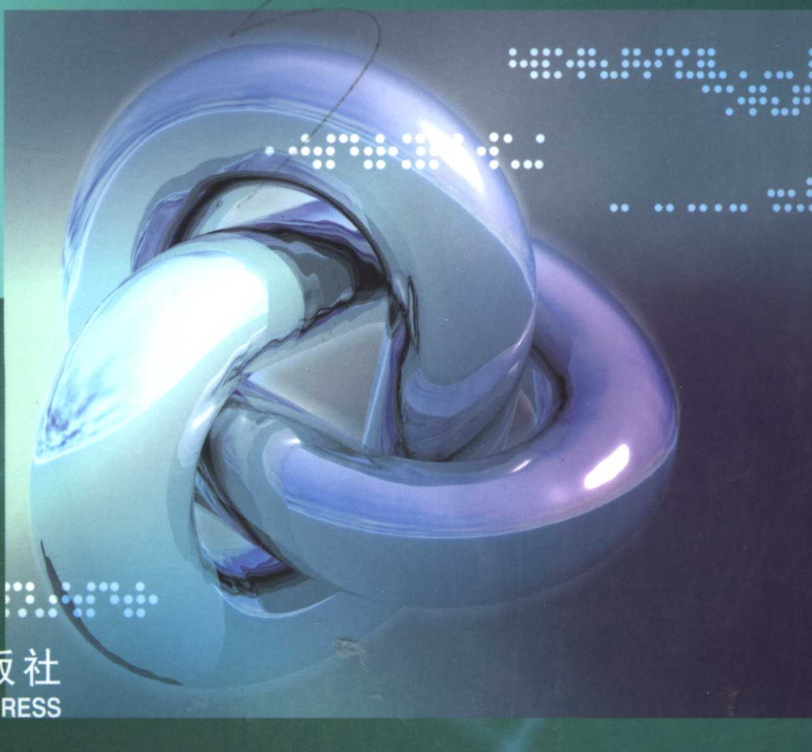
普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模引论

主编　阮晓青　周义仓



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模引论

主编　阮晓青　周义仓

编者　李　国　徐　希　戴永红　赵　冰

高等教育出版社

内容提要

本书的内容包括：初等模型，数据拟合模型，优化模型，微分方程模型，图论与网络规划模型，仿真模型，仿生学模型（遗传算法与神经网络模型），统计分析模型，随机模型，综合评价模型，经济数学模型与悖论数学模型等。数学建模的技巧与方法和大量的数学建模实例融为一体，内容生动，通俗易懂。凡具有微积分、线性代数、概率统计基础的读者，即可掌握本书基本内容。

本书可作为信息与计算科学专业的本科生学习数学建模的教材，也可作为其他理工科学生或教师研究数学模型的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模引论/阮晓青，周义仓主编. —北京：高等教育出版社，2005.7
ISBN 7-04-016630-5

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①阮...②周... Ⅲ. 数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 048504 号

策划编辑 王 瑜 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 王凌波
责任绘图 郝 林 **版式设计** 马静如 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 孔 源

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000
经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京铭成印刷有限公司

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn

开 本 787×960 1/16
印 张 17.5
字 数 320 000

版 次 2005 年 7 月第 1 版
印 次 2005 年 7 月第 1 次印刷
定 价 22.10 元

物料号 16630-00

总　序

根据教育部1998年颁布的普通高等院校专业目录，“信息与计算科学”专业被列为数学类下的一个新专业(它覆盖原有的计算数学及其应用软件、信息科学与运筹控制等专业)。这一新专业的设置很好地适应了新世纪以信息技术为核心的全球经济发展格局下的数学人才培养与专业发展的需要。然而，作为一个新专业，对其专业内涵、专业规范、教学内容与课程体系等有一个自然的认识与探索过程。教育部数学与统计学教学指导委员会数学类专业教学指导分委员会(下称教指委)经过过去两年艰苦细致的工作，对这些问题现在已有了比较明确的指导意见，发表了《关于信息与计算科学专业办学现状与专业建设相关问题的调查报告》及《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)(见《大学数学》第19卷1期(2003))。为此，全国高等学校教学研究中心在承担全国教育科学“十五”国家级规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，根据教指委所颁布的新的教学规范，组织国内各高校的专家教授，进行其子项目课题“21世纪中国高等学校信息与计算科学专业教学内容与课程体系的创新与实践”的研究与探索。为推动本专业的教材建设，该项目课题小组与高等教育出版社联合成立了“信息与计算科学专业系列教材编委会”，邀请有多年教学和科研经验的教师编写系列教材，由高等教育出版社独家出版，并冠以教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

按照新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)，信息与计算科学专业是以信息技术和计算技术的数学基础为研究对象的理科类专业。其目标是培养学生具有良好的数学基础和数学思维能力，掌握信息与计算科学基础理论、方法与技能，受到科学研究的训练，能解决信息技术和科学与工程计算中的实际问题的高级专门人才。毕业生能在科技、教育、信息产业、经济与金融等部门从事研究、教学、应用开发和管理工作，能继续攻读研究生学位。根据这一专业目标定位和落实“强基础、宽口径、重实际、有侧重、创特色”的办学指导思想，我们认为，本专业在数学基础、计算机基础、专业基础方面应该得到加强，而各学校在这三个基础方面可大体一致，但专业课(含选修课)允许各校自主选择、体现各自特点。考虑到已有大量比较成熟的数学基础与计算机基础课程教材，本次教材编写主要侧重于专业基础课与专业课(含选修课)

方面。

信息与计算科学，就其范畴与研究内容而言，是数学、计算机科学和信息工程等学科的交叉，已远远超出数学学科的范畴。但作为数学学科下的一个理科专业，信息与计算科学专业则主要研究信息技术的核心基础与运用现代计算工具高效求解科学与工程问题的数学理论与方法(或更简明地说，研究定向于信息技术与计算技术的数学基础)，这一专业定位明显地与计算机科学与信息工程专业构成区别。基于这一定位，信息与计算科学专业可包括信息科学与科学计算(计算数学)两个大的方向。科学计算方向在我国已有长期的办学经验，通常被划分为偏微分方程数值解、最优化理论与方法、数值逼近与数值代数、计算基础等学科子方向。然而，对于信息科学，它到底应该怎样划分学科子方向？应该怎样设置专业与专业基础课？所有这些都仍是正在探索的问题。

任何技术都可以认为是延伸与扩展人的某种功能的方式与方法，所以信息技术可以认为是扩展人的信息器官功能的技术。人的信息器官主要包括感觉器官、传导器官(传导神经网络)、思维器官和效应器官四大类型，其功能则主要是信息获取、信息传输、信息处理和信息应用(控制)，因而感测技术、通信技术、智能技术与控制技术通常被认为是最基本的信息技术(常称之为信息技术的四基元)，其他信息技术可认为是这四种基本技术的高阶逻辑综合或分解衍生。所以可以把信息科学理解为是“有关信息获取、信息传输、信息处理与信息控制基础的科学”。从这个意义上，我们认为：信息处理(包括图像处理、信号分析等)、信息编码与信息安全、计算智能(人工智能、模式识别等)、自动控制等可构成信息科学的主要学科子方向。这一认识也是教指委设置信息与计算科学专业信息科学方向课程的基本依据。

本系列教材正是基于以上认识，为落实新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)而组织编写的。我们相信，该系列教材的出版对缓解本专业教材的紧缺局面，对推动信息与计算科学专业的快速与健康发展会大有裨益。

从长远的角度看，为适应不同类型院校和不同层次要求的课程需求，本系列教材编委会还将不断组织教材的修订和编写新的教材，从而使本专业的教学用书做到逐步充实、完善和多样化。我们诚恳希望采用本系列教材的教师、同学们及广大读者对书中存在的问题及时指正并提出修改意见和建议。

信息与计算科学专业系列教材编委会

2003年8月31日

前　言

数学模型课程作为一门崭新的课程随着全国大学生数学建模竞赛活动的普遍开展逐渐进入大学课堂，开设本课程的院校不断增加，从形式多样的各种讲座到课时数稳定的正规课堂教学，规模不断扩大，内容不断充实；受到学生热烈欢迎。开展数学建模教学与竞赛活动，提高了学生对数学建模课程的兴趣和应用知识的能力；组织学生参加竞赛，培养了他们的竞争意识、创新意识、创新能力及团队精神。其主要表现在：通过数学建模使学生主动地、积极地去思考问题，较大地提高了学生获取知识的能力，改善了学生的知识结构，培养了学生独立地利用文献资料，统计分析，逻辑论证的能力，此外还培养了学生良好的计划组织、与人合作、协调关系、化解矛盾的能力，这些已是当今社会所需要的高素质人才必须具备的能力。

编写本书的目的，是为全国大学本科信息与计算科学专业的学生提供一本有本专业特色的、适合重点院校和一般院校不同基础信息与计算科学专业的学生学习数学建模的教材。本书也可作为其他理工科学生或教师研究数学模型的参考书。

本书由西安交通大学与深圳大学联合编撰，第一、五、十、十三、十四、十五章由阮晓青编写，第七、八章由周义仓教授编写，第二、三、四章由赵冰编写，第六章由徐希编写，第九章由戴永红编写，第十一、十二章由李国编写，全书由阮晓青统稿。

考虑到信息与计算科学本科专业的特点，本书的选材思路主要基于两点：一是配合本专业主要课程设置，专业课程中会涉及的内容，本书不再选入或少量的涉及，起到一个复习补充的作用。而一些专业课程中不会讲到的内容，选进本书较多，例如统计分析一章，没有选入假设检验与区间估计的模型，而在统计课程中，讲得不太多的回归分析模型，这里讲得较详细，更着重介绍了主成分分析与判别分析的内容；二是考虑到信息专业的同学在文科方面的知识接触较少，本书在第十章、第十五章讲了经济数学模型和数学的悖论模型，用以扩充同学们在这一方面的知识。

在本书的编著过程中，西安交通大学徐宗本教授、北京大学雷功炎教授、华南理工大学郝志峰教授等都为本书提出了好的建议，在此表示诚挚的谢意。

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第 I 章 数学模型概论

§1.1 数学模型的概念

一、数学建模

数学建模就是建立数学模型来解决各种实际问题．由于在现实世界中，我们会遇到大量的实际问题，这些问题往往不会直接地以现成的数学形式出现，这就需要我们把实际问题抽象出来，再将其尽可能地简化，通过假设变量和参数，运用一些数学方法建立变量和参数间的数学关系．这样抽象出来的数学问题就是我们所说的**数学模型**．通过数学方法对模型分析求解，最后再解释和验证所得的解，进而为解决现实问题提供数据支持和理论指导，我们把这样的过程称为**数学建模**．数学建模过程用于解决实际问题往往是多次循环、不断深化的过程，万有引力定律的建立，前后历经数百年就是一个例子．

二、为什么需要数学建模

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学，它的产生和许多重大发展都是和现实世界的生产活动和其他相关学科的需要紧密联系的．同时，数学作为认识和改造世界的强有力的工具，又促进了科学技术和生产力的发展．数学模型是在实际应用的需求中产生的，要解决实际问题通常需要建立数学模型，从这个意义上讲数学模型和数学有着同样古老的历史．17 世纪伟大的科学家牛顿在研究力学的过程中归纳总结了近代数学最重要的成果之一——微积分，并以微积分为工具推导了著名的力学定律——万有引力定律，这一成就是科学发展史上最辉煌的数学模型之一．

数学的特点不仅在于它的概念的抽象性、逻辑的严密性和结论的确定性，而且在于它的应用的广泛性．进入 20 世纪以来，数学的应用不仅在它的传统领域——物理领域(力学,电学等学科及机电,土木,冶金等工程技术)取得许多重要进展，而且迅速进入了一些新领域——非物理领域(经济,交通,人口,生态,医学,社会等领域)，产生了诸如数量经济学、数学生态学等边缘学科．

马克思认为：一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步. 世界发展到今日，随着计算机技术的迅速普及与发展，数学已经被用于生产过程及社会生活的各个方面，它已成为关系国民经济技术基础与国防，关系国家实力的重要学科. 今天的数学已经不仅仅是纯粹的理论，同时又是一种普遍可行的关键技术. 一般来说，当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时，往往都离不开数学的应用. 而在数学向现代技术转化的链条上，数学建模和在模型基础上进行的计算与模拟，处于中心环节.

三、数学建模在教学中的意义

随着时代的变迁，数学思想，数学研究的内容和方法，都在悄然发生变化. 作为教学改革的一部分，国内高校应用数学系相继开设了“数学建模”课程. 这一课程以及国内外大学生数学建模竞赛，对我国高等数学教育产生了巨大的影响.

数学建模课程的直接目的是通过介绍若干有代表性的数学模型和成功地应用数学方法，培养学生用数学语言描述及解决实际问题的能力. 但这仅仅是问题的一方面，在数学建模的过程中，应把握数学与现实世界的关系，认识到数学是人类观察与认识世界的一种独特方法，它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了理论基础与方法论指导.

数学建模课程从实际问题中归纳出所要采用的假设以及解题的线索，试验各种可能的途径，预测可能的结果，尽量引用物理、化学、生物学以及社会学的有关结论. 从而展示了一种有别于传统数学课程单纯逻辑推理的思维方式，理解到外部启示对数学思维的重大作用. 建模课程还尽量引用实际资料检测数学结果，是主观和客观的结合，它不是先验的、唯一的，结论也是相对的. 作为一门数学课程，建模还利用一切可能的机会，加深学生对数学概念和定理本质的理解，看到数学与现实密切相关、极其生动的一面.

数学建模给予学生的是一种综合训练，为了成功地解决实际问题，参与者必须对问题本身有足够的知识，并有将其抽象成数学问题、以恰当形式表述的能力. 所谓用数学语言表述问题，在实践中学习，也可以培养大学生在今后的工作中所需要的数学素养，使他们学到更活的数学，这点正是我们要强调的；督促大学生熟练使用计算机，习惯于使用计算机解决实际问题. 每年的大学生数学建模竞赛都不是由一个人独立完成，因此需要具有组织协同的能力、团队合作的精神.

数学建模作为一项教学改革课程，更全面的体现数学科学与现实世界的关系，更均衡的对待理论和应用. 有利于学生开阔眼界、开阔思路，养成正确的思维方式，对数学本质有更全面完整的理解，有助于综合素质的提高.

§1.2　数学建模的方法与步骤

建立实际问题的数学模型，尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动. 因此有人称数学建模是一种艺术，而不仅仅是一种技术. 现实世界中的实际问题是多种多样的，而且大都比较复杂，所以数学建模的方法也是多种多样的. 我们不能期望找到一种一成不变的方法来建立各种实际问题的数学模型. 但是，数学建模方法和过程也有一些共性的东西.

一、对数学模型的要求

对一个数学模型的基本要求，简单地说就是**准确，简练，正确**.

1. 准确

一个数学模型要有足够的精确度，能较准确的反映实际问题本质的性质和关系.

2. 简练

数学模型要尽可能的简单，便于处理. 模型必须作简化，不作简化，模型十分复杂难以求解甚至难以建立模型，即非实际问题本质的关系要省略，以免模型太复杂.

3. 正确

构造数学模型的理论要正确，依据要充分，推理要合法. 要充分利用科学规律来建立有关的模型.

二、数学建模的方法

数学建模的方法按大类来分，大体分为三类：

1. 机理分析法

根据人们对现实对象的了解和已有的知识，经验等，分析研究对象中各变量之间的因果关系，找出反映其内部机理的规律. 使用这种方法的前提是我们对研究对象的机理有一定的了解.

2. 测试分析法

当我们对研究对象的机理不清楚的时候，可以把研究对象视为一个“黑箱”系统. 对系统的输入输出进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析来建立模型.

3. 综合分析法

对于某些实际问题，将上述两种建模方法结合起来使用. 例如用机理分析

法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数.

三、数学建模的一般步骤

1. 形成问题

要建立现实问题的数学模型，第一步是对要解决的问题有一个十分清晰的提法. 我们遇到某个实际问题，在开始阶段问题是比较模糊的，又往往与一些相关的问题交织在一起，所以需要查阅有关文献，与熟悉具体情况的人们讨论，并深入现场调查研究. 只有掌握有关的数据资料，明确问题的背景，确切地了解建立数学模型究竟主要应达到什么目的，才能形成一个比较清晰的“问题”.

2. 假设与简化

现实世界的问题往往比较复杂，在从实际中抽象出数学问题的过程中，我们必须抓住主要因素，忽略一些次要因素，作出必要的简化，使抽象所得到的数学问题变得越来越清晰. 实际现象中哪一些因素是主要的和起支配作用的，哪一些因素是次要的，认识也就越来越清楚了. 由于问题的复杂性，抓住本质的因素，忽略次要的因素，即对现实问题做一些简化或者理想化. 应该说这是一个十分困难的问题，也是建模过程中十分关键的一步，往往不可能一次完成，需要经过多次反复才能完成.

3. 模型构成与求解

根据所作的假设，分析研究对象的因果关系，用数学语言加以刻画，就可得到所研究问题的数学描述，即构成所研究问题的数学模型. 很多情况下，我们很难获得数学模型的解析解，而只能得到它的数值解. 这就需要应用各种数值方法，包括各种数值优化方法，线性与非线性方程组的数值方法，微分方程的数值解法，各种预测、决策和概率统计方法等，以及各种应用软件系统. 当现有的数学方法还不能很好解决所归结的数学问题时，就需要针对数学模型的特点，对现有的方法进行改进或者提出新的方法以适应需要.

模型若能得到封闭形式的解的表达式固然很好，但多数场合模型必须依靠计算机数值求解. 在电子计算机相当普及的今天，数值求解是一种行之有效的方法. 因此有时对同一问题有两个模型可供选择，一个是比较简单的模型，但找不到解的解析表达式只能数值求解，另一个模型比较复杂，通过困难细致的数学处理有可能得到解的精确表达式，在这两个模型中，有时宁可选择前者；或者，即便有了精确表达式，也常常需要数值或图示结果来说明问题.

4. 模型的检验与评价

建立数学模型的主要目的在于解决现实问题，因此必须通过多种途径检验所建立的模型. 实际上，在整个数学建模乃至这个解决问题的过程中，模型都

在不断地受到检验，还要检验数学模型是否自相容并符合通常的数学逻辑规律，是否适合求解，是否会有多解或者无解等等.

最重要和困难的问题是检验模型是否反映了原来的现实问题. 模型必须反映现实，但又不等于现实. 模型必须作简化，不作简化，模型十分复杂甚至难以建立模型，而过分的简化则使模型远离现实，无法用来解决现实问题. 物理学家用“单摆”来理想化摆的运动，得到模型求解后的结论是摆将永远作规则的往复运动. 这个模型是否符合实际呢？实际的摆经过相当长一段时间最终必将静止下来. 从这一点来看似乎模型是不符合实际的. 但如果我们感兴趣的是摆在不太长时间内的运动情况，那么单摆简化的模型完全可以满足要求，考虑阻力等次要因素而把模型复杂化是大可不必的.

评价模型的根本标准是它能否准确地解决现实问题，但模型是否容易求解也是评价模型优劣的一个重要标准.

5. 模型的改进

模型在检验中不断修正逐步走向完善，除了十分简单的情形外，模型的修改几乎是不可避免的. 一旦在检验中发现问题，必须去考虑在建模时所作的假设和简化是否合理，这需要检查是否正确地描述了关于数学对象之间的相互关系和服从的客观规律. 针对发现的问题相应的修改模型，然后再次重复检验、修改，直到满意为止.

§1.3 总 结

纵观数学发展史我们可以知道，数学模型与数学有千丝万缕的联系. 数学模型的建立固然离不开数学知识，而我们对数学的认识同样离不开数学模型，例如微积分中的两个主要概念——导数与积分就产生于运动学中对变速运动速度与路程的数学模型研究.

数学建模需要丰富的知识，经验和各方面的能力. 绝大多数数学课程如数学分析、线性代数、概率论、统计分析、计算方法等都可以用来建立和求解数学模型. 用数学语言表述问题是我们要强调的；在实践中学习，培养大学生在今后的工作中所需要的数学素养，使他们学到更活的数学，这点更是我们要强调的. 模型假设、模型构造等，除了要有广博的知识和足够的经验之外，还特别需要丰富的想像力和敏锐的洞察力.

数学建模过程是一种创造性思维过程，直觉和灵感往往也起着不可忽视的作用. 当然，直觉和灵感不是凭空产生的，它需要人们具有丰富的背景知识，对问题进行反复思考和艰苦探索，对各种思维方法运用娴熟，相互讨论和思想

交锋，特别是不同专业的成员之间的探讨，此时团队精神发挥很大作用.

数学建模可以看成一门艺术，如果将数学建模与国画经典绘画艺术一比，数学就好比工笔画，数学建模就好比水墨写意，工笔画之细腻工整固然令人叹为观止，大写意几笔传神的那种磅礴大气也的确给人们以无限的遐思，这也是一种美，睿智里带几分禅味的空灵之美. 艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的，一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践. 同样，要掌握数学建模这门“艺术”，就要培养想像力和洞察力，这就必须注意两点：一要大量阅读，二要亲自动手. 后者更为重要，虽然建模不能按照严格的逻辑结构去讨论问题，不能划定这些方法的适用范围，其得到的结果也并非无可置疑，但它却是我们学习数学并用数学去解决实际问题的一种生动、有效的方法.

参考文献

[1] 唐焕文，贺明峰. 数学模型引论. 北京：高等教育出版社，1991
[2] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，1993
[3] 雷功炎. 数学模型讲义. 北京：北京大学出版社，1999

第2章
初等模型

§2.1 覆盖问题

一人买了若干块长方形瓷砖，每块大小等于方形的两块．试着铺设如图2－1－1所示图形的地面，结果弄来弄去始终无法完整铺好．问题在于用长方形瓷砖在不被分割时铺成图2－1－1所示的地面的可能性是否存在？只有可能性存在才谈得上用什么方法铺的问题．

为此，在图2－1－1上白、黑相间地染色．染白色用0表示，然后仔细观察，发现共有32个白格和30个黑格．一块长方形瓷砖可盖住一白一黑两格，所以铺上30块长方形瓷砖后（无论用什么方式），总要剩下2个白格没有铺，而一块长方形瓷砖是无法盖住2个黑格的，唯一的办法是把一块长方形瓷砖一断为二．解决铺瓷砖问题中所用方法在数学上称为“奇偶校验”，即，如果两个数都是奇数或偶数，则称具有相同的奇偶性．如果一个数是奇数，另一个数是偶数，则称具有相反的奇偶性．组合几何中会经常遇到类似的问题．

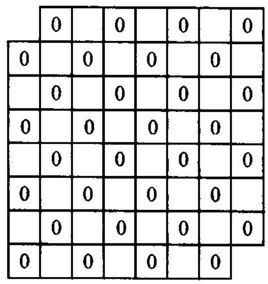


图2－1－1

在铺瓷砖问题中，同色的两个格子具有相同的奇偶性，而异色的两个格子具有相反的奇偶性；地面上铺好后，只有在剩下的两个方格具有相反的奇偶性时，才有可能把最后一块长方形瓷砖铺上．由于剩下的两个方格具有相同的奇偶性，因此无法铺上最后一块长方形瓷砖．这就从理论上证明了用30块长方形瓷砖铺好如图2－1－1所示地面是不可能的．

数学中许多著名的不可能性的证明都要用到奇偶校验．例如欧几里得证明著名的结论$\sqrt{2}$是无理数，就是用的奇偶性（读者不妨自己动手做一下）．奇偶校验在粒子物理学中也有很重要的作用，1957年美籍华人杨振宁和李政道推翻著名的“宇称守恒定律”，以其卓越的成就获得诺贝尔奖金，其中就用到了奇偶校验方法．