苏竞存

流形的拓扑学（上）

武 汉 大 学 出 版 社

流形的拓扑学（上册）
苏竞存
*
武汉大学出版社出版
（武昌 珞珈山）
新华书店湖北发行所发行 武汉大学印刷厂印刷
*
850×1168毫米 1/32 12.25印张 307千字
1987年7月第1版 1987年7月第1次印刷
印数：1—1000
ISBN 7-307-00096—2/O·7
统一书号：13279·9 定价：2.75元

序　　言

1980年秋我应武汉大学数学系之邀讲授拓扑学。这本书即为该课之用。在写这本讲义时，我怀有几个目的。首先，我知道在中国找到参考书比较困难，所以我打算以这个讲义作为流形理论这个基本的一般科目的方便的参考。这样，尽管在这个科目上有众多极好的参考书，我想，把种种材料集中在一起也是不无助益的。结果，读者会看到这里的材料远远超过了一学期讲授之需。事实上，这讲义分为两部分，后一部分（从第十二章起）是在我访问结束后才写成的。其次，在我看来，拓扑学的许多入门书都是按所用的方法与工具来划分的，例如分为代数拓扑、微分拓扑和微分几何等等，我有一个想法，即拓扑学中有重要性的中心问题当然是流形问题，应该围绕着这个问题而不是围绕种种技巧来写一本讲义。这里所采用的计划就是如此。我们从光滑流形的基本概念讲起，进而讨论各种专题，那时需要什么工具就介绍什么工具。这样，我们从流形上的微积分开始，因为流形就是为了搞微积分而设计的。我们先讲导数的局部理论。然后积分理论就导致一些整体性的东西，例如de Rham 定理。为了解释它，我们开始建造通常用到的同调与上同调工具，而最终以流形的同调理论的核心事实即Poincaré 对偶性结束。虽然这些东西是真正基本的而且肯定是必不可少的，然而像许多入门书那样，要想讲清楚它，通常是费劲而头疼的事。我想，如果选用一个比较实质性的主题作为最终的目标，则读者不致陷入一大堆表面的知识而不知所终，这样在启发读者上可能是有好处的。虽然不乏值得选择的

问题，我觉得 Atiyah-Singer 指标定理是一个好的主题。主要是因为我觉得它最好不过地说明了现代拓扑学对于微分方程的整体理论的用处。这里还有一些个人的考虑。我的哥哥齐民友从事偏微分方程，而他也有兴趣来学习这些材料。当然，不是单单一本讲义就能充分地解释这个定理，但是这本讲义的第二部分收集了的材料，我觉得至少可以向读者说明指标定理讲的是什么。

所以大家看到，我认为我的主要职责是一个收集者，同时花一些力量去组织这些材料。在这样做的时候，我遵循一些以我个人的看法为基础的指导原则。首先，我觉得拓扑学应该是几何而我就调强这一方面。其次，我认为拓扑学的现代发展，特别是它对其它领域的推动，集中表现在整体方面，所以，只要有可能，我就力图指出这一点。此外，现代拓扑学的语言可以是很细缴很抽象的。我试图把一般性和抽象性保持在最低限度，仅仅是适合当前问题之所需，而将种种可能的更一般的表述留待读者自学。再则，只要做得到，总是用一些例子来引导出对某种工具的需要。所有这一切，说起来当然比做起来容易，我只希望读者花时间和精力在这本讲义上之前，了解我打算做的是什么。

最后，应该感谢张敦穆先生，他仔细阅读了这本教材并且作了许多宝贵的建议。当然对这本讲义的缺点，欢迎读者指出，以便改进。

目　　录

第一章　基本定义

§1　定义和例

我们都知道，拓朴空间的提出是为了使我们能谈到定义其上的函数连续性，流形则是可以在其上作微积分的一个拓扑空间。

令 M 为一拓扑空间（为简单起见，以后凡谈到拓扑空间总是设它为 Hausdorff 空间），$f:M\to\boldsymbol{R}$ 为一实值函数，我们知道如何取导数，也知道求导是一件局部的事，所以第一个明显的条件应该是

$(M1)$：每一点 $P\in M$ 都有一邻域 U 同胚于 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开子集。

令 $\varphi:U\to\varphi(U)$ 是这种同胚之一（我们称 (U,φ) 为一个局部坐标）。于是 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\boldsymbol{R}$ 成为定义在开集 $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的函数而可以谈得上 $\tilde{f}$ 是否可微。这显然依赖于局部坐标 φ。若 ψ 是另一个局部坐标，$\check{f}=f\circ\psi^{-1}$ 可能不再可微了。为了使得可微，需另加一个条件。

$(M2)$：对任意两个局部坐标 (U,φ) 和 (V,ψ) 函数

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

都是可微的。

因为 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 $\varphi(U\cap V)$ 上而且在 $\boldsymbol{R}^n$ 中取值，所以这样说是有意义的。这里讲的可微性指的是各阶偏导数都存在，即是说 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是属于 C^∞ 类的。

我们可以用不同的办法修改这相容性条件：

1） 如果只要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 属于 C^k 类（即到 k 阶为止的偏导数存在且连续），就得到一个 C^k 类流形。

2） 特别是，C^0 意味着除(M1)以外不再加其它条件，有时称它为拓扑流形，而与此对照，称 C^∞ 流形为微分流形。

3） 我们可以要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是实解析的，即它局部地有幂级数展开式。这就是 C^ω流形。

4） 我们可以用 $\mathbf{C}^n$（n 维复空间）代替 $\boldsymbol{R}^n$，并要求 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 为复解析的（也称为全纯的），这样就得到一个 n 维复流形。注意，它也是一个 $2n$ 维实流形。

今后我们主要讨论的是 C^∞ 流形。但应该指出，C^0，C^∞ 和 C^ω 流行的理论差别很大。后面我们可以看到其中的一部分。

总括起来说，流形是特别的一类拓扑空间。它们是局部欧几里德的而又满足某些相容性条件。这种空间在许多地方都会很自然地找到。最普通的有：

1． n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是一个 n 维流形。

2． n 维球面 $S^n=\{x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,|x|=1\}$ 是一个 n 维流形.S^n 作为欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的子空间是一个拓扑流形（即局部欧），容易看出，相容性则要用球极投影计算，这也是标准的作法。

令 $p=(0,\cdots,0,1)$，$q=(0,\cdots,0,-1)$ 是北极和南极。$U=S^n-\{p\}$，$V=S^n-\{q\}$，取 $x\in U$，联接 x 和 p 的直线是 $y=\lambda x+(1-\lambda)p$。当 $\lambda=1/1-x_{n+1}$ 时，它和 $y_{n+1}=0$ 相交，定义

$$\varphi:\ U\to\boldsymbol{R}^n=\{y\in\boldsymbol{R}^{n+1}\,|\,y_{n+1}=0\}$$

为
$$\varphi(x)=\frac{x}{1-x_{n+1}}-\frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}p$$

同样，利用 q 可以作出 ψ：$V\to\boldsymbol{R}^n$。容易看到 $\varphi(U\cap V)=\boldsymbol{R}^n-\{0\}$，而且在 $\varphi(U\cap V)=\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ 上 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 正是 $\psi\circ\varphi^{-1}(y)=y/|y|^2$，当 $y\neq0$ 时，它显然是 C^∞ 的。

3. 一个重要的例子是 n 维射影空间 P^n。有几种方法来描述它。最直接的一种是：P^n是 R^{n+1} 中过原点之一切直线之集，即矢量空间 R^{n+1} 之一切一维子空间之集。R^{n+1} 中的一条直线由基底矢量 $x\neq 0$ 决定，若 x 与 y 成比例，即有一个纯量(scalar) $\lambda\neq 0$ 使 $x=\lambda y$，则 x, y 将给出相同的直线，所以 P^n 也可以这样描述，在 $R^{n+1}-\{0\}$ 中，关系 $x\sim y$ iff 有一纯量 $\lambda\neq 0$ 使 $x=\lambda y$，这显然为一等价关系。P^n 就是商空间 $R^{n+1}-\{0\}/\sim$。我们可以取

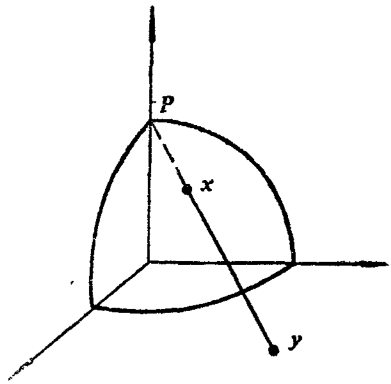

图 1—1

x, y 为单位矢量(即它们在 S^n 上)。这时 $x\sim y$ iff $x=\pm y$，也有 $P^n=S^n/\sim$。对于 $x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in R^{n+1}-\{0\}$，用 $[x]=[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 表示它在 P^n 中的等价类。把 P^n 描述成商空间给了它一个拓扑，但它是否是流形还不清楚。作法是：对每个整数 $i=0, 1, \cdots, n$。定义

$$U_i=\{[x]=[x_0, x_1, \cdots, x_n]\in P^n \mid x_i\neq 0\}$$

它是 P^n 中的一开集。定义 $\varphi:U_i\to R^n$ 为

$$\varphi_i[x_0, x_1, \cdots, x_n]=(x^0/x_i, \cdots, \widehat{x_i}/x_i, \cdots, x_m/x_i)$$

$\wedge$ 表示这一项要除去（所以只留下 n 个坐标）。这定义了局部坐标(U_i, φ_i)，$i=0, 1, \cdots, n$。若 $i\neq j$ 例如 $i<j$，容易算出

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$=(y_1/y_j, \cdots, 1/y_j, \cdots, \widehat{y_j}/y_j, \cdots, y_n/y_j)$$

$1/y_j$ 出现在第 $i+1$ 个位置上。这是一个光滑映射，因为对于 $y\in\varphi_i(U_i\cap U_j)$，总有 $y_j\neq 0$。

4. 上例的作法可以用于复空间 $\boldsymbol{C}^{n+1}$，得到的射影空间是 n 维复射影空间 $\boldsymbol{CP}^n$(所以 3 是 n 维实射影空间，有时记作 $\boldsymbol{RP}^n$)。$\boldsymbol{CP}^n$ 是复流形之一例。

还有两个一般的作法。

5. n 维流形 M 的任一开子集 $U\subset M$ 若遗传 M 的流形结构，则 U 本身也是一个 n 维流形，叫做 M 的开子流形（和以后要讨论的闭子流形相对照）。下面是一个重要的例。

令 $M(n)$ 是一切 $n\times n$ 矩阵之集。很清楚，$M(n)$ 作为一个集和 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 可以建立一一对应，并由例 1，可使 $M(n)$ 是一流形。令 $GL(n)\subset M(n)$ 是所有非异 $n\times n$ 矩阵之集。矩阵 A 非异 iff 其行列式 $\det(A)\neq 0$，因为 $\det(A)$ 显然是 A 的连续函数，故 $GL(n)\subset M(n)$ 是开的，$GL(n)$ 在矩阵乘法下又是一个群。这是Lie 群的重要例子。

6. 若 M 是一个 k 维流形，N 是一个 l 维流形，其积可以自然地做成一个 $k+l$ 维流形。只要在 M 和 N 中各取坐标 (U,φ)和 (V,ψ)，就可以作出 $M\times N$ 的一个坐标为

$$U\times V\xrightarrow{\varphi\times\psi}\boldsymbol{R}^k\times\boldsymbol{R}^l=\boldsymbol{R}^{k+l}$$

这些例子是否真正不同？从纯拓扑的观点看，流形是一个有很好的局部性质的拓扑空间，比如说，我们知道它是局部紧的，局部连通的等等。但这些性质不能把它们区分开来（说到底，所有的流形都有这样的性质）。要把它们区分开来，就要用整体性质。例如，$\boldsymbol{R}^n$ 和 S^n 不同，因为容易看到，一个是紧的，另一个不是。但是 S^n 和 $\boldsymbol{P}^n$（都紧）或 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 和 $GL(n)$（都不紧）又怎样呢？进一步观察，得到 S^2 和 $\boldsymbol{P}^2$ 是不一样的。S^2 只是一个

球面，P^2 有一种描述：P^2 可以从 S^2 中将它的对径点 $x \in S^2$ 和 $-x$ 等同(identify)起来而得到。所以如果取上半球的 x，就可以抛掉下半球的 $-x$。但赤道上的点 x 必须要与 $-x$ 重合，如果

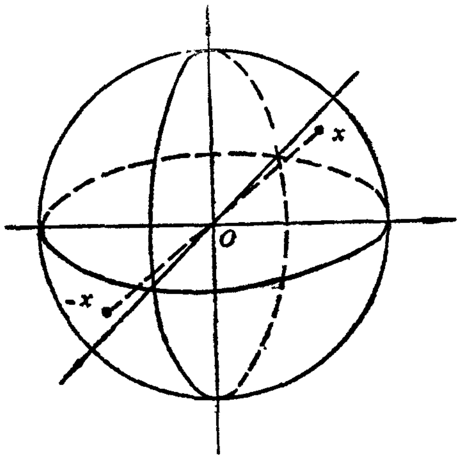

图 1—2

真正想实现这样的重合，我们就会发现，我们不能想象出它。这句话的意思是说，这种重合不可能在 R^3 中物理地实现（但是用理解力却很容易做到）也就是说 P^2 不能嵌入在 R^3 中，既然 S^2 显然地可以嵌入在 R^3 中，它就和 P^2 不一样了。这并不是 S^2 和 P^2 不同胚的一个证明，只是一种可信的论证，它指出作为一个一般性的拓扑问题，不容易判断两个已给的空间同胚与否（用上面论证可以轻易地使你信服 P^1 和 S^1 是一样的）。

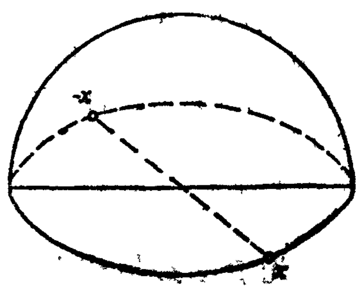

图 1—3

我们所需要的是拓扑空间的一些系统的整体不变量。迄今为止，这一类不变量中最有用的是同调不变量，以后我们会用很多时间讨论它。

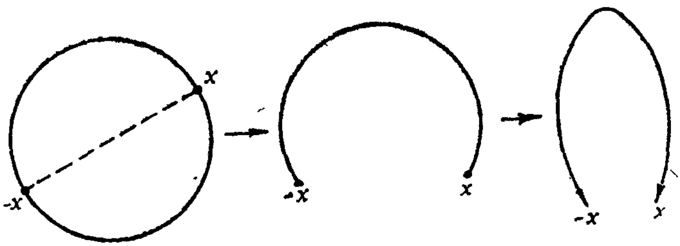

图 1—4

我们可以作一个局部的论断：不同维数的流形是不同的。这是以下定理的推论：

定理 （区域不变性） 若 $n \neq m$，$\boldsymbol{R}^n$ 的开集不能同胚于 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集。

这个定理虽然直观上很有道理，证起来并不容易。我们在 $n=1$ 的特例下讨论它。关键是下面的

引理 $\boldsymbol{R}^1$ 的开集 U 必是相互分离的开区间之并。特别是，$\boldsymbol{R}^1$ 的连通开集 U 就是一个开区间。

若开集 $V \subset \boldsymbol{R}^m$ 同胚于开集 $W \subset \boldsymbol{R}^1$，我们可以取一个开的小圆盘 (disk) $D^m \subset V$，由引理它必然同胚于 $\boldsymbol{R}^1$ 中一个开区间。这是不可能的，因为开区间在除去一点后是不连通的，但 D^m 当 $m>1$ 时却不如此。不变性定理的完整的证明正是基于连通性的概念，但却要以更细致得多的涉及同调的方式来陈述。

§2 光滑函数与光滑映射

我们一开始就说过，光滑流形是这样的空间，在它上面可以

讨论光滑函数。做法是很清楚的：令 M，N 是光滑流形，$f:M\to N$。我们说 f 在 $P\in M$ 点邻近是光滑的，如果有 P 点附近的局部坐标 (U,φ) 和 $Q=f(P)$ 点附近的局部坐标 (V,ψ) 使映射 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(P)$ 邻近光滑。这是有意义的，因为我们谈的是欧氏空间之间的映射。相容性保证了这定义与所用的局部坐标无关。特别若是 $N=\boldsymbol{R}$，我们就不需要 ψ 而说有一个光滑函数 $f:M\to\boldsymbol{R}$，$\widetilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 是 f 的一个局部表示。若 $\{(U_i,\varphi_i\}$ 是复盖 M 的一族局部坐标，就有定义在 $\varphi_i(U_i)$ 上的局部表示 $\widetilde{f}_i=f\circ\varphi_i^{-1}$。这些函数之间有以下关系

$$\widetilde{f}_i=\widetilde{f}_j\circ\varphi_{ji}$$

$\varphi_{ji}=\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$ 称为局部坐标的迁移函数(transition function)。反之，若函数 $\widetilde{f}_i:\varphi_i(U_i)\to\boldsymbol{R}$ 并使上述相容性条件成立，则定义在 U_i 上的局部函数 $\widetilde{f}_i\circ\varphi_i$ 在 $U_i\cap U_j$ 上是相互协调的，从而定义了一个整体函数 f。整体的函数时常是这样从相容的局部的东西"粘"起来的。既然 $\widetilde{f}_i$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $\varphi_i(U_i)\subset\boldsymbol{R}^n$ 上的，这就是经典的情况。但是，采用整体的观点能对问题得到更好的展望，举例如下：

复变函数论中经典的 Liouville 定理指出，在平面 C 上全纯而且有界的函数必定是常数(想到代数学的基本定理可以由此推出，你们会同意这是一个重要的定理)。下面是经典的证法。将 f 展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

它在全平面上收敛，取一个以 $z=0$ 为心，r 为半径的圆 R，有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

若 $|f(z)|\leqslant M$，很容易估计出

$$|a_n|\leqslant\frac{M}{r^n}$$

既然 r 是任意的，当 $n>1$ 时有 $a_n=0$，即 $f(z)=a_0$ 是常数。

我们要把 Liouville 定理解释为关于整体函数的一般事实。首先回顾一下可去奇点。

引理 若 $g(z)$ 在原点的邻域 U 中全纯但原点除外（即在 $U-\{0\}$ 中全纯）而且当 $z\to 0$ 时 $zg(z)\to 0$，则 $g(z)$ 可拓展为 U 上的全纯函数

证 拓展如下

$$g(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_R\frac{g(z)}{z}dz$$

R 是围绕 O 的圆（例如参看 Ahlfors[1]P.100，中译本 P.122）

把 S^2 看成 Riemann 球 $\cup\{\infty\}$，它有局部坐标 (U_1, φ_1)，(U_2, φ_2)，其中

$$U_1=C,\ \varphi_1:\ U_1\to C \text{ 为恒等映射。}$$

$$U_2=(C-\{0\})\cup\{\infty\},\ \varphi_2:\ U_2\to C$$

定义为
$$\varphi_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z}, & z\in C-\{0\}\\ 0, & z=\infty\end{cases}$$

我们看到，在 $\varphi_1(U_1\cap U_2)=C-\{0\}$ 上，迁移函数 $\varphi_{21}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$

正是
$$\varphi_{21}(z)=1/z,\ z\in C-\{0\}$$

因为在 $C-\{0\}$ 上 $z\neq 0$，φ_{21} 是全纯的，这就使 S^2 成为一个复流形（Riemann 球）。

若 f 在全平面 C 上全纯，则它在 $\varphi_1(U_1)$ 上定义局部函数 f_1。利用相容性，在 $\varphi_2(U_1\cap U_2)=C-\{0\}$ 上定义 f_2 为

$$f_2(z)=f_1\circ\varphi_{12}(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$$

因为 f 有界，所以条件

$$\lim_{z\to} zf_2(z)=0$$

显然成立。于是 f_2 可拓展到 $\varphi_2(U_2)$ 上。(f_1，f_2) 定义一个 S^2 上的整体全纯函数 F： $S^2\to C$

然而紧复流形上的任意整体全纯函数必定是一常数。因为一方面这种函数之模必有最大值（紧性），另一方面，极值原理指出，任意的局部极大都不可能存在。这个例也表明了全纯理论和光滑理论根本不同。在紧光滑流形上当然有许多非常值的整体光滑函数。

我们又看到，已给一个光滑流形 M，笛卡尔乘积 $M\times M$ 也可构成光滑流形。

定义 Lie 群 G 既是一个群，作为一个空间又是光滑流形。而且群运算

$$(G-1)\qquad G\times G\to G,\ (g_1, g_2)\longmapsto g_1g_2$$

$$(G-2)\qquad G\longrightarrow G,\ g\longmapsto g^{-1}$$

是光滑映射。

例如 $G=GL(n)$ 是一个 Lie 群，条件 $(G-1)$ 可从熟知的矩阵乘法公式

$$(AB)_{ij}=\sum_k A_{ik}B_{kj}$$

得出，$(AB)_{ij}$ 是 A_{ik} 和 B_{kj} 的光滑函数。

现在我们可以形式地定义光滑流形的范畴：对光滑映射 f: $M\to N$ 若有另一光滑映射 g: $N\to M$ 使 $f\circ g=\mathrm{id}$ on N，$g\circ f=\mathrm{id}$ on M，则 f 称为微分同胚（diffeomorphism）。这就是光滑