

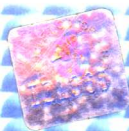
高等学校数学教材配套辅导书

概 率 统 计



习题集

主 编 北京大学数学科学学院 章 昕
总策划 胡东华



 科学技术文献出版社

概率统计习题集

主 编 北京大学数学科学学院 章 昕
总策划 胡东华

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

概率统计习题集/章昕编著.

- 北京:科学技术文献出版社,2000.8

ISBN 7-5023-3585-4

I.概... II.章... III.①概率论-习题②数理统计-习题 IV.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第34523号

出 版 者:科学技术文献出版社

图 书 发 行 部:北京市复兴路15号(公主坟)中国科学技术信息研究所
大楼B段/100038

邮 购 部 电 话:(010)68515544 2953,62579473

图书发行部电话:(010)68515544-2945,62624508

门 市 部 电 话:(010)62543201

图书发行部传真:(010)62579473

E-mail:stdph@istic.ac.cn

策 划 编 辑:胡东华

责 任 编 辑:张美丽

责 任 校 对:张美丽

封 面 设 计:胡东华

发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销

印 刷 者:北京通县蓝华印刷厂

版 (印) 次:2000年8月第1版第1次印刷

开 本:850×1168 大32开

字 数:480千字

印 张:15

定 价:15.00元

版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

盗版举报电话:(010)62878310(出版者),(010)62534708(著作权者)

本丛书封面均贴有“双博士”激光防伪标志,凡无此标志者为非法出版物,盗版书刊因错漏百出,印制粗糙,对读者会造成身心侵害和知识上的误解,希望广大读者不要购买。

目 录

第一部分 习题

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1.1 事件及关系和运算	(1)
§ 1.2 事件的概率	(2)
§ 1.3 概率的计算	(4)
§ 1.4 综合题	(10)
第二章 随机变量及其分布	(19)
§ 2.1 随机变量的分布	(19)
§ 2.2 随机变量函数的分布	(25)
§ 2.3 几种重要的分布	(29)
§ 2.4 综合题	(35)
第三章 随机变量的数字特征	(47)
§ 3.1 随机变量的期望与方差	(47)
§ 3.2 随机变量函数的期望与方差	(51)
§ 3.3 综合题	(53)
第四章 多维随机变量	(60)
§ 4.1 多维随机变量及其函数的概率分布	(60)
§ 4.2 多维随机变量的数字特征	(67)
§ 4.3 综合题	(71)
第五章 大数定律和中心极限定理	(79)
§ 5.1 几种收敛性	(79)
§ 5.2 大数定律	(80)

§ 5.3 中心极限定理	(81)
§ 5.4 综合题	(83)
第六章 抽样分布	(86)
§ 6.1 样本均值的分布	(86)
§ 6.2 χ^2 -分布	(88)
§ 6.3 t-分布	(90)
§ 6.4 F-分布	(91)
§ 6.5 综合题	(92)
第七章 参数估计	(95)
§ 7.1 参数的点估计	(95)
§ 7.2 参数的区间估计	(97)
§ 7.3 综合题	(99)
第八章 假设检验	(103)
§ 8.1 正态总体参数的假设检验	(103)
§ 8.2 非参数检验	(105)
§ 8.3 综合题	(106)
第九章 回归分析	(112)
§ 9.1 回归分析	(112)
§ 9.2 综合题	(116)
第十章 方差分析	(119)
§ 10.1 方差分析	(119)
§ 10.2 综合题	(121)

第二部分 答案与提示

第一章 随机事件及其概率	(124)
§ 1.1 事件及关系和运算	(124)
§ 1.2 事件的概率	(126)
§ 1.3 概率的计算	(135)
§ 1.4 综合题	(152)

第二章 随机变量及其分布	(170)
§ 2.1 随机变量的分布	(170)
§ 2.2 随机变量函数的分布	(183)
§ 2.3 几种重要的分布	(191)
§ 2.4 综合题	(204)
第三章 随机变量的数字特征	(226)
§ 3.1 随机变量的期望与方差	(226)
§ 3.2 随机变量函数的期望与方差	(238)
§ 3.3 综合题	(245)
第四章 多维随机变量	(260)
§ 4.1 多维随机变量及其函数的概率分布	(260)
§ 4.2 多维随机变量的数字特征	(282)
§ 4.3 综合题	(296)
第五章 大数定律和中心极限定理	(320)
§ 5.1 几种收敛性	(320)
§ 5.2 大数定律	(324)
§ 5.3 中心极限定理	(328)
§ 5.4 综合题	(335)
第六章 抽样分布	(343)
§ 6.1 样本均值的分布	(343)
§ 6.2 χ^2 -分布	(347)
§ 6.3 t-分布	(352)
§ 6.4 F-分布	(354)
§ 6.5 综合题	(358)
第七章 参数估计	(366)
§ 7.1 参数的点估计	(366)
§ 7.2 参数的区间估计	(377)
§ 7.3 综合题	(385)
第八章 假设检验	(399)

§ 8.1 正态总体参数的假设检验	(399)
§ 8.2 非参数检验	(406)
§ 8.3 综合题	(410)
第九章 回归分析	(423)
§ 9.1 回归分析	(423)
§ 9.2 综合题	(435)
第十章 方差分析	(444)
§ 10.1 方差分析.....	(444)
§ 10.2 综合题.....	(452)

第一部分 习 题

第一章 随机事件及其概率

§ 1.1 事件及关系和运算

一、选择题

1. 设 A, B 为两个事件, 则 $(A + B)(\bar{A} + \bar{B})$ 表示()。
(a) 必然事件 (b) 不可能事件
(c) A 与 B 恰有一个发生 (d) A 与 B 不同时发生
2. 试问下列各式是否成立?
(1) $(A - B) + B = A$
(2) $(A + B) - C = A + (B - C)$
3. 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A, B, C 表示出来:
(1) A 出现, B, C 都不出现; (2) A, B 都出现, C 不出现;
(3) 三个事件都出现; (4) 三个事件中至少有一个出现;
(5) 三个事件都不出现; (6) 不多于一个事件出现;
(7) 不多于两个事件出现; (8) 三个事件至少有两个出现;
(9) A, B 至少有一个出现, C 不出现;
(10) A, B, C 中恰好有两个出现。
4. 化简事件算式 $(AB) + (A\bar{B}) + (\bar{A}B) + (\bar{A}\bar{B})$ 。
5. 下列各式说明什么包含关系?
(1) $AB = A$; (2) $A + B = A$; (3) $A + B + C = A$ 。
6. 证明若 $A \subset B$, 则 $A = AB$ 。
7. 证明下列事件等式成立:
(1) $A + B = A\bar{B} + B$;
(2) $(A - AB) + B = A + B = \overline{A\bar{B}}$ 。
8. 已知 $(A + \bar{B})(\bar{A} + \bar{B}) + \overline{A + B} + \overline{A + B} = C$, 求 B 。
9. 若事件 A, B, C 满足等式 $A + C = B + C$, 问 $A = B$ 是否成立。
10. 接连进行三次射击, 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次射击命中}\} (i = 1, 2, 3)$; $B_j = \{\text{三}$

次射击恰好命中 j 次 ($j = 0, 1, 2, 3$); $C_k = \{\text{三次射击至少命中 } k \text{ 次}\} (k = 0, 1, 2, 3)$ 。

(1) 通过 A_1, A_2, A_3 表示 B_j 和 C_k , ($j, k = 0, 1, 2, 3$);

(2) 通过 B_j 表示 C_k ($j, k = 0, 1, 2, 3$)。

§ 1.2 事件的概率

1. 在电话号码簿中任取一个电话号码, 求后面四个数全不相同的概率。

(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 $(0, 1, 2, \dots, 9)$)

2. 掷一颗质均匀的骰子, 求出现奇数点的概率。

3. 若 10 个产品中有 7 个正品, 3 个次品:

(1) 不放回地每次从中任取一个, 共取 3 次, 求取到 3 个次品的概率。

(2) 每次从中任取一个, 有放回地取 3 次, 求取到 3 个次品的概率。

4. 在所有的两位数 (10—99) 中任取一个两位数, 求这个数能被 2 或 3 整除的概率。

5. 袋中有 7 个球, 其中红球 5 个白球 2 个, 从袋中取球两次, 每次随机地取球一个, 且第一次取出的球不放回袋中, 求:

(1) 第一次取得白球, 第二次取得红球的概率;

(2) 两次取得的球中一个白球, 另一个是红球的概率;

(3) 取得的两个球颜色相同的概率。

6. 一个房间里有几双不同型号的鞋子, 今从其中随意地拿取 $2r$ 只 ($2r \leq n$), 求下列事件的概率:

(1) 没有一双配对 (A);

(2) 恰有一双配对 (B);

(3) 恰有两双配对 (C);

(4) 恰有 r 双配对 (D)。

7. 掷硬币 $2n$ 次, 求出正面次数多于反面次数的概率。

8. 从 0, 1, 2, $\dots$, 9 等十个数字中任意选出三个不同的数字, 试求下列事件中的概率:

$A_1 = \{\text{三个数字中不含 0 和 5}\};$

$A_2 = \{\text{三个数字中不含 0 或 5}\}.$

9. 罐中有 12 颗围棋子, 其中 8 颗白子 4 颗黑子, 若从中任取 3 颗, 求:

(1) 取到的都是白子的概率;

(2) 取到两颗白子, 一颗黑子的概率;

(3) 取到的 3 颗棋子中至少有一颗黑子的概率;

(4) 取到的 3 颗棋子颜色相同的概率。

10. 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 求证: $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B})$ 。

11. (1) 500 个人中, 至少有一个人的生日是在 7 月 1 日的概率为多少(1 年按 365 天计算)?

(2) 4 个人中, 至少有两个人的生日在同一个月的概率为多少(假设每个月的天数相同)?

12. (1) n 个朋友随机地围绕圆桌就坐, 则其中有两个人一定要坐在一起(即座位相邻)的概率_____。

(2) 将编号为 1, 2, 3 的三本书随意地排列在书架上, 则至少有一本书自左向右的排列顺序号与它的编号相同的概率_____。

13. 某旅行社 100 人中有 43 人会讲英语, 35 人会讲日语, 32 人会讲日语和英语, 9 人会讲法语、英语和日语, 且每人至少会讲英、日、法三种语言中一种。

(1) 此人会讲英语和日语, 但不会讲法语的概率;

(2) 此人只会讲法语的概率。

14. 袋内放有两个伍分的, 三个贰分和五个壹分的钱币, 任取其中五个, 求钱额总数超过壹角的概率。

15. 证明: (1) $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$;

(2) $P(A_1 A_2 \cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_n) - (n - 1)$ 。

16. 某城有 N 部卡车, 车牌号从 1 到 N , 有一个外地人到该城去, 把遇到的几部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号), 问抄到的最大号码正好为 k 的概率($1 < k \leq N$)。

17. 设有某产品 40 件, 其中有 10 件次品, 其余为正品。现从中任取 5 件, 求取出的 5 件产品中至少有 4 件次品的概率。

18. 某专业研究生复试时, 有 3 张考签, 3 个考生应试, 一个人抽一张看后立刻放回, 再让另一个人抽, 如此 3 个人各抽一次, 求抽签结束后, 至少有一张考签没有被抽到的概率。

19. 某人忘记了电话号码的最后一个数字, 因而他随意地拨号, 求他拨号不超过三次而接通电话的概率, 若已知最后一个数字是奇数, 那么此概率又是多少?(此题要用乘法公式)

20. 在某城市中发行三种报纸 A、B、C, 经调查, 订阅 A 报的有 45%, 订阅 B 报的有 35%, 订阅 C 报的有 30%, 同时订阅 A 及 B 报的有 10%, 同时订阅 A 及 C 报的有 8%, 同时订阅 B 及 C 报的有 5%, 同时订阅 A、B、C 报的有 3%, 试求下列事件概率: (1) 只订 A 报的; (2) 只订 A 及 B 报的; (3) 只订一种报纸的; (4) 正好订两种报纸的; (5) 至少订阅一种报纸的; (6) 不订阅任何报纸的; (7) 至多订阅一种报纸的。

21. 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$, 其中系数 B 和 C 取值是随机的, 分别等于将一枚骰子接连掷两次先后出现的总数, 试求下列事件的概率: $A_1 = \{\text{方程有不同实根}\}; A_2 = \{\text{方程有实根}\}; A_3 = \{\text{方程无实根}\}$ 。

22. 在分别写有 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 的 8 张卡片中任取两张, 将卡片上的两个数组成一个分数, 求所得分数为既约分数(分子和分母没有大于 1 的公因数)的概率。

23. 从一批由 45 件正品, 5 件次品组成的产品中任取 3 件产品, 求下列事件的概率:

- (1) 恰有一件次品;
- (2) 至少有一件次品;
- (3) 最多有两件次品。

24. 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 求 $P(\overline{AB})$ 。

25. 设 A, B 为两个随机事件, 证明, $P(AB) = 1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) + P(\overline{AB})$ 。

§ 1.3 概率的计算

一、选择题

1. 设 A, B, C 是三个事件, 与事件 A 互斥的事件是:

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| (a) $\overline{AB} + A\overline{C}$ | (b) $\overline{A(B + C)}$ |
| (c) $\overline{ABC}$ | (d) $\overline{A + B + C}$ |

2. 对事件 A, B , 下列命题正确的是:

- (a) 如果 A, B 互不相容, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也互不相容;
- (b) 如果 A, B 相容, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也相容;
- (c) 如果 A, B 互不相容, 且 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 A, B 相互独立;
- (d) 如果 A, B 相互独立, 则 $\overline{A}, \overline{B}$ 也相互独立。

3. 设 $B \subset A$, 则()

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $P(\overline{AB}) = 1 - P(A)$; | (b) $P(\overline{B} - \overline{A}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A})$; |
| (c) $P(B A) = P(B)$; | (d) $P(A \overline{B}) = P(A)$ 。 |

4. 设 A, B 是两个事件, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 当下面条件() 成立时 A 与 B 一定相互独立:

- | | |
|---|----------------------------------|
| (a) $P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$ | (b) $P(A B) = 0$ |
| (c) $P(A B) = P(B)$ | (d) $P(A B) = P(\overline{A})$ |

5. 已知 $0 < P(B) < 1$, 且 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 则下列选项成立的是:

- (a) $P(A_1 \cup A_2 | \bar{B}) = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$;
 (b) $P(B(A_1 \cup A_2)) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$;
 (c) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$;
 (d) $P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)$. []
6. 设 $P(A) = a, P(B) = b, P(A + B) = c$, 则 $P(\bar{A}\bar{B})$ 为:
 (a) $a - b$; (b) $c - b$;
 (c) $a(1 - b)$; (d) $b - a$. []
7. 设事件 A 与 B 的概率均大于零, 且 A 与 B 为对立事件, 则不成立的是:
 (a) A 与 B 互不相容; (b) A 与 B 相互独立;
 (c) A 与 B 互不独立; (d) $\bar{A}, \bar{B}$ 互不相容. []
8. 设 A, B 为两个事件, $P(A) \neq P(B) > 0$, 且 $A > B$, 则 [] 一定成立。

- (a) $P(A | B) = 1$ (b) $P(B | A) = 1$
 (c) $P(B | \bar{A}) = 1$ (d) $P(A | \bar{B}) = 0$
9. 设 A, B 为任意两个事件, 则下列关系式成立的是 []。
 (a) $(A \cup B) - B = A$ (b) $(A \cup B) - B \supset A$
 (c) $(A \cup B) - B \subset A$ (d) $(A - B) \cup B = A$
10. 事件 A_1, A_2, A_3 相互独立, 则 [] 成立。
 (a) 它们中任何两事件相互独立
 (b) 它们中任何一个事件与另外两事件的并独立
 (c) 它们中任何一个事件与另外两事件的交独立
 (d) 它们中任何一个事件与另两个事件的差独立

二、填空题

1. 设 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{8}, P(ABC) = \frac{1}{16}$, 则 $P(A \cup B \cup C) =$ _____; $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) =$ _____; $P(A, B, C$ 恰好发生一个) = _____; $P(A, B, C$ 至多出现一个) = _____; $P(A | A \cup B \cup C) =$ _____。
2. 假设 $P(A) = 0.4, P(A + B) = 0.7$, 若 A, B 互不相容, 则 $P(B) =$ _____, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B) =$ _____。
3. 设 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}; A_1, A_2, A_3$ 相互独立, 则 (1) A_1, A_2, A_3 至少出现一个的概率为 _____; (2) A_1, A_2, A_3 恰好出现一个的概率为 _____; (3) A_1, A_2, A_3 最多出现一个的概率为 _____。
4. 设 A, B 为两个事件, $P(A) = 0.9, P(AB) = 0.36$, 则 $P(\bar{A}\bar{B}) =$ _____。

5. 随机地向半圆: $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内, 任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____。

6. 设 A, B, C 构成一完备事件组, 且 $P(A) = 0.5, P(\bar{B}) = 0.7$, 则 $P(C) =$ _____, $P(AB) =$ _____。

7. 若随机变量 ξ 在 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是_____。

8. 若袋内有 3 个红球, 12 个白球, 从中不放回地取 10 次, 每次取一个, 则第一次取到红球的概率为_____, 第 5 次取到红球的概率为_____。

9. 电路元件 A 与两个关联的元件 B, C 串联而成, 若 A, B, C 损坏与否是相互独立, 且它们损坏的概率依次为 $0.3, 0.2, 0.1$, 则电路断路的概率是_____。

10. 设 $P(A) = 0.3, P(A + B) = 0.6$, 那么: (1) 若 A 和 B 互不相容, 即 $P(B) =$ _____; (2) 若 A 和 B 相互独立, 则 $P(B) =$ _____; (3) 若 $A \subset B$, 则 $P(B) =$ _____。

三、解答题

1. 设一人群中有 37.5% 的人血型为 A 型, 20.9% 为 B 型, 33.7% 为 O 型, 7.9% 为 AB 型, 已知能允许输血的血型配对如下表, 现在在人群中任选一人为输血者, 再选一人为需要输血者, 问输血能成功的概率是多少 (v : 允许输血, X : 不允许输血)

输血者 \ 受血者	A 型	B 型	AB 型	O 型
A 型	✓	×	✓	✓
B 型	×	✓	✓	✓
AB 型	✓	✓	✓	✓
O 型	×	×	×	✓

2. 一实习生用一台机器接连独立地制造 3 个同种零件, 第 i 个零件是不合格的概率为 $P_i = 1/(i + 1)$ ($i = 1, 2, 3$)

以 X 表示, 3 个零件中合格品的个数, 则 $P(X = 2)$ 为多少?

3. 设某种产品 50 件为一批, 如果每批产品中无次品的概率为 0.35, 有 1, 2, 3, 4 件次品的概率分别为 0.25, 0.2, 0.18, 0.02, 今从某批产品中抽取 10 件, 检查出一件次品, 求该批产品中次品不超过 2 件的概率。

4. 在一盒中装有 15 个球, 其中有 9 个新球, 第一次比赛从中任取 3 个使用赛后仍放回盒中, 第二次比赛时, 再从盒中任取 3 个球, 求:

(1) 第二次取出的球都是新球的概率;

(2) 已知第二次取出的球都是新球, 第一次仅取出 2 个新球的概率。

5. 从 10, 17 中随机地取两个数, 求下列事件的概率: (1) 两数之和小于 $\frac{6}{5}$; (2) 两数之积小于 $\frac{1}{4}$; (3) 以上两条件同时满足。

6. 假设目标出现在射程之内的概率为 0.7, 这时射击的命中目标的概率为 0.6, 试求两次独立射击至少有一次命中目标的概率 P 。

7. 在一个罐子中有 5 个球, 其颜色有白色和黑色两种, 从罐子中取 4 次球, 每次取一个, 取出后均放回罐中, 1 次出现 3 白球; 3 次出现了黑球, 如在试验前每个球是白色或黑色球为等可能的, 求在罐子中对白球数的各种假设的概率。

8. 甲乙两人投篮命中率分别为 0.7 与 0.8, 每人投篮 3 次, 求:

(1) 两人进球数相等的概率;

(2) 甲比乙进球多的概率。

9. 由以往记录的数据分析, 某船只运输某种物品损坏 2%, 10%, 90% 的概率分别为 0.8, 0.15 和 0.05, 现在从中随机地取三件, 发现这三件全是好的, 试分析这批物品的损坏率为多少(这里设物品件数很多, 取出任一件后不影响取下一件的概率)。

10. 若 M 件产品中包含 m 件废品, 令在其中任取两件, 求: (1) 已知取出的两件中有一件是废品的条件下, 另一件也是废品的条件概率; (2) 已知两件中有一件不是废品的条件下, 另一件是废品的条件概率; (3) 取出的两件中至少有一件是废品的概率。

11. 设有来自三个地区的, 各 10 名, 15 名和 25 名考生的报名表, 其中女生的报名表分别为 3 份, 7 份和 5 份。随机地取一个地区地报名表, 从中先后抽两份:

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p ;

(2) 已知后抽到的一份是男生表, 求先抽到的一份是女生表的概率 q 。

12. 验收成箱包装的玻璃器皿, 每箱 24 只装, 统计资料表明, 每箱最多有 2 只残品, 且含 0, 1 和 2 件残品的箱名占 8%, 15% 和 5%, 现在随意抽取一箱, 随意检验其中 4 只; 若未发现残品, 则通过验收, 否则要逐一检验并更换, 试求:

(1) 一次通过验收的概率 α 。

(2) 通过验收的箱中确实无残品的概率 β 。

13. 在圆周上任取三个点 A, B, C , 求三角形 ABC 为锐角三角形的概率。

14. 黑白两色球共有 5 个, 从中任取两个, 发现都是白球, 求关于这 5 个球中白球数的各种不同假设的概率。

15. 随机地将 n 封信放进 n 个写有不同地址的信封中, 求至少一封信是配对的概率。

16. 设有甲、乙、丙三门炮, 同时独立地向某目标射击命中率分别为 0.2、0.3、0.5, 目标被命中一发而被击毁的概率为 0.2, 被命中两发而被击毁的概率为 0.6, 被命中三发而被击毁的概率为 0.9, 求:

(1) 三门火炮在一次射击中击毁目标的概率;

(2) 在目标被击毁的条件下, 只由甲火炮击中的概率。

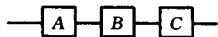
17. 为防止意外事故在矿井内同时安装两种警报系统 A 与 B , 每种系统单独使用时, 其有效率 A 为 0.92, B 为 0.93, 在 A 失灵条件下 B 有效概率为 0.85, 求: (1) 发生事故时, 这两种警报系统至少有一个有效的概率; (2) 在 B 失灵条件下, A 有效的概率。

18. 设质点 M 在整数点集 $(0, 1, \dots, a)$ 上作随机徘徊, 就是说, 每经一单位时间按下列规则改变一次设置: 如果它现在在点 t ($0 < t < a$) 上, 则下一步以概率 p ($0 < p < 1$) 转移到 $t+1$, 以概率 q 转移到 $t-1$, $p+q=1$, 如果它现在在 0 或 a , 则它以后就永远停留在 0 或 a , 试求自 t 出发, 终于要到达 0 或 a 的概率 u_t 。

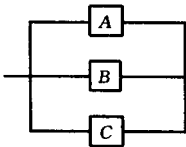
19. 从区间 $(0, 1)$ 内任取两个数, 求这两个数的乘积小于 $\frac{1}{4}$ 的概率。

20. 求下列系统的可靠性 (即无故障工作的概率: (下图) 各系统框图中同一字母代表一类元件 (字母相同下标不同者代表装在不同部位的同型元件), 其中元件 A 、 B 、 C 的可靠性相应为 p , q , r 。

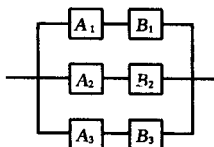
(1)



(2)



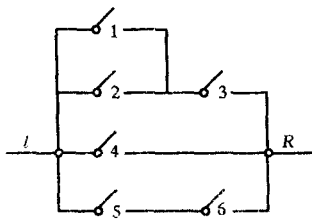
(3)



21. 一猎人用猎枪向一只野兔射击, 第一枪距离野兔 200m 远, 如果未击中, 他追到离野兔 150m 远处进行第二次射击, 如果仍未击中, 他追到距离野兔 100m 远处再进行第三次射击, 此时击中的概率为 $\frac{1}{2}$, 如果这个猎人射击的击中率与他到野兔的距离平方成反比, 求猎人击中野兔的概率。

22. 统计资料表明, 男孩在新生儿中占 51%, 同性双胞胎比异性双胞胎多一倍, 已知一双胞胎的第一个婴儿是男孩, 试求第二个也是男孩的条件概率。

23. 如图所示的电路只有 6 个继电器接点, 假设每个继电器, 闭合与否相互独立, 求 L 至 R 是通路的概率。



24. 甲、乙两人约定在下午 1 时到 2 时之间到某站乘公共汽车, 假定他们两人到达车站的时刻是互相不牵连的, 且每人在 1 时到 2 时的任何时刻到达车站是等同的, 在这段时间内共有四班公共汽车, 他们的开车时刻分别为 1:15, 1:30, 1:45, 2:00, 如果他们约定: (1) 见车就乘; (2) 最多等一辆车, 求甲乙同乘一车的概率。

25. 甲、乙两人轮流射击, 第一次甲射击、第二次乙射击, ……每次射击, 甲击中靶子的概率为 0.4, 求各人先击中靶子的概率。

四、证明题

1. 证明: 对于任意事件 A 和 B 有:

$$P(A - B) = P(A - AB).$$

2. 证明四对事件 $A, B; A, \bar{B}; \bar{A}, B; \bar{A}, \bar{B}$ 之中有对相互独立, 则另外三对相互独立。

3. 设 A, B, C 三事件相互独立, 证明 $A + B, AB, A - B$ 肯定与 C 相互独立。

4. 当 $0 < p(A) < 1$ 时, 事件 A 与 B 独立的充要条件是:

$$P(B | A) = P(B | \bar{A}).$$

5. 设 A, B 为两个事件; $P(A | B) = P(A | \bar{B}), P(A) > 0, P(B) > 0$, 证明 A 与 B 独立。

6. (1) 已知事件 A_1, A_2 同时发生, 则 A 发生, 证明:

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$$

(2) 已知任意三个事件 A_1, A_2, A_3 都满足 $A_i < A (i = 1, 2, 3)$ 证明:

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$$

7. 设 $P(A) > 0$, 试证: $P(B | A) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$ 。

8. 设 $P(A) > 0$, 试证: $P(B | A) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$ 。

9. 设 $P(B) > 0, P(\bar{B}) > 0$, 证明: A 与 B 独立的充要条件是:

$$P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

10. 证明: $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

§ 1.4 综合题

一、选择题

1. 当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则下列结论正确的是 _____。

- (a) $P(C) = P(AB)$ (b) $P(C) = P(A \cup B)$
(c) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$ (d) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

2. 称 A, B, C 是相互独立的, 如果有: []

- (a) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$
(b) $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$$(c) \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$$

3. 设 $AB \subset C$, 则()

- (a) $\overline{AB} \supset \bar{C}$ (b) $A \subset C$ 且 $B \subset C$
(c) $\overline{A+B} \supset \bar{C}$ (d) $A \subset C$ 或 $B \subset C$

4. 某人射击时, 中靶的概率为 $\frac{3}{4}$, 如果射击直到中靶为止, 则射击次数为 3 的概率为()

- (a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$
(c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4}$ (d) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

5. 设 A, B 是两个互不相容的事件, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则() 一定成立

- (a) $P(A) = 1 - P(B)$ (b) $P(A|B) = 0$
(c) $P(A|\bar{B}) = 1$ (d) $P(\overline{AB}) = 0$

6. 设 A, B 是任意两事件, 则 $P(A - B) =$ _____。

- (a) $P(A) - P(B)$ (b) $P(A) - P(B) + P(\overline{AB})$