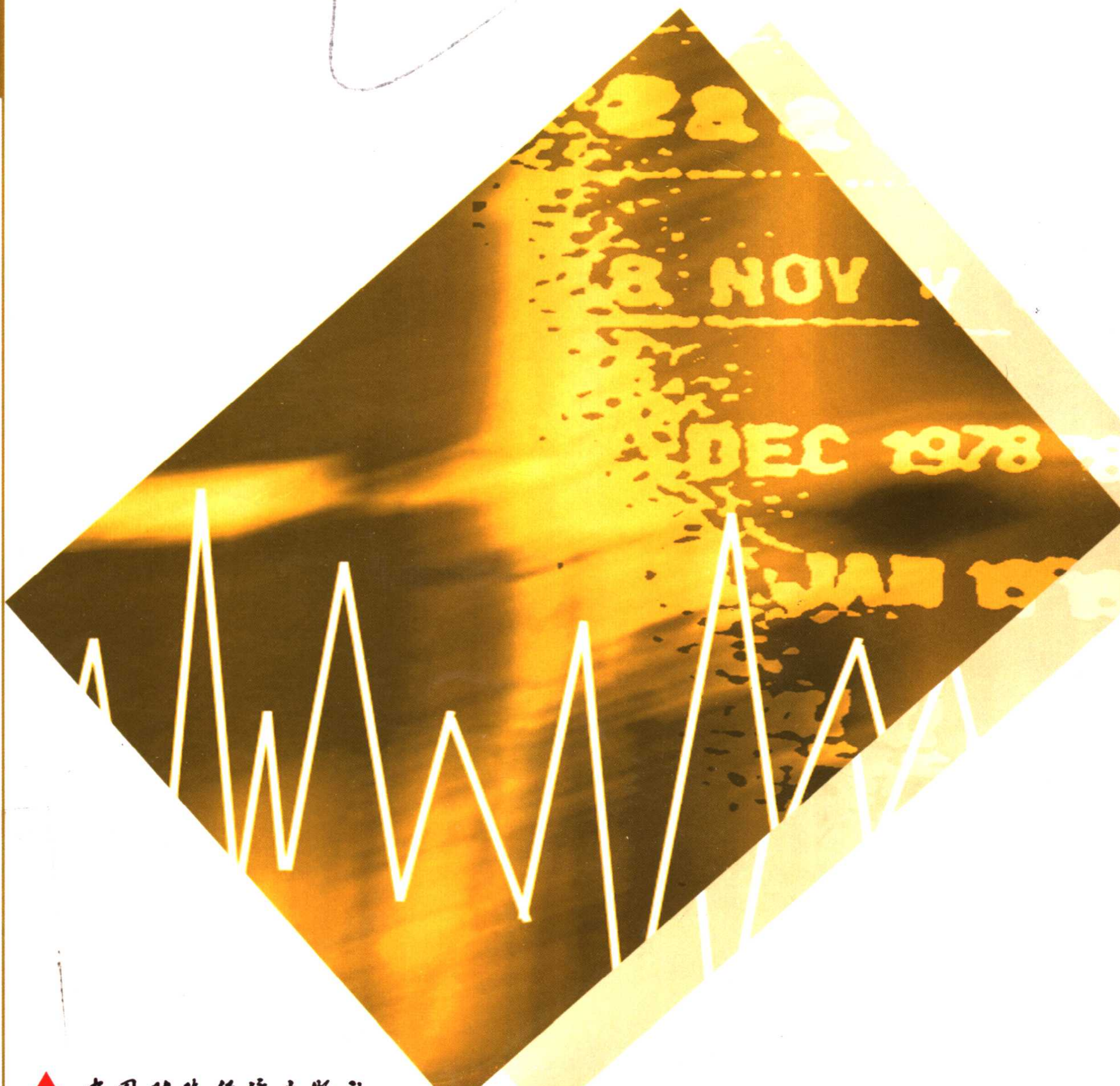
风险管理与保险精算系列教材

LI XI LUN

# 利息论

李勇权/编 著




中国财政经济出版社

风险管理与保险精算系列教材

# 利息论

李勇权　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

利息论/李勇权编著．—北京：中国财政经济出版社，2005.9
（风险管理与保险精算系列教材）
ISBN 7－5005－8554－3

Ⅰ．利…　Ⅱ．李…　Ⅲ．利息－理论研究－教材　Ⅳ．F032.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 099250 号

中国财政经济出版社 出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　16.75 印张　404 000 字
2005 年 10 月第 1 版　2005 年 10 月北京第 1 次印刷
定价：29.00 元
ISBN 7－5005－8554－3/F·7450
（图书出现印装问题，本社负责调换）

# 目　录

Contents


**第一章　利息的基本概念** ………… (1)

1.1　利息度量 ………… (2)

1.2　实质利率 ………… (4)

1.3　单利和复利 ………… (5)

1.4　实质贴现率 ………… (7)

1.5　名义利率和名义贴现率 ………… (11)

1.6　利息强度 ………… (14)

1.7　价值等式 ………… (19)

1.8　投资期的确定 ………… (21)

1.9　未知时间问题 ………… (22)

1.10　未知利率问题 ………… (25)

习题一 ………… (26)

**第二章　年金** ………… (30)

2.1　期末付年金 ………… (30)

2.2　期初付年金 ………… (34)

2.3　永续年金 ………… (39)

2.4　非标准期的年金问题 ………… (40)

2.5　年金的未知利率问题 ………… (44)

2.6　变利率年金 ………… (50)

2.7　付款频率与计息频率不同的年金 ………… (52)

2.8　基本变额年金 ………… (61)

2.9　更一般的变额年金 ………… (67)

2.10　连续年金 ………… (69)

习题二 ………… (72)

**第三章　收益率** ………… (76)

3.1　贴现现金流分析法 ………… (77)

3.2 收益率的定义 …………………………………………………………… (79)
3.3 收益率的惟一存在性 ……………………………………………………… (81)
3.4 再投资收益率 …………………………………………………………… (84)
3.5 基金收益率的近似计算 …………………………………………………… (88)
3.6 时间加权收益率 …………………………………………………………… (92)
3.7 投资组合法与投资年度法 ………………………………………………… (96)
3.8 资本预算 ………………………………………………………………… (100)
习题三…………………………………………………………………………… (103)

**第四章 分期偿还与偿债基金**……………………………………………………… (107)
4.1 未偿还贷款余额 …………………………………………………………… (107)
4.2 分期偿还表 ……………………………………………………………… (110)
4.3 偿还频率与计息频率不同的分期偿还表 ……………………………… (115)
4.4 变额偿还支付 …………………………………………………………… (117)
4.5 连续偿还的分期偿还表 …………………………………………………… (120)
4.6 诚实信贷 ………………………………………………………………… (122)
4.7 不动产抵押贷款 …………………………………………………………… (125)
4.8 偿债基金 ………………………………………………………………… (128)
4.9 支付频率与计息频率不同的偿债基金法 ……………………………… (132)
4.10 变额偿还的偿债基金………………………………………………………… (133)
习题四…………………………………………………………………………… (136)

**第五章 债券与其他证券**……………………………………………………………… (140)
5.1 债券的定价 ……………………………………………………………… (140)
5.2 溢价与折扣 ……………………………………………………………… (143)
5.3 付息日之间债券的价值 …………………………………………………… (147)
5.4 收益率的确定 …………………………………………………………… (150)
5.5 通知偿还债券 …………………………………………………………… (153)
5.6 系列债券 ………………………………………………………………… (155)
5.7 债券讨论的一般情况 ……………………………………………………… (156)
5.8 其他证券 ………………………………………………………………… (157)
习题五…………………………………………………………………………… (163)

**第六章 其他的利息应用分析**………………………………………………………… (167)
6.1 APR 的近似方法 ………………………………………………………… (167)
6.2 折旧方法 ………………………………………………………………… (173)
6.3 投资成本 ………………………………………………………………… (179)
6.4 卖空 ……………………………………………………………………… (180)
6.5 利率与通货膨胀率 ………………………………………………………… (182)

6.6　利率风险和不确定性利率 …………………………………………………… (184)
6.7　利率的期限结构 …………………………………………………… (187)
6.8　利率假设 …………………………………………………… (189)
6.9　久期 …………………………………………………… (190)
6.10　免疫 …………………………………………………… (193)
6.11　资产和负债的匹配 …………………………………………………… (197)
习题六 …………………………………………………… (199)

**第七章　利息论的进一步经济学分析** …………………………………… (204)
7.1　利息的本质 …………………………………………………… (204)
7.2　利率水平的确定 …………………………………………………… (210)
7.3　利率的种类 …………………………………………………… (211)
7.4　利率的作用机制 …………………………………………………… (211)
7.5　利率杠杆的功能 …………………………………………………… (212)

**附　录** …………………………………………………… (215)
附录1　等价利率表 …………………………………………………… (217)
附录2　利息因子表 …………………………………………………… (219)
附录3　日期序数表 …………………………………………………… (251)
附录4　分期偿还表 …………………………………………………… (252)

**后　记** …………………………………………………… (258)

# 第一章

# 利息的基本概念

通常意义上，利息是指因存款、放款而得到的本金以外的钱。然而，从严格的学术意义上讲，利息又是一个非常复杂的概念。到目前为止，学术界还不能给出一个得到完全认可的利息的定义，这表明学术界对它还没有形成一致的认识。关于利息本质问题的讨论不是本书的主要目的，本书主要讨论测量和比较利息的方法，介绍如何“用尺度、数字、衡量、处置”利息。事实上，同经济学的经典著作相比，本书更多讨论的是微观的、具体的东西，是一些具体的投资项目的分析，而不是针对“利息”原理的一般性讨论。因此，在本书中，利息是指投资者从其投资项目中得到的回报与他所投入资金之间的差额。

理论上，资金和利息不必均为货币，例如，甲某日将100担谷子借给乙，一年后，乙归还105担谷子，多出的5担谷子即为利息。资金和利息也不必具有相同的形式，例如，A太太将吸尘器借给B太太使用，作为答谢，B太太在还吸尘器时可能送给A太太几支打毛衣的针。这里，“吸尘器”为资金，而作为答谢的“几支打毛衣的针”即为利息。

在实际生活中，利息以非货币的形式出现还可能有特别的好处。如20世纪70年代中期，美国科罗拉多州的包洛德市银行为了吸引储户，就曾使用各式步枪作为利息支付给存款客户。20世纪80年代中期，美国伊利诺斯州汉瑞司堡市的第一信托银行对存款到期者以精致的手枪作为利息支付。根据不同的存款金额与时间，银行支付的枪支类型有所不同。如一个储户在该行存款2000美元，定期10年，期满后该储户便可挑选一支小巧玲珑的密司牌或温落牌手枪，价值相当于1300美元；一张定期2年、8000美元的存单，期满后可得价值为1300美元一套的3支小手枪。这种以手枪代替利息的存款业务颇为兴盛，第一信托银行开办两年后就拉到了1000多个客户。

尽管资金和利息均不必为货币，然而，在几乎所有的实际应用中，资金和利息都可以用货币来表示。为了讨论方便，本书在所有问题的讨论中，资金和利息均以货币的形式出现。

# 1.1 利息度量

一般说来，任何一项普通的金融业务都可看做是一方（投资者）投资一定数量的资金以求得产生一定量的利息的活动。因此，利息的多少是衡量该项业务好坏的一个重要指标。由此可见，对利息的度量对评价投资项目十分重要。

在给出利息的几个基本度量方式前，先引入几个基本的概念：

我们把每项业务开始时投资的金额称为本金，而把业务开始一定时期后收到的总金额称为该时刻的积累值（或终值）。显然，积累值与本金的差额就是这一时期的利息金额。

这里暂时假定，一旦给定了本金金额，则在任何时刻的积累值均可确定，并假定在投资期间不再加入或抽回本金。也就是说，该投资在数额上的任何变化全部是由于利息的影响而造成的。我们称这种金融业务模型为一次借贷模型。当然，以后我们将放宽这一假设，允许在投资期间加入或抽回资金。

很显然，在一次借贷模型假设下，决定积累值的两个主要因素分别是本金金额和从投资日算起的时间长度。理论上，时间长度的单位可以有很多，例如日、周、月、季、半年、10年等，但是在实际中，最常用的时间单位是年。一般地，我们将用来度量时间的单位统称为“度量期”或“期”。在本书以后的讨论中，一个度量期一般为一年。因此除非特别声明，均可以将后文中的一个度量期理解为一年。

考虑投资一单位的本金。我们用函数 $a(t)$ 来表示该（单位本金的）投资在时刻 t 的积累值。并称之为积累函数。显然，$a(0)=1$。考虑到利息的因素，我们通常认为 $a(t)$ 为一个单增函数。$a(t)$ 为减函数，则意味着利息为负，这种情况也可能出现。例如，亏本的生意就意味着产生了负的利息。另外，在实务中偶尔也有利息为零的情况发生，这时积累函数就表现为一个常值函数了。

积累函数 $a(t)$ 有时也被称为 $t$ 期积累因子，因为它是单位本金在 $t$ 期末的积累值。特别地，当 $t=1$ 时，简称 $a(1)$ 为积累因子。

$a(t)$ 一般为连续函数。然而，有时 $a(t)$ 也可能是间断的，例如，利息只有到付息日时才产生的情形就是如此。

图 1-1 显示了几种主要的积累因子的图形。图 1-1（A）是一种线性的形式，图 1-1（B）是非线性的、指数形式的图形，图 1-1（C）是一条水平线，表示没有利息产生的情况，图 1-1（D）表示利息不是连续地自增，而是离散地增加的情况，它表示在利息支付日之间没有利息产生。

对于投资本金不为 1 的情况，我们引入一个总量函数 $A(t)$，用来表示在 0 时的投资 K 在 $t$ 时的积累值，即：

$$A(t)=K\times a(t) \tag{1-1}$$

及

$$A(0)=K$$

显然，总量函数 $A(t)$ 实际上总与积累因子 $a(t)$ 成正比，比例系数就是在 0 时的投

资本金。因此，它们的性质完全类似。

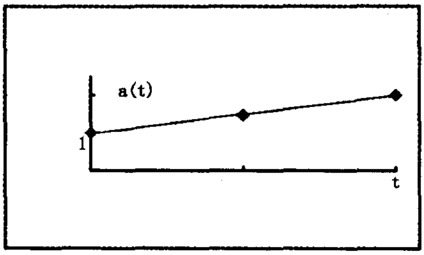



图1-1(A)

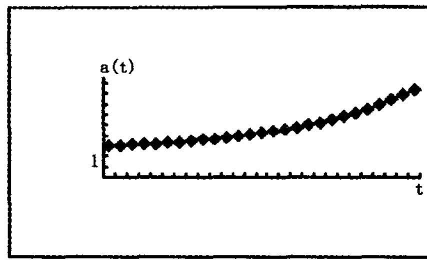



图1-1(B)

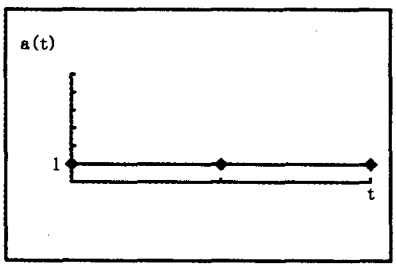



图1-1(C)

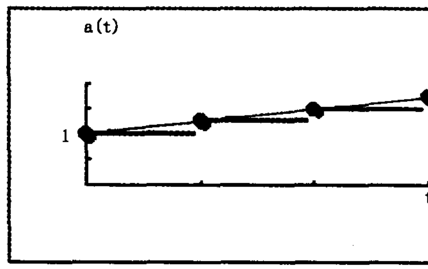



图1-1(D)

图 1－1 四种常见积累函数的图形

既然0时（现在）投资的一元钱在 $t$ 时的积累值为 $a(t)$，那么，一个相应的问题是，要在 $t$ 时积累到1元钱，需要在现在投资多少？我们称为了在未来某个时候得到某笔钱而需要在现在付出的款项为未来得到的款项的现值。

为此，我们定义如下的贴现函数 $a^{-1}(t)$：$a^{-1}(t)$ 为 $t$ 时的1元钱在0时的现值。

$a^{-1}(t)$ 也被称为 $t$ 期贴现因子。类似地，把一期贴现因子 $a^{-1}(1)$ 简称为贴现因子，并简记为 $v$。很显然，对于某一特定的业务，如果该业务的 $t$ 期积累因子为 $a(t)$，那么，该业务的 $t$ 期贴现因子 $a^{-1}(t)=1/a(t)$，反之，如果已知 $t$ 期贴现因子为 $a^{-1}(t)$，那么，相应的 $t$ 期积累因子 $a(t)=1/a^{-1}(t)$。这也是为什么我们用 $a^{-1}(t)$ 作为贴现函数符号的一个原因。

从上述定义中可以看出，“积累”与“贴现”表示的是时间方向相反的两种过程，$a(t)$为0时投资的1在t期末的积累值，对应的是顺着时间的方向；而 $a^{-1}(t)$ 是在 $t$ 期末支付1的现值，对应的是逆着时间的方向。

一般地，“积累值”只与过去的付款有关；“现值”只与将来的付款有关；而对于既可能与过去的付款有关，又可能与将来的付款有关的值，或者说时间方向不明确或无须强调的情况，可以使用“当前值”这个词。即当前值可以在两种时间方向的情况下使用，而积累值和贴现值则只可以在相应的时间方向的情况下使用。

本书用大写字母I表示利息。用 $I_n$ 记某项投资从投资日起第 $n$ 个度量期（即 $n-1$ 到 $n$ 时之间）所赚得的利息金额，假设投资本金为P，则：

$$I_n = A(n) - A(n-1) = P\times a(n) - P\times a(n-1)$$

$$= P\times[a(n) - a(n-1)] \qquad \text{对整数 } n\geq 1 \qquad (1-2A)$$

而 $n$ 个时期上总的利息金额则为：

$$I = A(n) - A(0) = P\times a(n) - P\times a(0) = P\times[a(n) - 1] = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad (1-2B)$$

需要注意的是，利息金额 $I_n$ 或 I 对应的都是某一个时间区间，它们表示的是在一段时期上所得利息的量，而积累函数 $a(t)$ 对应的则是某个时间点，表示的是最初投资的本金（1 元钱）在某个特定时刻（$t$ 时）的积累量。

由式（1-2A）、（1-2B）可以看出，利息金额的大小依赖于投资时期的长短和投资本金的大小。一般来说，投资本金越多，利息金额将越大；投资时期越长，利息金额也将越大。因此，如果只知道某项投资赚得的利息金额，似乎并不能反映出比较准确的信息。如当我们听到说某项投资赚了 1 万元利息时，我们并不能对这项投资的好坏有比较清晰的认识，因为我们还需要知道这项投资动用的本金和投资时期的长短。如果是动用了 1 万元的本金，只花了一年时间，那么这项投资肯定比动用了 10 万元的本金、花费 10 年时间的投资更有吸引力。

因此，要想比较准确、全面地反映出某项投资的信息，只有利息金额的绝对量是不够的。为此，我们引入以下相对的利息量——利率。

所谓利率，是利息与本金的一种比率，其大小相当于单位本金在一个度量期上赚得的利息金额。用公式表示为：

利率 = 利息/本金 (1-3)

从形式上看，利率是一种无单位的数值，它通常以一个百分比的形式出现，如通常我们会说，某某利率为 10%、某某利率为 4%等。但是，需要指出的是，利率还是伴随着某种度量期出现的，本书约定这种度量期一般为一年。也就是说，本书后文中如果没有特别声明，均理解一个度量期为一年。

在实际经济活动中，人们根据不同的需要使用多种不同的利率。

## 1.2 实质利率

某一度量期上的实质利率是指该度量期内得到的利息金额与此度量期开始时投资本金金额之比。实质利率通常用字母 $i$ 表示。

根据定义，我们有：

$$i = \frac{I_1}{A(0)} = \frac{P\times a(1) - P}{P} = a(1) - 1 \quad (1-4)$$

式中，$A(0) = P$ 为在 0 时投资的本金；$i$ 为从 0 到 1 期间的实质利率。如果投资时期较长，整个投资期间可以分成多个度量期，那么可以分别定义各个度量期的实质利率。这时，用 $i_n$ 记从投资日算起第 $n$ 个度量期的实质利率，有：

$$i_n = \frac{P\times a(n) - P\times a(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{P\times a(n-1)} \qquad n\geq 1 \text{ 为整数} \quad (1-5)$$

式中，$A(n-1) = Pa(n-1)$ 为投资本金到 $n-1$ 时（第 $n$ 期的期初）的积累值，自

然地，这个值成为了第 $n$ 期的投资本金。

按照式（1-5）的记法，式（1-4）中的 $i$ 也可以记为 $i_1$。

**[例 1-1]** 某人到银行存入 1000 元，第一年末其存折上的余额为 1050 元，第二年末其存折上的余额为 1100 元，问第一年、第二年银行存款的实质利率分别是多少？

解：

由题意可知，$A(0)=P=1000$（元）　$A(1)=P\times a(1)=1050$（元）

$A(2)=P\times a(2)=1100$（元）

因此，$I_1=A(1)-A(0)=50$（元）　$I_2=A(2)-A(1)=50$（元）

$$i_1=\frac{I_1}{A(0)}=\frac{50}{1000}=5\% \quad i_2=\frac{I_2}{A(1)}=\frac{50}{1050}=4.762\%$$

故第一年的实质利率为 5%，第二年的实质利率为 4.762%。

**[例 1-2]** 某人借款 1 万元，为期一年，年实质利率为 10%。问一年后，此人需要还款多少？其中利息为多少？

解：

由题意可知，$A(0)=P=10000$（元）

$A(1)=P\times a(1)=P\times(1+i)=10000\times(1+10\%)=11000$（元）

$I_1=A(1)-A(0)=1000$（元）

故一年后，此人将得到的还款金额为 11000 元，其中 1000 元为利息。

## 1.3 单利和复利

实质利率 $i$ 是一种最为常见、也是最为重要的利率，特别是一年期的情况，实务中遇到的利率多为实质利率，如银行一年期存贷款的利率、个人借贷利率等。实质利率针对的是某一个度量期，若投资期为多个或非整数个度量期，则需要有一定的方式来进行利息的度量。其中两种重要的度量方式就是所谓的单利和复利。

考虑在 0 时投资的一单位本金：

(1) 如果其在 $t$ 时的积累值为：

$$a(t)=1+it \tag{1-6}$$

其中，$i$ 为某常数。那么，我们就说该项投资以单利 $i$ 计息，并将这种计息方式称为单利（计息方式）。

(2) 如果其在 $t$ 时的积累值为：

$$a(t)=(1+i)^t \tag{1-7}$$

那么，我们就说该项投资以复利 $i$ 计息，这种计息方式称为复利。

由上述定义可以发现：

第一，若以单利 $i$ 计息，那么，对于单位本金而言，在投资期间，每一度量期产生的利息均为常数 $i$。根据实质利率的定义，我们可以讨论在单利 $i$ 下各投资时期的实质利率。

由定义可知，对于整数 $n\geqslant1$，第 $n$ 期的实质利率为：

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)}$$
$$= \frac{(1+in) - [1+i(n-1)]}{1+i(n-1)}$$
$$= \frac{i}{1+i(n-1)} \tag{1-8A}$$

显然，此时 $i_n$ 关于 $n$ 单调递减。也就是说，常数的单利意味着递减的实质利率。

第二，若以复利 $i$ 计息，那么，在投资期间，不同时期将产生不同量的利息。事实上，

$$I_n = a(n) - a(n-1) = (1+i)^n - (1+i)^{n-1} = i(1+i)^{n-1}$$
$$= ia(n-1)$$

显然，$I_n$ 关于 $n$ 单调递增。对于每期的实质利率，有：

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{I_n}{a(n-1)} = i \tag{1-8B}$$

上式表明，常数的复利意味着常数的实质利率，而且二者是相等的。这是一个非常重要的结果，它表明，虽然定义不同，但是复利利率与实质利率是一致的。

比较单利和复利可以发现，单利具有这样的性质：利息并不作为投资本金而再赚取利息；而对复利来讲，在任何时候，本金和到该时为止得到的利息都用来投资以赚取更多的利息，也就是民间所说的“利滚利”。

由积累函数看，相同数值的单利和复利在不同时期的大小关系是不同的：对于单个度量期，它们产生的结果是相同的；对于较长时期，由于 $t \geq 1$ 时有 $(1+i)^t \geq 1 + it$，所以复利比单利产生更大的积累值；而对于较短时期则相反，因为 $t \leq 1$ 时，$(1+i)^t \leq 1 + it$。证明留做练习。

单利和复利的另一个差别是它们的增长形式不同。就单利而言，它在同样长时期增长的绝对金额为常数；而对复利来说，它增长的相对比率保持为常数。用符号来说明，就是：

对单利，有：

$$a(t+s) - a(t) = si \tag{1-9A}$$

即，$t$ 时至 $t+s$ 时赚得的利息与 $s$ 成正比，而不依赖于 $t$。

对复利，则有：

$$\frac{a(t+s) - a(t)}{a(t)} = (1+i)^s - 1 \tag{1-9B}$$

与 $t$ 无关。

实务中，期限达到或超过一个度量期的长期金融业务几乎全部使用复利，较短期的业务也常用复利；单利只是偶尔在短期业务中使用。单利有时也用做复利在非整数时期内的近似。以后除非另有声明，本书所用利率均为复利而不是单利。

**[例 1-3]** 某银行以单利计息，年息为 4%，某人存入 8000 元，问 3 年后的积累值是多少？

解：

设总的积累函数为 A $(t)$，于是：

A (3) = 8000 × $a$ (3) = 8000 × (1 + 3 × 4%) = 8000 × 1.12 = 8960（元）

即 3 年后的积累值为 8960 元。

**[例 1-4]** 如果上述银行以复利计息，其他条件不变，重解上例。

解：

A (3) = 8000 × $a$ (3) = 8000 × $(1+4\%)^3$ = 8998.91 (元)

即 3 年后的积累值为 8998.91 元。

**[例 1－5]** 已知年实质利率为 5.5%，求 10 年后获取 20 万元的现值。

解：

由于 $i=5.5\%$，

故 $a(10) = (1+5.5\%)^{10}$。

现值 = $200000 \times a^{-1}(10) = 200000/(1+5.5\%)^{10} = 117086.12$ (元)

即 10 年后获取 20 万元的现值为 117086.12 元。

**[例 1－6]** 设 $0<i<1$，证明：

(1) 若 $0<t<1$，$(1+i)^t < (1+it)$；

(2) 若 $t=1$，$(1+i)^t = (1+it)$；

(3) 若 $t>1$，$(1+i)^t > (1+it)$.

证明：

当 $t=1$ 时，$(1+i)^t = (1+it) = 1+i$。

对其他情况，令 $f(i) = (1+i)^t - (1+it)$，则：

$f'(i) = t[(1+i)^{t-1}-1]$，对于 $0<i<1$，有 $1+i>1$.

所以，

当 $0<t<1$ 时，$f'(i) = t[(1+i)^{t-1}-1] < 0$,

当 $t>1$ 时，$f'(i) = t[(1+i)^{t-1}-1] > 0$,

于是，对于 $0<t<1$，$f(i) < (1+i)^t < (1+it)$.

对于 $t>1$，$f(i) > f(0) = 0$，即 $(1+i)^t > (1+it)$.

## 1.4 实质贴现率

一个度量期上的实质贴现率为该度量期内产生的利息金额与期末的积累值之比。实质贴现率通常用字母 $d$ 表示。

根据定义，假设期初投资本金为 P，则有：

$$d = \frac{P \times a(1) - P}{A(1)} = \frac{I_1}{P \times a(1)} \tag{1-10A}$$

为了帮助理解，我们来看一个例子：张三向一家银行申请以年实质利率 10% 贷款 100 元，为期一年。银行接受申请并付给张三 100 元。一年后，张三按约定偿还银行原始贷款本金 100 元，外加 10 元的利息，共计 110 元。

假设上例中张三不是以年实质利率而是以年实质贴现率 10% 向银行借 100 元，为期一年，则银行将预收 10%（即 10 元）的利息，而仅付给张三 90 元。一年后，张三将还给银行贷款 100 元。

由以上例子可以看出，实质利率其实是对期末支付的利息的度量，而实质贴现率则是对

期初支付的利息的度量。

值得注意的是，在贴现率中使用的“支付”一词并非通常意义下的支付，因为借款者并没有直接按利率来“付”利息，而是预先按利率“扣除”利息。其实，这在结果上与首先借到全部金额、然后借款者立即支付利息并没有什么不同。

类似于实质利率，也可以定义在任一度量期上的实质贴现率，令 $d_n$ 为从投资日算起第 $n$ 个时期的实质贴现率，根据定义，有：

$$d_n=\frac{\mathrm{P}\times a\ (n)\ -\mathrm{P}\times a\ (n-1)}{\mathrm{A}\ (n)}=\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{P}\times a\ (n)}\qquad 对整数\ n\geqslant 1 \tag{1-10B}$$

一般来说，像 $i_n$ 一样，$d_n$ 也是指某个特定时期利息的度量，因而随时期的变化而变化。同样地，式（1－10A）中的 $d$ 可以记为 $d_1$。

接下来考虑在常数复利的情况下，相应各期的贴现率情况。

假设常数复利利率为 $i$，那么，对任意正整数 $n$，有：

$$a\ (n)\ =\ (1+i)^n$$

于是，

$$d_n=\frac{a\ (n)\ -a\ (n-1)}{a\ (n)}=\frac{(1+i)^n-\ (1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}=\frac{i}{1+i}\triangleq d \tag{1-10C}$$

与 $n$ 无关，为一常数。这意味着，常数的复利下，贴现率也为常数。

这里，需要对符号 $d$ 作些说明。在实质贴现率的定义和 式（1－10A）、式（1－10C）中都出现了符号 d，式（1－10A）中的 $d$ 应该记为 $d_1$，定义中的 $d$ 只代表一种记号的主干部分，即用 $d$ 作为贴现率的主干字母符号，具体可以写成如 $d_n$ 的形式，而式（1－10C）中的 $d$ 表示的是一个常数。我们这样使用符号，也是因为这些符号在式（1－10C）的保证下，正好一致，所以以后我们可以在任意的情况下使用 $d$，无须另外说明，也不至于引起混淆。

接下来考虑贴现因子 $a^{-1}\ (t)$。我们知道，在积累函数为 $a\ (t)$ 的情况下，$a^{-1}\ (t)=1/a\ (t)$，于是，在复利情况下，

$$a^{-1}\ (t)\ =1/a\ (t)\ =1/\ (1+i)^t=\ (1-d)\ t \tag{1-11A}$$

通常把这种情况下的贴现方式叫做“复贴现”，这是类似于“复利”的一个术语。

另外，我们有：

$$v=a^{-1}\ (1)\ =1-d$$

于是，在复贴现的情况下，

$$a^{-1}\ (t)\ =\ (1-d)^t=v^t \tag{1-11B}$$

在实务中，通常在涉及贴现率的场合，可以将利息金额称为贴现金额，如式（1－10B）中的 $\mathrm{I}_n$ 可以同时被称为“贴现金额”或“利息金额”。也就是说，在包含贴现率的场合，“利息金额”和“贴现金额”这两个词是通用的。

**［例 1－7］** 重新考虑例 1－1 中存款，所述的事件不变，求第一、第二年的实质贴现率。

**解：**

$$d_1=\frac{\mathrm{P}\times a\ (1)\ -\mathrm{P}}{\mathrm{A}\ (1)}=50/1050=4.762\%$$

$$d_2=\frac{\mathrm{P}\times a\ (2)\ -\mathrm{P}\times a\ (1)}{\mathrm{A}\ (2)}=50/1100=4.55\%$$

前面我们分别介绍了实质利率和实质贴现率两种度量利息的（利）率。我们说，任何一笔业务，都可以同时用它们来度量。如前例，张三以实质贴现率10%借款100元，事实上他仅得到90元，但需在一年后还款100元。这里，我们是用实质贴现率来度量这笔业务的，即这笔业务的年实质贴现率为10%。如果用实质利率来度量这笔业务，那么，可以这样看待该业务，张三实际借款90元，一年的利息为10元。于是，年实质利率为10/90 = 11.11%，即这笔业务的年实质利率为11.11%。这样，同样一笔业务，如果用不同的“率”来度量，那么相应就有不同的数值。实务中，对利息的度量还有许多其他的“率”，这就意味着将不可避免地要进行不同“率”的比较。为此，我们引入如下“等价”的概念。

对于同一笔业务，用不同的率去度量，其结果是“等价”的。

这里，“率”一词既可为“利率”，也可为“贴现率”，也可以是利息的任意度量方式。

由等价的定义可知，年实质贴现率10%与年实质利率11.11%等价。一般地，若某人以实质贴现率 $d$ 借款1，则实际得到的本金为 $1-d$，而最终支付的利息（贴现）金额为 $d$，于是，根据实质利率的定义可知：

$$i = d/(1-d) \tag{1-12A}$$

这表明，与实质贴现率 $d$ 等价的实质利率为 $d/(1-d)$。将该式进行简单的代数变形，有：

$$i - id = d \tag{1-12B}$$

$$d(1+i) = i \tag{1-12C}$$

$$d = i/(1+i) \tag{1-12D}$$

即，与实质利率 $i$ 等价的实质贴现率为 $i/(1+i)$。

贴现率 $d$ 和贴现因子 $v$ 之间也存在着重要的关系。由式（1-12D）可知：

$$d = iv \tag{1-12E}$$

对于式（1-12E），我们可以这样理解：以贴现率 $d$ 投资1赚得的、在期初支付的利息是 $d$，如果该笔业务以利率度量，且等价的实质利率为 $i$，也就是说，这种业务如果投资1将在期末赚得利息 $i$。而 $i$ 在期初的现值为 $iv$，这个值显然应该等于 $d$。

由式（1-12E），还有

$$d = i/(1+i) = 1 - 1/(1+i) = 1 - v \tag{1-12F}$$

或

$$v = 1 - d \tag{1-12G}$$

显然，上式两端均可看成是期末支付1的现值。

另外，由于：

$$d = iv = i(1-d) = i - id \tag{1-12H}$$

有：

$$i - d = id \tag{1-12I}$$

上式也可理解为：某人可以借款1而在期末还 $1+i$；也可借 $1-d$ 而在期末还1。两种选择本金的差为 $d$，因此，利息差应为 $id$，而实质上两种选择的利息差为 $i-d$，于是，有式（1-12I）。

前面我们定义了复贴现，也可类似于定义单利那样来定义单贴现。

考虑贴现函数：

$$a^{-1}(t)=1-dt \qquad 0\leqslant t<1/d \tag{1-13}$$

称这种贴现函数对应的贴现方式为单贴现，其中 $d$ 为常数的单贴现率。

这里，为了保证 $a^{-1}(t)>0$，所以要求 $0\leqslant t<1/d$。

类似于单/复利与实质利率之间关系的讨论，我们可以讨论单/复贴现与实质贴现率之间的关系。

对于复贴现，我们有：常数的复贴现率等价于常数的实质贴现率。

事实上，由于：

$$d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{(1-d)^{-n}-(1-d)^{-(n-1)}}{(1-d)^{-n}}=1-(1-d)=d \tag{1-14A}$$

因此，复贴现率与实质贴现率其实是一致的。

对于单贴现，如果单贴现率为常数 $d$，那么，由实质贴现率的定义，有：

$$d_n=\frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)}=\frac{(1-nd)^{-1}-[1-(n-1)d]^{-1}}{(1-nd)^{-1}}=1-\frac{1-nd}{1-(n-1)d}$$

$$=\frac{d}{1-(n-1)d} \tag{1-14B}$$

显然，此时实质贴现率是单调递增的。

必须注意的是，式（1-12A）至式（1-12I）适用于实质利率和实质贴现率，对于单利和单贴现均不成立，除非投资的时间长度恰为一个度量期。

和单利一样，单贴现的使用范围也非常有限。它仅在短期业务中使用，以及用做复贴现在非整数时期内的近似。

综合上述讨论，可以发现单贴现和单利虽较为类似，但却呈反向发展：

（1）当投资时期加长时，常数的单利利率意味着实质利率递减，而常数的单贴现意味着实质贴现率（以及利率）递增。

（2）单贴现和复贴现对单个时期产生的结果相同。对较长时期，单贴现比复贴现产生较小的现值，而对较短的时期则相反。

**［例 1-8］** 设 $0<d<1$，证明：

（1）若 $0<t<1$，$(1-d)^t<1-dt$；

（2）若 $t=1$，$(1-d)^t=1-dt$；

（3）若 $t>1$，$(1-d)^t>1-dt$.

证明：

类似于例 1-6，令 $f(d)=(1-d)^t-(-dt)$，于是

$f'(d)=-(1-d)^{t-1}\times t+t=t\left[1-(1-d)^{t-1}\right]$

（1）若 $0<t<1$，对任意的 $0<d<1$，有 $(1-d)^{t-1}=\dfrac{1}{(1-d)^{1-t}}>1$

从而 $f'(d)<0$ 对任意的 $0<d<1$，从而 $f(d)$ 为单调递减函数，于是

$f(d)<f(0)=1-1=0$

即 $(1-d)^t<1-dt$.

（2）由题意直接可得，$(1-d)^1=1-d\times 1$.

（3）$t>1$ 时，$(1-d)^{t-1}<1$，故 $f'(d)>0$，$f(d)$ 为单调递增函数，从而 $f(d)>f(0)=0$，即 $(1-d)^t>1-dt$.

［例 1-9］ 某人到银行贷款，贷款期限为 1 年。银行还款有两种可选方式，第一种方式为本金和利息在一年后一起还，另一种方式为先还利息，本金在一年后还，已知银行两种方式下的相应的利率是等价的，对该借款人来说，根据他所需要借的款项和相应的利率，他算出在两种方式下所需要支付的利息分别为 840 元和 800 元，求银行两种方式下的利率和该人的贷款额。

解：

由题意可知，银行提供的两种方式对于的利率分别为年度实质利率和实质贴现率，我们设实质利率为 $i$，实质贴现率为 $d$，设贷款额为 L，于是有：

$\mathrm{I} = \mathrm{L} \times i = 840$（元），$\mathrm{D} = \mathrm{L} \times d = 800$（元）

从而：

$1 + i = 840/800 = 1.05$，$i = 5\%$

于是：

$d = i/(1+i) = 5/105 = 4.76\%$

$\mathrm{L} = 840/5\% = 16800$（元）

即银行贷款的实质利率为 5%，实质贴现率为 4.76%，贷款人向银行贷款的金额为 16800 元。

## 1.5 名义利率和名义贴现率

前面我们讨论了实质利率和实质贴现率。“实质”一词的主要含义在于：利息在每个度量期上支付一次，或在期初，或在期末，视具体情况而定。然而，实际情形中，往往有很多在一个度量期中利息支付不止一次或在多个度量期利息才支付一次的情形。这时，“实质”率往往不是最好的度量方式，为此，我们引入“名义”率。

我们用符号 $i^{(m)}$ 记每一时期付 $m$ 次利息的名义利率。$m$ 一般为大于 1 的整数，有些时候，$m$ 也可以小于 1 或不为整数，但这种情况很少见。所谓名义利率 $i^{(m)}$，是指每 $1/m$ 个度量期支付利息一次，而在每 $1/m$ 个度量期上的实质利率为 $i^{(m)}/m$。也就是说，某度量期上的名义利率为 $i^{(m)}$ 的意思是每 $1/m$ 个度量期上的实质利率为 $i^{(m)}/m$。例如，若一年为一个度量期，$i^{(4)} = 8\%$ 的名义利率指的是每季度的实质利率为 2%，称做每年计息 4 次的年名义利率 8% 或季度转换名义利率 8%。

由等价的定义，还可以得到 $i^{(m)}$ 与等价的实质利率 $i$ 之间的关系。

事实上，有：

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \qquad (1-15\mathrm{A})$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \qquad (1-15\mathrm{B})$$

及

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \qquad (1-15\mathrm{C})$$