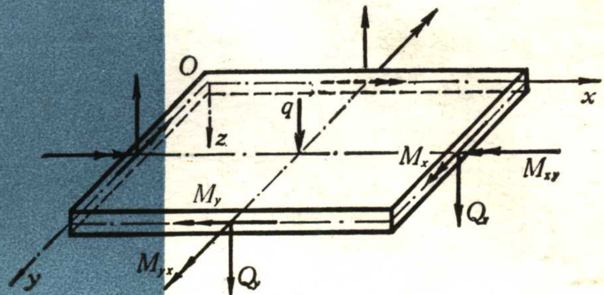


弹性力学专题教材

弹性薄板弯曲

寿楠椿

高等教育出版社

弹 性 力 学 专 题 教 材

弹性薄板弯曲

寿楠椿

高等教育出版社

弹性力学专题教材
弹 性 薄 板 弯 曲
寿 楠 椿

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北 京 印 刷 一 厂 印 装
*
开本850×1168 1/32 印张3.75 字数93,000
1986年10月第1版 1987年2月第1次印刷
印数 00,001—2,630
书号 15010·0751 定价 0.70 元

前　言

本书是和徐芝纶教授撰写的«弹性力学简明教程»配套使用的专题教材，也可供单独设课使用。全书共分三章。第一章讲述弹性薄板小挠度弯曲的古典理论，即基于克希霍夫假定的弹性薄板小挠度弯曲理论。第二、三章讨论几种常见的几何形状与支承情况的薄板，在荷载作用下的求解问题。在编写本书时，编者注意到使本书与«弹性力学简明教程»的体裁、术语和符号保持一致，同时对于内容有搭接的部分又尽量避免论述上的简单重复；当所涉及到的问题因限于篇幅而不能作详细介绍时，则指出必要的参考书目。编者希望这样做能够对读者进一步学习这一专题有所帮助。

本书可以作为高等学校结构工程专业弹性力学课程的专题教材，也可供有关专业的研究生和工程技术人员学习参考。

江素华同志参加了本书的编写工作，设计和绘制了全部插图。本书稿承清华大学何积范同志审阅，审者指出书稿中的错漏处，对于提高本书质量帮助很大。编者谨表示深切的谢意。

限于编者的水平，书中缺点、错误在所难免，敬请读者批评指正。

寿楠椿

1985 年 2 月于郑州工学院

目　录

第一章　弹性薄板小挠度弯曲问题的基本理论

§ 1-1　一般概念与基本假定

在弹性力学中，两个平行平面和垂直于它们的柱面或棱柱面所围成的物体，当其高度小于底面尺寸时便称为平板，或者简称为板，图 1-1。两平行平面称为板面，柱面或棱柱面称为板边，高度称为板的厚度，而平分厚度的平面则称为中间平面或中面。设板的厚度为 t，中面的最小尺寸为 b，如果 t 远小于 b，则这种板称为薄板，否则称为厚板。

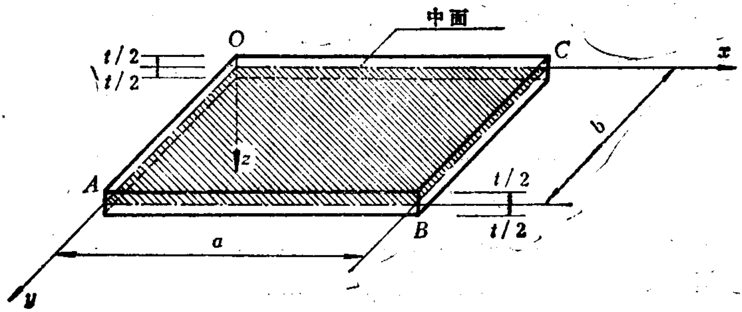
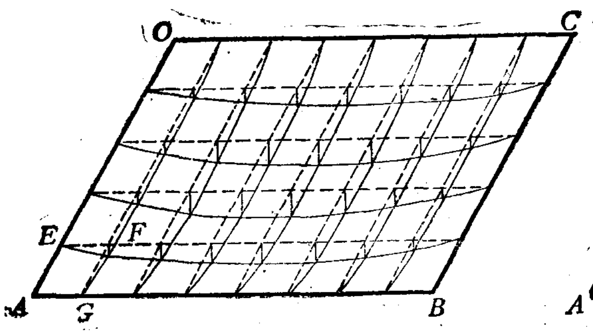
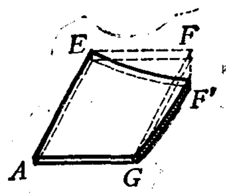


图 1-1

当平板受到垂直于中面的外力即横向荷载的作用时，将发生弯曲变形。以图 1-2 a 所示四边简支矩形薄板为例（图中未画出横向荷载），中面上的虚线表示弯曲以前所画的网格，实线表示弯曲以后的情况。图 1-2 b 表示从这块板的角隅 A 附近截取出的一



(a)



(b)

图 1-2

个矩形板单元 $AEFG$ 的变形情况。可见在薄板弯曲时，一般来讲中面不仅在各个方向发生弯曲，而且还要发生扭转。本书将讨论薄板弯曲时的应力、应变和位移的计算原理和方法，即讲述薄板弯曲问题。限于篇幅，只考虑由各向同性的匀质材料所构成的弹性薄板。

板是工程中常用的结构和构件。实际上板的应力、应变和位移的计算问题属于弹性力学的空间问题，要求得到满足所有微分方程式和边界条件的精确解，在数学上存在着很大的困难，迄今也只是对少数几个简单的情况求得了这样的解答。因此，需要通过引用关于应变和应力分布规律的简化假定，建立近似的理论，以便根据这种理论得到广泛的实际问题的足够精确的解答。本书所讨论的薄板弯曲问题的基本理论就属于这样的近似理论，也就是薄板弯曲的古典理论。

薄板弯曲时，中面各点沿横向即垂直于中面方向的位移称为挠度，中面所弯成的曲面称为薄板的弹性曲面或挠曲面。采用右手直角坐标系，以弯曲前的中面为 xy 坐标面，z 轴垂直朝下，图 1-1。按照弹性力学中的记号，令 $w(x,y,z)$ 表示板内任意一点 (x,y,z) 沿 z 方向的位移，则中面 $z=0$ 内任一点 $(x、y)$沿 z 方向

的位移亦即挠度为$[w(x,y,z)]_{z=0}=w(x,y,0)$，简记为 $w(x,y,0)=w(x,y)$。通常就用这个 $w(x,y)$ 或 w 表示挠度。

本书只介绍薄板的小挠度弯曲理论，也就是只讨论这样的薄板：它虽然很薄，但仍然具有相当的弯曲刚度，因而它的挠度 w 远小于厚度 t。如果薄板的弯曲刚度较小，以致 w 与 t 属同阶大小，则须建立大挠度弯曲理论。本书不讨论这个问题，读者可查阅本书末所附参考文献的[1,3,4]。

薄板的小挠度弯曲理论是建立在下列三个基本假定上的：

(1) 变形前垂直于薄板中面的直线段(法线)，在薄板变形后仍然保持为直线，且垂直于弯曲后的中面，其长度不变。

这个假定常称为直法线假定，它和材料力学中研究梁弯曲问题时所引用的平面假定相似。实际上，由于板很薄，空间问题的六个应变分量并非同一量级，其中 ε_x、ε_y、γ_{xy} 是主要的，而 ε_z、γ_{zx}、γ_{yz} 与之比较甚小，因而是次要的。上面的假定就是略去这些次要的应变分量而取

$$\gamma_{zx}=0,\gamma_{yz}=0,\varepsilon_z=0 \tag{1-1}$$

(2) 垂直于中面方向的正应力 σ_z 与应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 等相比较很小，在计算应变时可以忽略不计。

换句话说，这个假定认为平行于薄板中面的各平行层之间没有挤压应力，它与梁弯曲问题中的纵向纤维不互相挤压的假定相似。

(3) 薄板弯曲时中面没有任何应变。

这就是认为薄板弯曲时，虽然原来为平面的中面变成一个曲面，但中面内各点无正应变 ε_x、ε_y，亦无剪应变 γ_{xy}，即中面是一个中性层。这和梁弯曲问题中所说的中性层相当。实际上，当挠度 w 与板厚 t 相比很小时，中面内各点上述应变分量将很微小，因此可以忽略不计而取为零。这样，中面内各点平行于中面的位移也为零，即

$$(u)_{z=0}=0,\ (v)_{z=0}=0 \tag{1-2}$$

上述三个基本假定通常称为克希霍夫(Kirchhoff)假定。可以认为这些假定是梁弯曲理论的简化假定在薄板弯曲问题上的推广——现在薄板的中面代替了梁的轴线，薄板的弹性曲面代替了梁的弹性曲线，薄板的各向弯曲代替了梁的平面弯曲。由于略去了一些次要的因素，这些假定之间存在某些矛盾(可见§1-3)，但是它们符合薄板小挠度弯曲时的主要受力特征；根据这些假定建立起来的薄板小挠度弯曲理论已为大量的实验结果和一些更精确的理论分析所证实，从而表明这些假定是可取的。这里有一个大致的界限：当板的厚度与中面最小尺寸的比值满足条件

$$\frac{t}{b}\leqslant\frac{1}{5}\sim\frac{1}{8}$$

时，可以认为属于薄板。而当挠度与板厚的比值满足条件

$$\frac{w}{t}\leqslant\frac{1}{5}$$

时，可以认为属于小挠度问题。对于满足这两个条件的平板，应用本章介绍的薄板小挠度弯曲理论一般不会造成显著的误差。

应当指出，存在一些例外情况。例如，在高度集中的横向荷载附近区域，应力分量 σ_z 就不能忽略；某些边缘区域，如靠近角点或靠近直径与板厚为同一量级的圆孔附近，剪应变 γ_{zx}、γ_{yz} 的影响将很显著而不能忽略，等等。这时近似理论就不可靠了，需要采用更精确的理论。本书将不进一步讨论这些问题，读者可查阅参考文献[3]。

最后，当板厚 t 与中面最小尺寸 b 的比值不满足上列薄板的条件时，就应该按厚板处理。这也不属本书讨论之列，读者可查阅参考文献[3、4、14]。

§1-2　薄板中的位移分量和应变分量

根据上节的三个基本假定，利用弹性力学空间问题十五个基

本方程中的有关方程，可以将薄板内任一点(x,y,z)的位移、应变和应力分量用挠度$w(x,y)$来表示；并且进而建立w的微分方程，以便求解。所以，薄板小挠度弯曲问题是按位移求解的，取薄板的挠度w作为基本未知函数。

设薄板内任一点(x,y,z)的位移分量为u、v、w。根据空间问题的几何方程与假定(1)的式(1-1)有

$$\left.\begin{aligned} e_x&=\frac{\partial u}{\partial x}, & e_z&=\frac{\partial w}{\partial z}=0 \\ e_y&=\frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{zx}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}, & \gamma_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

积分式(a)的第2式，即$e_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$可得

$$w(x,y,z)=f_1(x,y) \tag{b}$$

这表示在中面的任意一根法线上，薄板全厚度内各点沿z轴方向的位移w都等于同一数值$f_1(x,y)$，而与该点的坐标z无关。这个数值$f_1(x,y)$也就等于挠度$w(x,y)$，所以

$$w(x,y,z)=w(x,y,0)=w(x,y) \tag{1-3}$$

其次，由式(a)的第4、6式得到

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y} \tag{c}$$

对z进行积分，并注意到式(1-3)，w与z无关，即得

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z+f_2(x,y),\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z+f_3(x,y)$$

而由式(1-2)知$f_2(x,y)=f_3(x,y)=0$，所以

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z,\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z \tag{1-4}$$

式(c)和式(1-4)可通过图1-3说明如下：图中用虚线表示变形以

前垂直于 y 轴的横截面，变形以后这个截面在 zx 坐标面上的投影则如图中实线所示。根据假定（3），中面上的点M仅有法向位移（挠度）而移动到M'。根据假定(1)，中面在点 M 的法线 AB 位移

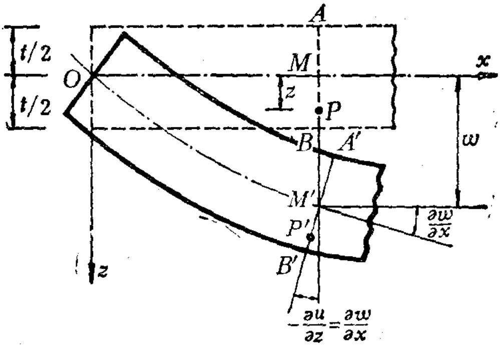


图 1-3

至 $A'B'$，并且垂直于弯曲后的中面。由图可见，法线 AB 绕 y 轴转角的大小为$-\frac{\partial u}{\partial z}$，通过$M$点且平行于 x 轴的直线绕 y 轴转角的大小则为$\frac{\partial w}{\partial x}$，显然这两个转角大小相等，此即式($c$)的第 1 式。其次，法线 AB 上的点P将移动到 P'。根据假定(1)，$M'P'$ 的长度仍为 z，所以点P在 x 方向的位移分量为 $u=-\frac{\partial w}{\partial x}z$，此即式(1-4)的第 1 式。对第 2 式可作同样解释。

将式(1-4)代入式(a)的第 1、3、5 式，就可将应变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 通过 w 表示如下

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z\\ \varepsilon_y&=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z\\ \gamma_{xy}&=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

有时这三个关系式称为薄板弯曲的几何方程。由于挠度 w 很小，将上式中的三个二阶偏导数冠以负号，即 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$、$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$及 $-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$就可近似地作为弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率。加上负号的原因是为了同以后内力矩的符号规定一致，即正号的内力矩产生正号的曲率和扭率。这里，曲率的含义同梁的弹性曲线的曲率相仿。例如$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$在某点$(x,y)$的值，即代表过该点且和坐标面 zx平行的平面与弹性曲面相截而得的曲线在该点的曲率。表征扭率的偏导数$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$说明中面上平行于 x 轴的线段，在中面弯曲以后绕 y 轴的转角$\frac{\partial w}{\partial x}$沿着 y 方向的变化率，如图 1-4 所示。对$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$可作类似说明。实际上$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$。

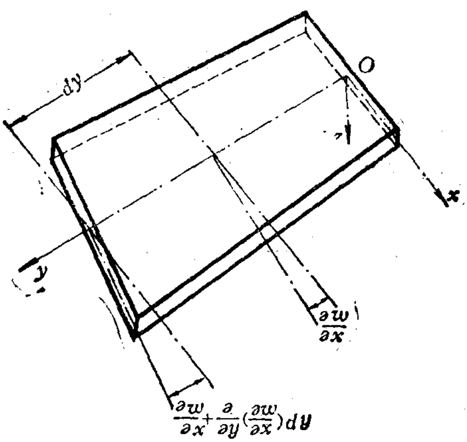


图 1-4

§ 1-3　薄板中的应力分量

空间问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\
\gamma_{yz}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz},\quad \gamma_{zx}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx}\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

根据假定(2),忽略应力分量 σ_z 对于应变的影响，即可由式(a)的第 1、2、6 式得到

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

可见在薄板弯曲问题中这三个物理方程与平面应力问题的物理方程是相同的。由上式求解应力分量得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\
\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\
\tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\}\tag{c}$$

将式(1-5)代入上式,就得到用挠度 w 表示的下列应力分量

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}6)
$$

因为 w 与 z 无关，所以这三个应力分量和 z 成正比，即它们沿板厚按照直线规律变化，于上下板面处达到极值而在中面处等于零，图 1-5。这和梁的弯曲正应力沿梁高的变化规律相同。

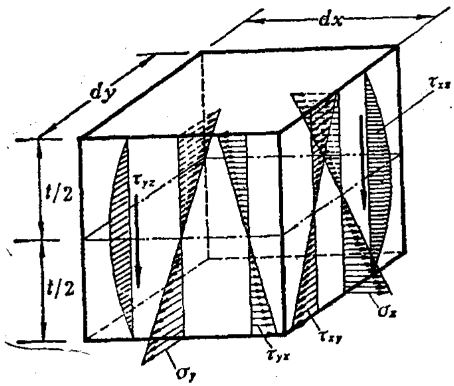


图 1-5

现在进一步考察应力分量 τ_{zx}、τ_{yz} 和 σ_z。由于假定(1)取 $\gamma_{zx}=\gamma_{yz}=0$，假定(2)又忽略 σ_z 对于应变的影响，这就不可能利用物理方程(a)的第 3、4、5 式来确定它们。但是根据空间问题的平衡微分方程我们能够按照下述步骤求得它们。

设薄板只在上面承受横向分布荷载，荷载集度为 $q=q(x,y)$。这里 q 是单位面积上的力，在一般情况下是坐标 x、y 的函数。规定 q 的方向与 z 轴的正向相同时取正号，反之取负号。另外设体力分量 $X=Y=0$，并且体力分量 Z 亦为零。如果需要考虑 Z 时，可以将它简化到板的上面，并入 q 中计算。这样空间问题的平衡

微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{d}$$

式中 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$。薄板上、下面的应力边界条件为

$$\left.\begin{aligned}(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\qquad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0\\ (\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}}=0,\qquad (\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}=-q\end{aligned}\right\}\tag{e}$$

将式(1-6)代入式(d)，经过积分并应用应力边界条件(e)的前3式，不难得到下列结果

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\ \tau_{zy}=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\end{aligned}\right\}\tag{1-7}$$

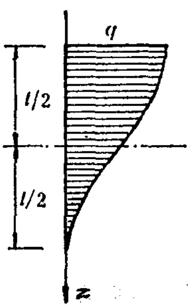


图 1-6

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{t^2}{4}\left(z-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(z^3-\frac{t^3}{8}\right)\right]\nabla^4 w\\ &=-\frac{Et^3}{6(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right)\nabla^4 w\end{aligned}\tag{1-8}$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为调和算子

$$\nabla^4=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$ 为重调和算子。

式(1-7)表明，剪应力 τ_{xz}、τ_{yz} 沿板厚按抛物线规律变化，在中面处达到最大值，图 1-5。这和梁的弯曲剪应力沿梁高的变化规律相同。式(1-8)表明正应力 σ_z 沿板厚按3次抛物线规律变化，图

1-6。

最后将式(1-8)代入应力边界条件(e)的第 4 式，立即得到挠度 w 的微分方程

$$\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 w=q$$

或者

$$D\nabla^4 w=q \tag{1-9}$$

式中

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{1-10}$$

称为薄板的弯曲刚度，其量纲是[力][长度]。式(1-9)就是薄板弹性曲面的微分方程，也就是薄板弯曲问题的基本微分方程。在给定的边界条件下，由这个方程解出挠度 w，即可利用式(1-6)到式(1-8)求得各应力分量。在§1-6 中还要采用另一个更常用的方法来导出这一方程，并进一步说明它的物理意义。

以上导出了薄板中全部应力分量的表达式(1-6)至式(1-8)。现在讨论如下：如果我们从假定(1)和物理方程(a)的第 4、5 式出发，将得出剪应力 τ_{zx}、τ_{yz} 等于零的结果，这不符合实际情况。另一方面，因为假定(2)忽略应力分量 σ_z 对于应变的影响，所以由物理方程(a)的前 3 式将得到 $\varepsilon_z=-\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$，这又和假定(1)中取 $\varepsilon_z=0$ 矛盾。而上面根据空间问题的平衡微分方程却可以求出上述三个应力分量 τ_{zx}、τ_{yz} 和 σ_z。对此可以解释为：应力分量 τ_{zx}、τ_{yz} 和 σ_z 与其余三个应力分量相比甚小，它们所引起的应变可以忽略不计，但它们本身却是维持平衡所必需的，对于维持平衡来说又不能不计。由此可知，物理方程(a)的第 3、4、5 式不能满足而必须放弃，这正是薄板弯曲近似理论的不足之处。尽管如此，大量的实验和理论分析证实这个近似理论依然是成立