中、美奥数总领队担纲 东南地区指定培训教材

高中数学竞赛培训教材

主编 李胜宏 [美]冯祖鸣

高一分册

浙江大学出版社

高中数学竞赛培训教材

（高一分册）

丛书主编　李胜宏　[美]冯祖鸣

分册主编　陶平生　林　常　马茂年

编委名单　石世昌　占章根　陈德燕

夏彦婴　苏　健　赖敬华

李　芳　王希年　马茂年

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛培训教材．高一分册／李胜宏，冯祖鸣主编．—杭州：浙江大学出版社，2004.8

ISBN 7-308-03779-7

Ⅰ.高... Ⅱ.①李...②冯... Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071423 号

出版发行	浙江大学出版社 (杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027) (E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn) (网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑	王建英 杨晓鸣
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	富阳市育才印刷有限公司
开　　本	787mm × 960mm 1/16
印　　张	18.5
字　　数	450 千字
版 印 次	2004 年 8 月第 1 版 2006 年 2 月第 4 次印刷
印　　数	17001—21000
书　　号	ISBN 7-308-03779-7/G·729
定　　价	22.00 元

编 写 说 明

国际数学奥林匹克竞赛在世界范围内愈来愈普及。有着深厚文化积淀的中国东南地区(闽、浙、赣)于2004年8月举办了“首届中国东南地区数学奥林匹克”,其宗旨是通过竞赛来激发学生学习数学的兴趣和热情,并发现和培养一批数学苗子。要做到这一点,就必须遵照循序渐进的教学原则和辅导方法。“高中数学竞赛培训教材”丛书(高一、高二、高三共三个分册)就是以此为出发点而编写的一套培训教材。

丛书在构思和编写过程,着重知识的完备性和自我封闭性。丛书对初等数学的基本理论和一些典型问题的背景作了系统的介绍,对基本定理则给出了完备的证明。其目的是使学生不仅要知其然,还要知其所以然。这对培养学生的数学品格,提升学生的数学修养是大有裨益的。

在编写过程中,高一、高二分册的内容大体与高中教材同步,但在深度上逐步加深,引导学生循序渐进,通过学习使学生达到甚至超过联赛一试的水平;在广度上,除高中课本规定的知识外,还作了大量的补充,内容涉及CMO和IMO等知识,为学生更进一步的学习提供丰富的素材。高三分册是针对联赛二试而编写的,内容涉及各个高层次的数学竞赛,不同层次的学生可以灵活取舍。

丛书在材料的选取上,充分体现新理念,既强调数学思想和方法的传授,又注重数学解题能力和技巧的培养。这体现在:对经典材料的处理新视角化,对新颖材料的处理多视角化,力戒陈题和人云亦云,充分渗透编者的思想方法,使读者耳目一新。

在每个知识点上精选了一些典型的、新颖的,并有一定难度的例题,通过例题的讲解力求达到举一反三的目的。此外,还配备了适量的课外习题,供学生课外学习和研究。对这些习题只是提供了简单的解题思路,目的是希望学生自己去体验、去探究、去获取独立的数学知识。

丛书由浙江大学教授博导、全国数学奥林匹克领队教练李胜宏先生和

美国数学奥林匹克领队教练冯祖鸣博士主编，参加编写人员包括一批全国数学奥林匹克领队教练，以及闽、浙、赣三省长期从事数学奥林匹克竞赛辅导和研究的专家、学者、奥数高级教练、中学特级教师等。

高一分册第一章、第二章、第七章由浙江杭州第十四中学特级教师、奥数高级教练马茂年老师编写，第三章由浙江杭州第十四中学特级教师、奥数高级教练占章根老师编写，第四章由江西上饶县中高级教师、奥数高级教练王希年老师编写，第五章由福州一中高级教师、奥数高级教练苏健老师编写，第六章由浙江杭州外国语学校特级教师、奥数高级教练石世昌老师编写。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 集合与简易逻辑

集合与简易逻辑是高中数学的起始单元，也是整个中学数学的基础.它的基础性体现在两个方面：首先，集合的思想、集合的语言和集合的符号在高中数学的很多章节如函数、数列、轨迹、方程和不等式、立体几何、解析几何中都被广泛地使用；其次，数学离不开变换（等价的或不等价的）和推理，而变换和推理又离不开四种命题、充要条件、逻辑联结词等逻辑概念，因为它们是全面理解概念、正确推理运算、准确表述判断的重要工具.

集合与逻辑不仅是中学数学的基础，也是支撑现代数学大厦的基石之一.高等数学的许多分支如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率统计、拓扑学等都建立在集合与逻辑的理论基础之上.

本章节的知识点在集合与逻辑的理论中都是最基本的，但其中蕴含的数学思想却很丰富，如集合的思想、函数的思想、转化的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想等.

总之，集合与简易逻辑是高考或数学竞赛中考基础、考能力和考查进一步学习潜力的很好的命题材料.

一、集合的概念及运算

1. 集合中的判断问题

集合中的判断问题主要有两类：

(1)判断元素与集合的关系（属于，不属于）；

(2)判断两个集合之间的特殊关系（子集，真子集，相等）.

两个集合之间的关系是通过元素与集合的关系来揭示的，因而判断两个集合之间的关系通常可从判断元素与这两个集合的关系入手.

例1 已知 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{y\mid y=b^2-6b+10,b\in\mathbf{N}^*\}$，问集合 M 与 P 间的关系是怎样的？

【分析】 两个集合间的关系不外乎“$\subseteq$”“$\subset$”“$=$”或不存在这些关系. 而集合 M,P 都是无限集,不可能用列举法,于是要考虑两个表达式之间有什么关系.

【解】 P 集合中,$y=b^2-6b+10=(b-3)^2+1$,当 $b=4,5,6,\cdots$,时,y 与 M 集中 $a=1,2,3,\cdots$ 时 x 值相同,而 $b=3$ 时,$y=1\in P$,$1\notin M$,所以 $M\subset P$.

或用定义来分析,对任意的 $x_0\in M$,有 $x_0=a_0^2+1=(a_0+3)^2-6(a_0+3)+10\in P$.

(因为 $a_0\in \mathbf{N}^*$,所以 $a_0+3\in\mathbf{N}^*$.)所以 $M\subseteq P$.

又 $b=3$ 时,$y=1$,所以 $1\in P$,而 $x=a^2+1>1$,所以 $1\notin M$.

从而 $M\subset P$.

【说明】 (1)本题的关键是,如何将表达集合 M 和 P 的解析式间的关系寻求出来,并从中找出特殊元素. (2)若将题目中自然数集 $\mathbf{N}^*$ 改为整数集 $\mathbf{Z}$,则 $M=P$.

例 2 以某些整数为元素的集合 P 具有以下性质:

(1)P 中的元素有正数,也有负数;

(2)P 中的元素有奇数,也有偶数;

(3)$-1\notin P$;

(4)若 $x,y\in P$,则 $x+y\in P$.

试判断数 0,2 与集合 P 的关系.

【解】 由(4)知 $x\in P$,则 $kx\in P$,k 是正整数.

由(1)可设 $x,y\in P$,且 $x>0,y<0$,则有 $xy,(-y)x\in P$.

因而 $0=xy+(-yx)\in P$.

假设 $2\in P$,若负数中有一个为奇数,不妨令一奇数为 $-2k+1$,k 为正整数,则由(2)知 $2k-2\in P$,且有 $(2k-2)+(-2k+1)=-1\in P$. 这与(3)矛盾.

若负数均为偶数,不妨令一偶数为 $-2k$,k 为正整数,则由(4)及 $2\in P$ 知所有的负偶数都属于 P,因而对于一正奇数 $2m+1$(m 是正整数),有偶数 $2m-2\in P$,使得

$$(2m-2)+(2m+1)=-1\in P.$$

这也与(3)矛盾. 所以 $2\notin P$.

2. 集合中的运算问题

在中学数学教材中,我们已经知道交集和并集这两种集合运算满足交换律和结合律. 利用文氏图还可以验证下面的三个结论:

(1)分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(2)结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

(3)摩根律 $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$,

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

例 3 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$．若 $A=B$，求 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2004}+\frac{1}{y^{2004}})$ 的值．

【误解】 因为 $A=B$ 且 $xy>0$，所以 $\lg(xy)=0$，$xy=1$，即 $|x|=1$ 或 $y=1$，

所以 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

当 $x=y=1$ 时，原式 $=4008$；

当 $x=y=-1$ 时，原式 $=0$．

综上所述，原式的值为 4008 或 0．

【误区】 用列举法表示集合时，要特别注意元素的互异性，当 $x=y=1$ 时，集合 $A=\{1,1,0\}$，这是有悖于集合基本概念的．

【正解】 因为 $A=B$，$0\in B$ 时，在 A 中只能有 $\lg(xy)=0$，所以 $xy=1$，

当 $xy=1\in A$ 时，在 B 中只能有 $|x|=1$，否则 $x=xy$ 与集合中元素的互异性矛盾．

故 $xy=|x|$，由 $y\neq1$，得 $x=-1$，$y=-1$，

所以 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+(x^3+\frac{1}{y^3})+\cdots+(x^{2004}+\frac{1}{y^{2004}})=0$．

例 4 已知全集 $S=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $A\cap B\subseteq C$，求实数 a 的取值范围．

【解】 集合 A,B,C 中的元素均是用不等式描述的，A,B 中不含参数，可先求出

$A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid x>2$ 或 $x<-4\}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$．

又 $C=\{x\mid (x-a)(x-3a)<0\}$．

欲使 $A\cap B\subseteq C$，须分类讨论：

(1)当 $a>0$ 时，$C=\{x\mid a<x<3a\}$，结合数轴知 $\begin{cases}a\leqslant2,\\3a\geqslant3,\end{cases}$ 即 $1\leqslant a\leqslant2$；

(2)当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，不合题意；

(3)当 $a<0$ 时，$C=\{x\mid 3a<x<a\}$，结合数轴知 $\begin{cases}3a\leqslant2,\\a\geqslant3,\end{cases}$ 无解．

综上，a 的取值范围是 $[1,2]$．

【说明】 此例从集合关系 $A\cap B\subseteq C$ 入手进行分类讨论，在讨论过程中又借助数轴确定 a 的取值范围．由此可知，在解题过程中，应该注意集合关系、基本图形（文氏图和数轴）和分类讨论的综合运用．

例 5 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$．问：

(1)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合？

(2)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有 3 个元素的集合？

【解】 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

(Ⅰ)$\begin{cases} ax+y=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases} x+ay=1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$的解集.

由(Ⅰ)解得$(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$;

由(Ⅱ)解得$(x,y)=(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1)使$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素的情况只有两种可能:

①$\begin{cases} \frac{2a}{1+a^2}=0, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=1; \end{cases}$ ②$\begin{cases} \frac{2a}{1+a^2}=1, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=0. \end{cases}$

故当$a=0$或1时,$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素.

(2)使$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素的情况是$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$,解得$a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当$a=-1\pm\sqrt{2}$时,$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素.

3. 集合中的映射问题

理解映射$f:A\to B$的关键是抓住集合A中元素在集合B中的像的存在性和唯一性.根据映射中像与原像的不同状态,有下面几种很有用的特殊映射.

(1)满射 如果在映射$f:A\to B$下,集合B中每一个元素在集合A中都至少有一个原像,那么称映射$f:A\to B$为A到B上的满射.

记有限集M的元素个数为$\mathrm{card}(M)$或$|M|$.对于满射$f:A\to B$,显然有$\mathrm{card}(A)\geqslant\mathrm{card}(B)$.

(2)单射 如果在映射$f:A\to B$下,集合A中不同的元素在B中有不同的像,那么称映射$f:A\to B$为A到B的单射.

对于单射$f:A\to B$,显然有$\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$.

(3)双射 如果映射$f:A\to B$同时是A到B上的满射和单射,那么称映射$f:A\to B$为A到B上的双射(即一一映射).

配对原理:如果存在集合A到集合B上的双射,那么$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

例6 设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$.

(1)写出一个$f:A\to B$,使f是单射,并求所有A到B的单射个数;

(2)写出一个$f:A\to B$,使得f不是单射,并求所有这种映射的个数;

(3)A到B的映射能否是满射?

【解】 (1)作映射$f:A\to B$,使得$f(a_i)=b_i$,$i=1,2,3,4$.则此映射即为A到B的一个单射.这种单射的个数为$A_5^4=120$.

(2)作映射$f:A\to B$,使得$f(a_i)=b_1$,$i=1,2,3,4$.则此映射即为所求.这种映射的个数为$5^4-A_5^4=505$.

(3)不能.由于A中的每一个元素恰与B中的一个元素对应,$|A|=4$,$|B|=5$,所以B中至少

竞赛同步发展课程

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

有一个元素在 A 中找不到与它对应的元素，因而 A 到 B 的满射不存在.

例 7 对集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2004\}$ 及其每一个非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始，交替地减或加后继的数所得的结果. 例如，集合 $\{1,2,4,7,10\}$ 的“交替和”是 $10-7+4-2+1=6$，集合 $\{7,10\}$ 的“交替和”是 $10-7=3$，集合 $\{5\}$ 的“交替和”是 5，等等，试求 A 的所有子集的“交替和”的总和.

【分析】 A 的非空子集共有 $2^{2004}-1$ 个，显然，要想逐个计算“交替和”然后相加是不可能的. 必须分析“交替和”的特点，故可用从特殊到一般的方法. 如 $\{1,2,3,4\}$ 的非空子集共 15 个，其交替和分别为：$\{1\}$　1，$\{2\}$　2，$\{3\}$　3，$\{4\}$　4，$\{1,2\}$　$2-1$，$\{1,3\}$　$3-1$，$\{1,4\}$　$4-1$，$\{2,3\}$　$3-2$，$\{2,4\}$　$4-2$，$\{3,4\}$　$4-3$，$\{1,2,3\}$　$3-2+1$，$\{1,2,4\}$　$4-2+1$，$\{1,3,4\}$　$4-3+1$，$\{2,3,4\}$　$4-3+2$，$\{1,2,3,4\}$　$4-3+2-1$，从以上写出的“交替和”可以发现，除 $\{4\}$ 外，可以把 $\{1,2,3,4\}$ 的子集分为两类：一类中包含 4，另一类不包含 4，并且构成这样的对应：设 A_i 是 $\{1,2,3,4\}$ 中一个不含 4 的子集，令 A_i 与 $\{4\}\cup A_i$ 相对应，显然这两个集合的“交替和”的和为 4，由于这样的对应有 7 对，再加上 $\{4\}$ 的“交替和”为 4，即 $\{1,2,3,4\}$ 的所有子集的“交替和”为 32.

【解】 集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2004\}$ 的子集中，除了集合 $\{2004\}$，还有 $2^{2004}-2$ 个非空子集. 将其分为两类，第一类是含 2004 的子集，第二类是不含 2004 的子集，这两类所含的子集个数相同. 因为如果 A_i 是第二类中的，则必有 $A_i\cup\{2004\}$ 是第一类中的集合；如果 B_j 是第一类中的集合，则 B_j 中除 2004 外，还应用 $1,2,\cdots,2003$ 中的数做其元素，即 B_j 中去掉 2004 后不是空集，且是第二类中的. 于是把“成对的”集合的“交替和”求出来，都为 2004，从而可得 A 的所有子集的“交替和”为 $\frac{1}{2}(2^{2004}-2)\times 2004+2004=2^{2003}\times 2004$.

【说明】 本题中，“退到最简”，从特殊到一般的思想及分类思想、映射对应思想都有体现，要注意学习.

我们先约定：若 X 是一个有限集，则 X 内所含全部元素的个数用 $\mathrm{card}(X)$ 表示.

如果 A,B,C 是任意的三个有限集合，那么有以下几个公式(容斥原理)：

①$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

②$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)$

$$=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C).$$

③$\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cup B)$.

④若 $B\subsetneqq A$，则 $\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(\complement_A B)$.

⑤$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=\mathrm{card}(A\cup B\cup C)-\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(C)+\mathrm{card}(A\cap B)+\mathrm{card}(A\cap C)+\mathrm{card}(B\cap C)$.

对于一个有限集，我们常用一条封闭曲线围成的平面图形来表示，如图 1-1，而用这个平面图形的面积来表示它所含全部元素的个数. 这样做的好处是比较直观，有助于思考.

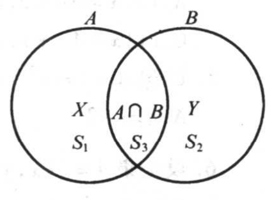

图 1-1

例 8 在某一个班级的学生中，有 36 人的数学成绩不低于 80 分，有 20 人的物理成绩不低于 80 分，且有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分. 那么，有多少人这两科成绩中至少有一科不低于 80 分?

【解】 用 A，B 分别表示数学、物理成绩不低于 80 分的学生的集合，用 $n(S)$表示有限集合 S 中元素的个数. 如图 1-2 所示，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=36+20-15=41(\text{人}).$$

所以，有 41 人这两科成绩中至少有一科不低于 80 分.

例 9 一次会议有 1990 位数学家参加，每人至少有 1327 位合作者，求证：可以找到 4 位数学家，他们中每两个人都合作过.

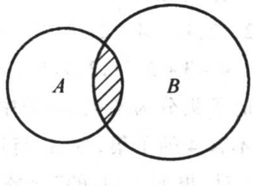

图 1-2

【解】 记数学家们为 $v_i(i=1,2,\cdots,1990)$，与 v_i 合作过的数学家组成集合 A_i，任取合作过的两位数学家记为 v_1,v_2，由

$\text{card}(A_1)\geqslant 1327,\text{card}(A_2)\geqslant 1327,\text{card}(A_1\cup A_2)\leqslant 1990$. 得

$$\begin{aligned}\text{card}(A_1\cap A_2)&=\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)-\text{card}(A_1\cup A_2)\\&\geqslant 1327\times 2-1990>0.\end{aligned}$$

从而存在数学家 $v_3\in A_1\cap A_2,v_3\neq v_1,v_3\neq v_2$.

又 $$\begin{aligned}\text{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)&=\text{card}(A_1\cap A_2)+\text{card}(A_3)-\text{card}((A_1\cap A_2)\cup A_3)\\&\geqslant(1327\times 2-1990)+1327-1990=1,\end{aligned}$$

从而存在数学家 $v_4\in A_1\cap A_2\cap A_3,v_4\neq v_1,v_4\neq v_2,v_4\neq v_3$，推得数学家 v_1,v_2,v_3,v_4 两两合作过.

【说明】 本题的实质是证明 $A_1\cap A_2\cap A_3\neq\varnothing$，通过容斥原理的计算来完成.

[赛题训练]

1. 若 $M=\{x\mid f(x)=0\}$，$N=\{x\mid g(x)=0\}$，则$\{x\mid f(x)g(x)=0\}$为 ( )

   A. M　　B. N　　C. $M\cup N$　　D. 以上都不对

2. 定义 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{2,3,6\}$，则 $N-M$ 等于( )

   A. M　　B. N　　C. $\{1,4,5\}$　　D. $\{6\}$

3. 非空数集 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，那么符合条件"若 $a\in S$，则 $6-a\in S$"的集合 S 的个数是 ( )

   A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 31

4. 已知全集 $I=\mathbf{Z}$，$M=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$S=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $M\cap\complement_I S$ ( )

   A. $\{x\mid x=6n\pm 2,n\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{x\mid x=6n\pm 1,n\in\mathbf{Z}\}$

   C. $\{x\mid x=4n\pm 1,n\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{x\mid x=3n\pm 1,n\in\mathbf{Z}\}$

5. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值范围是 ( )

   A. $p\geqslant -2$　　B. $p\geqslant 0$　　C. $-4<p<0$　　D. $p>-4$

6. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，则 $\complement_I(M\cup N)$等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

7. 前 1000 个自然数中，能被 2 整除但不能被 3 整除的也不能被 5 整除的数有________个.

8. 集合 $M=\{y\mid y=\sqrt{9-x^2},|x|\leqslant 3\}$，$S=\{y\mid y=\sqrt{x(x-1)},x>1\}$，则 $M\cap S=$________.

9. 一个自然数若与它的“反序数”相等，这个自然数就称为一个“魔幻数”，如 3 和 1991 都是“魔幻数”. 在 $M=\{x\mid x\in\mathbf{Z},1\leqslant x\leqslant 2000\}$ 的元素中，去掉所有的“魔幻数”后，形成一个不含“魔幻数”的子集 N，则 N 中元素共有________个.

10. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，且集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$. 当 $A=\{-1,3\}$ 时，用列举法表示 $B=$________.

11. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\frac{T}{S}$ 的值为________.

12. 设 $S=\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}\subseteq\{1,2,3,\cdots,50\}$，且 S 中任意两数之和不能被 7 整除，则 n 的最大值为________.

13. 设 S 为满足下列两个条件所构成的集合：

(i) $1\notin S$；(ii) 若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$；

试证明：

(1) 若 $a\in S$，则 $1-\frac{1}{a}\in S$；

(2) 若 $2\in S$，则在 S 中必含有两个其他的数，并写出这两个数.

14. 设集合 $P=\{x\mid x^2+4x-5\leqslant 0\}$，$Q=\{x\mid x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$.

(1) 若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若 $P\subsetneqq Q$，求实数 a 的取值范围；

(3) 若 $P\cap Q$ 为单元素集时，求 a 的值.

15. 已知抛物线 $y=x^2+4ax-4a+3$，$y=x^2+(a-1)x+a^2$，$y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 x 轴相交，求实数 a 的取值范围.

二、一元二次不等式

1. 含绝对值的一元二次不等式

含绝对值的不等式的基本解法：

(1) $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

(2) $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow -f(x)>g(x)$ 或 $f(x)>-g(x)$；

(3) $|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$.

例1 解不等式组：$\begin{cases} x^2-x-5>|2x-1|, & ①\\ x^2-4|x|+3\leqslant 0, & ②\\ |x^2-2x-3|>2. & ③\end{cases}$

【解】 由①得 $\begin{cases}2x-1<x^2-x-5\\ 2x-1>-(x^2-x-5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-4>0\\ x^2+x-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\text{ 或 }x<-1\\ x>2\text{ 或 }x<-3\end{cases}\Leftrightarrow x>4$ 或 $x<-3$， ④

由②得 $4|x|\geqslant x^2+3\Leftrightarrow 4x\geqslant x^2+3$ 或 $4x\leqslant -(x^2+3)\Leftrightarrow x^2-4x+3\leqslant 0$ 或 $x^2+4x+3\leqslant 0\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 3$ 或 $-3\leqslant x\leqslant -1$ ⑤

由③得 $x^2-2x-3>2$ 或 $x^2-2x-3<-2\Leftrightarrow x^2-2x-5>0$ 或 $x^2-2x-1<0\Leftrightarrow x<1-\sqrt{6}$ 或 $x>1+\sqrt{6}$，或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$， ⑥

由④，⑤，⑥得，原不等式组的解集为$\varnothing$.

例2 解不等式 $|x-1|+|2-x|>3+x$.

【分析】 不等式左边含有两个绝对值符号，从而考虑采用"零点分段".

【解】 分类求解如下：由于实数1，2把数轴分成$(-\infty,1]$、$(1,2]$、$(2,+\infty)$三部分，所以

(1)当 $x\leqslant 1$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}-(x-1)-(x-2)>x+3\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x<0;$$

(2)当 $1<x\leqslant 2$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}x-1-(x-2)>x+3\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-2\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow \text{无解};$$

(3)当 $x>2$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}x-1+x-2>x+3\\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>6\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x>6.$$

综合(1)、(2)、(3)，得原不等式的解集为$\{x\mid x<0$ 或 $x>6\}$.

【说明】 "零点分段"是解含有多个绝对值符号不等式的常用方法.请读者根据绝对值的几何意义思考如下更一般的情形：

"对任意实数 x，若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立，求 k 的取值范围".

2. 含参数的一元二次不等式

求解含参数的一元二次不等式时，要特别注意对参数进行讨论.

例3 设 a 为参数，解关于 x 的一元二次不等式 $ax^2-(a+1)x+1<0$.

【解】 (1)$a=0$，原不等式为 $-x+1<0$，解为 $x>1$.

(2)$a\neq 0$，分解因式得 $a(x-\dfrac{1}{a})(x-1)<0$.

①若 $a>0$，则$(x-\dfrac{1}{a})(x-1)<0$.

(ⅰ)$\frac{1}{a}>1$,即 $0<a<1$ 时,解为 $1<x<\frac{1}{a}$;

(ⅱ)$\frac{1}{a}<1$,即 $a>1$ 时,解为 $\frac{1}{a}<x<1$;

(ⅲ)$\frac{1}{a}=1$,即 $a=1$ 时,不等式无解.

②若 $a<0$,则 $(x-\frac{1}{a})(x-1)>0$,解为 $x>1$ 或 $x<\frac{1}{a}$.

例 4 设有不等式 $\frac{1}{8}(2t-t^2)\leqslant x^2-3x+2\leqslant 3-t^2$,试求对于满足 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 成立的 t 的取值范围.

【解】 令 $y=x^2-3x+2$,$0\leqslant x\leqslant 2$,则在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上 y 能取到的最小值为 $-\frac{1}{4}$,最大值为 2,

从而总有 $\begin{cases}\frac{1}{8}(2t-t^2)\leqslant -\frac{1}{4},\\ 3-t^2\geqslant 2.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}t^2-2t-2\geqslant 0,\\ t^2-1\leqslant 0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}t\leqslant 1-\sqrt{3},\\ -1\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t\geqslant 1+\sqrt{3},\\ -1\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$

于是 t 的取值范围为 $\{t\mid -1\leqslant t\leqslant 1-\sqrt{3}\}$.

3. 高次不等式的解法

定义 形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\geqslant 0(>0,<0,\leqslant 0)$ 的不等式称为高次不等式,其中 $a_n\neq 0$.

求解高次不等式的方法是标根法,其步骤是:

第一步　将高次不等式左边多项式因式分解,化成如下标准形式:

$f(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_m)^{\alpha_m}\geqslant 0(\leqslant 0$,等等$)$,其中 $m\leqslant n$,$x_1<x_2<\cdots<x_m$,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in\mathbf{N}^*$.

第二步　将 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 标在数轴上,将数轴分成 $m+1$ 个区间:

$I_1=(-\infty,x_1)$,$I_2=(x_1,x_2)$,$\cdots$,$I_m=(x_{m-1},x_m)$,$I_{m+1}=(x_m,+\infty)$.

下面我们来观察当 x 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 时,$f(x)$ 的符号变化规律:

(1)当 $x\in I_{m+1}$ 时,显然 $f(x)>0$(初始符号为正).

(2)当 $x\in I_m$ 时,若 α_m 为偶数,则 $f(x)>0$(符号不变),若 α_m 为奇数,则 $f(x)<0$(符号改变).

(3)当 $x\in I_{m-1}$ 时,若 α_{m-1} 为偶数,则 $f(x)$ 的符号与前种情形相同(符号不变),若 α_{m-1} 为奇数,则 $f(x)$ 的符号与前种情形相反(符号改变).

依此类推可得 $f(x)$ 的符号判别法:

设当 $x\in I_k$ 时,$f(x)$ 的符号有两种情况:

(i)若 α_k 为偶数,则 $f(x)$ 的符号与 $x\in I_{k+1}$ 的符号相同;

(ii)若 α_k 为奇数,则 $f(x)$ 的符号与 $x\in I_{k+1}$ 的符号相反.

由于初始符号为正,根据上述符号变化规律,我们将把 $f(x)$ 的符号在数轴上用图形表示出来,如图 1-3 所示.

在图 1-3 中,曲线在 x 轴上方表示 $f(x)$ 取"+";曲线在 x 轴下方表示 $f(x)$ 取"-".因此,当曲

图 1-3

线穿过点 x_k 时，α_k 为奇数，否则 α_k 为偶数. 因此，我们可总结出口诀：“奇过偶不过，符号看曲线”.

(4)根据以上符号变化规律，写出不等式的解集.

例 5 解下列不等式：

(1)$\dfrac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}\geqslant 3$； (2)$\dfrac{1}{x+1}\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)<0$.

【解】 (1)已知不等式等价于

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)\geqslant 0,\\ x\neq 1,4.\end{cases}$$

如图 1-4 所示，所求解集为$(\infty,1)\cup[2,3]\cup(4,+\infty)$.

图 1-4

(2)已知不等式等价于

$$\frac{1}{x(x+1)}\cdot(x^3-1)<0\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)(x^2+x+1)<0$$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)<0$(因为 $x^2+x+1>0$ 恒成立)$\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(-\infty,-1)$.

即所求解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

4. 无理不等式的解法

定义 根号内含有未知数的不等式叫做无理不等式. 在这一节里，我们主要介绍含二次根式的无理不等式的解法. 含二次根式的不等式有如下基本形式：

(1)$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

(2)$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g^2(x),\\ g(x)\geqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

(3)$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g^2(x),\\ g(x)>0,\\ f(x)\geqslant 0.\end{cases}$

(4)$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}>\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+g(x)+2\sqrt{f(x)g(x)}>h(x),\\ f(x)\geqslant 0,g(x)\geqslant 0,h(x)\geqslant 0.\end{cases}$

例 6 解不等式$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com