孤立子数学基础及量子化

徐邦清 著

里 276

原子能出版社

孤立子数学基础及量子化

徐邦清　著

中国科学技术大学
图书馆藏

原 子 能 出 版 社
1996 年

图书在版编目(CIP)数据

孤立子数学基础及量子化/徐邦清著·一北京:原子能出版社,1996.5

ISBN 7-5022-1479-8

Ⅰ·孤…　Ⅱ.徐…　Ⅲ.①孤立子-数学方法②孤立子-量子论

Ⅳ.O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 01888 号

内容简介

本书是作者近年的研究成果总结,阐述孤立子理论中的反散射变换方法的 Lax 表现与哈密顿表现,以及在 Lax 猜想和稳定性理论中建立了其数学基础理论,说明物理系统中孤立子的存在条件和孤立子的形成。同时给出了孤立子的量子化方法,讲述拓扑孤立子和非拓扑孤立子如何第一、二、三次量子化到单极子,Skyrme 子,瞬子,量子隧道(蠕虫洞)等。目前,科学家正在探索基本粒子是由上述粒子构成的。

本书可供大专院校有关专业师生以及有关科技人员参考。

©

原子能出版社出版发行

责任编辑:陈进贵

社址:北京市海淀区阜成路 43 号 邮政编码:100037

中国核情报中心复制印刷部印刷　新华书店经销

开本:787×1092 mm 1/32 印张 4.5 字数 100 千字

1996 年 5 月北京第 1 版　1996 年 5 月北京第 1 次印刷

印数:1—500

定价:9.00 元

序言

1834 年 Scott-Russell 首次观察到了浅水波中的孤立子现象，1872 年 Boussineng 首次求得孤立子解，1895 年 Korteweg-de Vries 则建立了 KdV 方程，并得到了它的周期波解，这是人们最早对孤立子的认识。

尽管人们对孤立子早有认识，但是它的巨大发展却是近 30 年内的事，这是由于电子计算机的发展，使得研究非线性场方程有了可能。工程界、数学界、物理学界的许多问题，特别是等离子体物理和粒子物理的尖端科学问题的深入研究迫切地需要建立这种理论，因而它有了今天的发展。1952 年 Perring 和 Skyrme 计算了 Sine-Gordon 方程的孤立子波解，以作为基本粒子的物理模型。不久，1965 年 Zabusky 和 Kruskal 发布了 KdV 方程的计算研究结果，显示了这些波之间的碰撞是弹性的而推动了这一研究。1967 年，Gardner，Green，Kruskal 和 Miura 发表了著名的论文，对 KdV 方程创立了近代的反散射理论，通过线性步骤求解非线性发展方程。这给非线性发展方程的困难的积分问题开辟了一条崭新的道路。

1968 年 Lax 的论文"非线性发展方程的积分和孤立子波"的发表，把孤立子理论演绎成一般的泛函形式，引入了现代人们所称的 Lax 对，为反散射变换法奠定了数学基础。1972 年 Zaharov 和 Shabat 发表了他们的出色论文，把这一方法推广到非线性薛定谔方程，是这一理论又一次大成功。这些成就促使人们从各个方向拓广这一理论，Korepin，Faddeev 等主要从事孤立子的量子理论和它在量子场论中的应用工

作。1977 年以来发表了大量的论文，着重于研究周期解，引入完全可积的哈密顿系统，发展了代数几何方法，以零曲率表示替代 Lax 表示，成果令人瞩目。

Abolwitz，Kaup，Newell，Segur(AKNS)等着重于寻求更宽广的可用反散射变换求解的非线性发展方程类，拓广这一机制。1974 年他们发表了著名的论文“反散射变换——非线性问题的傅里叶分析”。这篇文章系统地探讨了反散射变换能够求解的方程类、每一个发展方程由它所关联的线性化和一个积分微分算子确定，以及给出了反散射变换和 Backlund 变换之间的关系。傅利叶变换主要是针对线性问题和连续谱，而反散射变换则是傅利叶变换到非线性问问题和点谱的扩充。

陈省身，Drinfel'd 发展了李代数求可积系统的方法，利用方程隐蔽的代数对称性而导致方程可积，而关联到无穷维李代数(Kac Moody 代数)。

不变量、守恒律和 Backlund 变换是发展方程的重要特点。它关联着发展方程的力学本质。Miura 在这方面做了大量的工作，揭示孤立子解与守恒律的关联。

反散射方法的大意是：非线性发展方程的解的初始数据⇒Lax 对偶方程的位势⇒散射数据⇒散射数据按发展方程支配的规律随时间演化⇒反散射方法求出位势。位势即为非线性发展方程的解，在时间趋向于无穷时，方程的解渐近成孤立子。开始人们都醉心于方法的开拓。后来，Lax 发现这一理论并没有建立很严格的数学基础，存在很多问题。首先是除了个别特殊例子外，Lax 对偶方程的本征值谱的存在问题；其次是谱所相应的解(反散射谱)，能否发展成孤立子，散射数据与位势相对应的特定化问题等。如果这些问题不解决，它就不可能

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

转化于实际物理系统的实验与计算。为此，Lax 曾猜想：本征值方程若存在本征值，将存在本征速度；反过来，若解的本征速度存在，本征方程将存在本征值。我们把这一猜想拓广成物理系统中一定初始条件下是否产生孤立子的问题，并对 KdV 方程一些情况证实了这一猜想。孤立子理论的实际物理背景是宏大的，包罗万象，特别是量子理论，欲想证明粒子存在的问题，既是诱人的，又是远没有解决的。

孤立子的主要特点就是稳定性，正是这个特点，使它能反映多彩多姿的粒子世界，显示孤立子波的粒子性。众所周知，孤立子的主要标识是孤立子相互碰撞后能保持原来的形状和速度。另一种稳定性问题则是一定的初始扰动下解是否稳定，对波的粒子性表象也是十分重要的。1969 年，Lindgrenand 等对 Sine-Gordon 方程，1970 年，Jeffre 等对 KdV 方程给出了线性稳定性的证明。1972 年，Benjamin 利用不变泛函证明了 KdV 方程的非线性稳定性。1982 年，我们也得到了非线性薛定谔方程的孤立子解在初始扰动下的稳定性。当然，要形成完整的孤立子稳定性理论，还有许多工作要做。

在孤立子的数学理论发展的同时，物理学界对孤立子——这一非线性物理波主题的研究也大大深入了，规模之大，应用之广，要想较完整地叙述这一丰硕内函是困难的。我们这里叙述一些粒子物理中的研究情况及物理效应。自然界的基本粒子是一局部的能量，由相对性场论所描述。场论所描述的基本粒子是量子，而孤立子是古典场方程的解。物理上所定义的孤立子与数学上所定义的孤立子稍有差别，但是这种定义上的差别不大，物理上所定义的孤立子能把数学所定义的孤立子包括进去。因此，我们必须研究给定场论的古典孤立子解

和量子理论的扩充粒子态之间的关系。这一处理方法称为孤立子的量子化。这种量子化理论已由一些物理学家，如tHoof，李政道使用不同的技巧在1974～1975年建立起来了。这些方法相当于非相对论性量子力学到相对论性量子场论的一般化，我们连结了古典孤立子解与孤立子粒子态（基态、激发态）。量子孤立子的粒子性质，如质量或形状因子也能从相应的古典孤立子获得，孤立子量子化的困难是量子波动的紫外发散和零模问题，需要我们进一步的探索。

这些有价值的探索中诞生了瞬子物理。瞬子定义为任意给定模型的场方程的欧几里德作用的局部有效作用古典解，这样一个解的严格形式能在各种模型如量子色动力学（QCD）中获得。在古典水平上瞬子与孤立子差别不大，但是在量子场论中各自扮演的角色是十分不同的。孤立子导向扩充粒子态，而瞬子却导向了能影响真空态结构的量子隧道，夸克禁闭等。

本书主要综述了作者近年的孤立子研究成果，也包含部分李翊神、屠规彰等的研究成果，以及国内外近期研究进展和动态论文。写作过程中参考了下列书籍：Zaharov 等（1980），Ballough 和 Caudreg（1980），Ablowitz 和 Segur（1981），Rajaraman（1982），Jackiw（1977），Coleman（1979），Olive（1979），Racoon（1984），李政道（1981），Faddeev 和 Takhajan（1980）。作者深深感谢邵常贵教授、刘辽教授、李翊神教授、屠规彰教授、庄大蔚教授、郭柏林教授、侯伯元教授、孟大中教授，Dacs 教授和 Montagnini 教授，他们曾经对书中的部分材料（作者的一些科研论文）提出过有益的意见。作者还要感谢胡星标博士，他对本书的写作提出过宝贵意见。

目录

1 反散射变换方法

孤立子理论中最重要的理论是反散射变换方法。非线性波动方程的定性理论尚无完整的系统结果，求解则更困难，几乎没有人去寻找求解方法。然而，也许带有一些偶然性，由于电子计算机的数字结果的启示，Skyrme，Gardner，Green，Kruskal 和 Miura 发现了一种求解非线性发展方程的方法[1,2]，而且能求解的非线性发展方程又是物理学中、工程界中典型的有实际价值的方程，因而得到广泛的深刻的研究，产生了孤立子的概念。孤立子的发现是数学物理中的世纪性成就，这门学科正在蓬勃发展形成高科技尖端，尤其是近代物理中在认识基本粒子和揭示更深层次的客观世界有着重要的作用。本章首先给出孤立子的定义，然后以 KdV 方程为例讲述反散射变换方法。

1.1 孤立子的概念和表示

1.1.1 孤立子的定义

定义 1 波方程的仅以 $\zeta = x - ut$ 的方式依赖于 x 和 t 的解 $\varphi(\zeta)$)，其中 u 为常数，则称为迁移波(图 1)。

定义 2 一个迁移波是局部的，则称为孤立子波(图 2)。

定义 3 一个波方程的孤立子波解 $\varphi_S(x - ut)$，当与其它的孤立子波相互碰撞后，渐近地保持它的形状和速度，则称此孤立子波为孤立子(图 3)。

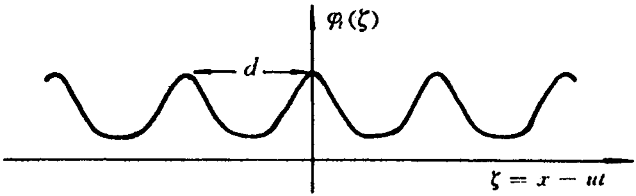

图 1　迁移波

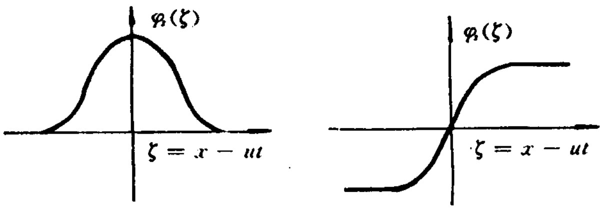

图 2　孤立子波

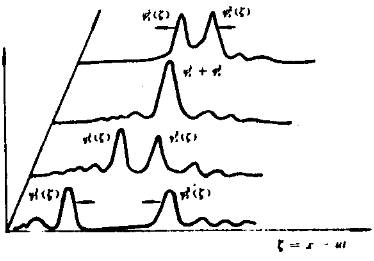

图 3　孤立子

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.1.2 Korteweg de Vries(KdV)方程和它的孤立子

KdV 方程

$$\varphi_t + \alpha\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

其中 α 是常数，首先由 Korteweg 和 de Vries 发现，以描述浅水波的传播[3]。当我们研究非线性和弥散效应时会遇着这个方程。其解能表示：(1)等离子体中的粒子——声波[4]；(2)等离子体中的磁动力学波。一般，近于双曲型的数学系统能转化成这一方程。

拉氏密度为[5]：

$$L = \frac{1}{2}\theta_x\theta_t + \frac{\alpha}{6}\theta_x^2 + \theta_x\psi_x + \frac{1}{2}\psi^2 \tag{1.2}$$

其中

$$\theta_x = \varphi \text{和} \psi = \theta_{xx}$$

1965 年，Zabusky 和 Kruskal 的数字计算结果表明这个方程的解形成孤立子，而开拓了这一新概念的广泛研究。

这个方程的双曲型的孤立子解的表示为

$$\varphi = \frac{72}{\alpha}\,\frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)^2} \tag{1.3}$$

对于大 t，方程(1.3)渐近于两个孤立子解的叠加：

$$\varphi = \frac{12K_i^2}{\alpha}\mathrm{sech}^2[K_i(x - 4K_{2i}) + \delta_i]$$

$$i = 1,2, \qquad \delta_i \text{是常数} \tag{1.4}$$

方程(1.1)的最简单的扩充是 MKdV 方程：

$$\varphi_t + \alpha\varphi^2\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

1.1.3 非线性薛定谔方程和它的孤立子

非线性薛定谔方程[6]

$$\varphi_{xx} + i\varphi_t + k|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{1.6}$$

从拉氏密度

$$L = \frac{i}{2}(\varphi\varphi_t^* - \varphi^*\varphi_t) + |\varphi_x|^2 - \frac{k}{2}|\varphi|^4 \tag{1.7}$$

导出,其中 φ^* 是 φ 的复共轭。这个方程用来描述:(1) 平面波的定义二维自聚焦;(2) 单色波的一维自调制;(3) 非线性光学的自陷现象;(4) 固体中热脉冲的传播;(5) 等离子体中的 Langmui 波;(6) 相关于超导中的 Gingburg-Landu 方程[7]。

这个方程的包络孤立子解是

$$\varphi = A_0\mathrm{sech}[\sqrt{\frac{k}{2}}\varphi_0(x - ut)]\exp[i\frac{u_e}{2}(x - u_c t)] \tag{1.8}$$

其中 u_e 和 u_c 分别是包络和载体的速度,这两个速度必须满足不等式[8]

$$u_c > 2u_e$$

1.1.4 Sine-Gordon 方程和它的孤立子

Sine-Gordon 方程

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin\varphi \tag{1.9}$$

能从下面的拉氏密度

$$L = \frac{1}{2}\varphi_x^2 - \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \cos\varphi \tag{1.10}$$

导出[9]。这一方程能用来描述:(1)结晶断层的传播;(2)磁结晶的 Bloch 墙运动;(3)基本粒子的么正理论;(4)磁流在 Josephon 线的传播[10]。

方程(1.9) 的孤立子波解,对应于 φ 的 2π 旋转的有形式[11]

$$\varphi = 4\tan^{-1}\left[\exp \pm \left(\frac{(x - ut)}{\sqrt{1 - u^2}}\right)\right] \tag{1.11}$$

其中,+号对应于正旋转,波为孤立子,而一号对应于负旋转,波为反孤立子(按反方向传播的孤立子为反孤立子)。因为总旋转数是守恒的,在任意碰撞中的孤立子和反孤立子之差也必是守恒的。另外 Sine-Gordon 方程在 Lorentz 变换下是不变的,于是它的解显示出基本粒子的很多性质。Seeger,Denth,Kochendorfer 1953 年[12] 和 Perring,Skyrme 1962 年[13] 独立地获得了孤立子-孤立子,和孤立子-反孤立子的明显表示式。

孤立子-孤立子为

$$\tan\frac{\varphi}{4}=\frac{u\sinh(x/\sqrt{1-u^2})}{\cosh(ut/\sqrt{1-u^2})} \tag{1.12}$$

和孤立子-反孤立子为

$$\tan\frac{\varphi}{4}=\frac{\sinh(ut/\sqrt{1-u^2})}{u\cosh(x/\sqrt{1-u^2})} \tag{1.13}$$

1.2 KdV 方程的反散射方法

1.2.1 Lax 对

Gordmen,Green,Kruskal,和 Miura 对孤立子理论的一个重要贡献是建立了反散射方法。这一方法使得非线性 KdV 方程能通过多步线性化步骤求解,而后由 Lax 把这个方法表示成优美而一般的形式[14],在行经到 KdV 方程的反散射法之前,我们先叙述这个一般的形式。

一般的非线性发展方程抽象地写为

$$\varphi_t = K(\varphi) \tag{1.14}$$

其中 K 指定一个线性算子,定义在某个泛函空间中。

Lax 定理:假定线性算子 $L(\varphi)$ 和 $B(\varphi)$,满足算子方程

$$iL_t = BL - LB \tag{1.15}$$

当 B 是自伴时，则算子 L 的本征值不依赖于时间 t，且本征函数满足

$$i\psi_t = B\psi \tag{1.16}$$

这是一条基本定理，该定理能关联到线性算子的散射问题。当这种情形时，通过下述步骤可以从 $\varphi(x,0)$ 找到 $\varphi(x,t)$，抽象描述如下：

1）直接散射问题：由 $\varphi(x,0)$ 出发，计算 ψ 在边界条件 $|x| = \infty$ 和初始条件 $t = 0$ 时的散射数据。

2）散射数据随时间的发展：通过方程(1.16)与算子 B 在 $x = \infty$ 的渐近形式，计算散射数据的时间发展。

3）反散射问题：从算子 L 的随时间发展后的散射数据构造出 $\varphi(x,t)$。

这个反演过程图示如下：

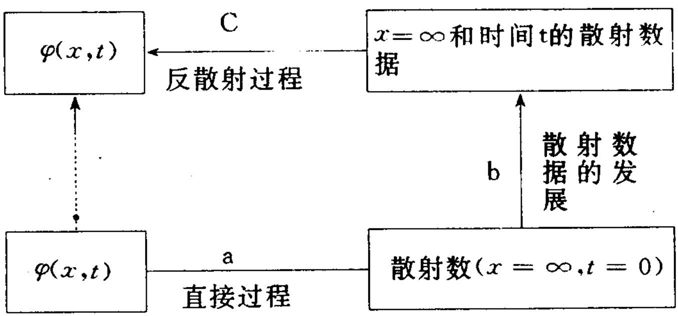

图 4　反散射图解

1.2.2 Lax 对的求解

考虑线性问题

$$LV = \zeta V \tag{1.17}$$

其中

$$L \equiv \begin{pmatrix} i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} & -iq(x,t) \\ ir(x,t) & -i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$V \equiv \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

及系数 $q(x,t)$、$r(x,t)$ 是任意的。假定算子 B 取成一般形式

$$B \equiv \begin{pmatrix} a(x,t;\xi) & b(x,t;\xi) \\ c(x,t;\xi) & -a(x,t;\xi) \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

其中 a,b,c 也是任意。方程(1.17)变成形式

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V = BV \tag{1.21}$$

关于方程(1.17)取 t 的导数和方程(1.18)取 x 的导数，要求本征值 ζ 是不依赖于时间 t 的，则给系数加上了下面的条件：

$$\frac{\partial a}{\partial x} = qc - rb \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -2\zeta b + i\frac{\partial q}{\partial t} - 2aq \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 2i\zeta c + i\frac{\partial r}{\partial t} + 2ar \tag{1.24}$$

由此选取各种系数可行一大类非线性演化方程，例如，选取

$$a = 4\zeta^3 + 2qr\zeta + irq_x - iqr_x \tag{1.25}$$

则有

$$q_t - 6rqq_x + q_{xxx} = 0 \tag{1.26}$$

$$r_t - 6rqr_x + r_{xxx} = 0 \tag{1.27}$$

当 $r = -1$ 时，得到 KdV 方程；当 $r = \pm q$ 时，得到改进 KdV 方程，选取

$$e = -\frac{1}{4\zeta}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \cosh\varphi\end{pmatrix}, r = -q = \frac{1}{2}\varphi_x \tag{1.28}$$

则生成 sine(sinh)-Gordon 方程，得

$$\varphi_{xy} = \begin{pmatrix}\sinh\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \tag{1.29}$$

当

$$a = 2r^2 + rq \tag{1.30}$$

则生成

$$ir_t + q_{xxx} - 2q^2r = 0 \tag{1.31}$$

$$iq_t - r_{xxx} - 2q^2r = 0 \tag{1.32}$$

当 $r = \pm q^*$ 时，方程(1.31)为非线性薛定谔方程。

下面将以 KdV 方程为例，详细演述反散射变换方法。

1.2.3 KdV 方程的反散射解

考虑 KdV 方程的下述的初值问题：

$$\Phi_t = 6\Phi\Phi_x - \Phi_{xxx} \tag{1.33}$$

$$\Phi(x,0) = \Phi_0(x) \tag{1.34}$$

从上面的分析可知 Lax 对偶为下述二阶微分算子 $L(t)$：

$$L(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi(x,t) \tag{1.35}$$

其中 $\Phi(x,t)$ 是 KdV 方程的解，算子 L 的本征值问题是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com