例13-4 空间飞行器质量为 14500 kg , 在月球上降落 (图13-7a)。在离降落点 B 高度为 15 m 的 A 点, 速度 $v_0 = 9 \text{ m/s}$, 开动水平和铅垂的火箭发动机后, 使其沿直线 AB 至 B 点无速着陆。设水平反推力 T_1 和铅垂反推力 T_2 大小均为常量, 求它们的大小。在月球表面, $g = 1.62 \text{ m/s}^2$, AB 与水平方向设成 30° 角。

解 设飞行器降落时没有转动, 可看作质点。画飞行器的受力图 (图13-7b), 图中 P 为它在月球上的重量。本题点的轨迹为直线, 但因未知

量有 T_1 、 T_2 ，为了解题方便，可取水平和铅垂轴作为投影轴（图13-7b）。

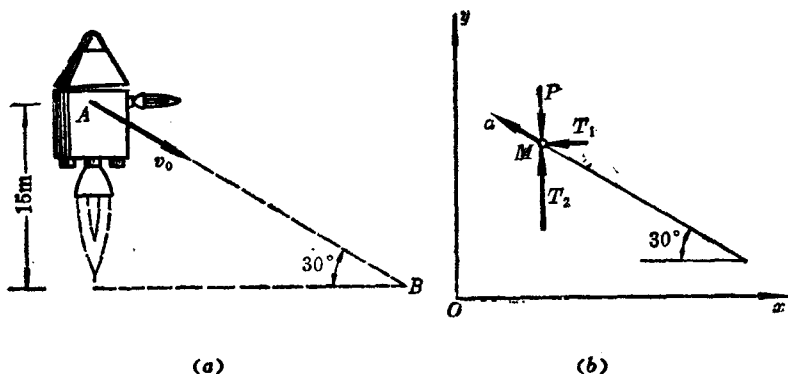


图 13-7

由于 P 、 T_1 、 T_2 均为常矢量，故加速度 a 也为常矢量，质点应沿 AB 线作匀变速运动。已知 $v_0 = 9\text{m/s}$ ， $v = 0$ ， $s = AB = 15/\sin 30^\circ = 30\text{m}$ ，由匀变速运动公式可得

$$0 = 9^2 + 2b \cdot 30$$

故 $b = -1.35\text{m/s}^2$

负号说明质点作减速运动，即图中 $a = 1.35\text{m/s}^2$ 。

由 (13-5) 式前两式得

$$ma_x = \sum F_x, 14500 \times (-1.35 \cos 30^\circ) = -T_1$$

$$ma_y = \sum F_y, 14500 \times 1.35 \sin 30^\circ = T_2 - 14500 \times 1.62$$

故 $T_1 = 16950\text{N} = 16.95\text{kN}$

$$T_2 = 33280\text{N} = 33.28\text{kN}$$

例13-5 质点以初速 v_0 向上运动。设空气阻力的大小与速度大小成正比，求它的运动规律。

解 取 x 轴铅垂向上，原点 O 定在质点的出发点（图13-8a）。考虑质点 M 在一般位置时的受力情况。设此时质点速度为 v ，向上，则空气阻力为 kmv ， m 为质点的质量， k 为比例常数。写出质点运动微分方程

$$m\ddot{x} = \sum F_x, m\ddot{x} = -mg - kmv \quad (a)$$

因 $\ddot{x} = \dot{v}$ ，上式可写为

$$\dot{v} = -g - kv$$