高中数学复习指导题解

Gaozhong Shuxue Fuxi Zhidao Tijie

高中数学复习指导题解

《高中数学复习指导》编写组　编

山东人民出版社

一九八一年·济南

高中数学复习指导题解

《高中数学复习指导题解》编写组 编

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东蓬莱印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 16印张 339千字
1981年12月第1版 1981年12月第1次印刷
印数：1—5,000

书号 7099·1057 定价1.10元

前　　言

为帮助高中学生复习已学课程，我们根据全日制十年制学校中学各科教学大纲的要求，以通用课本为基础，结合教学实际编写了这套高中、政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语和生物等各个科目的复习用书。编写中注意指导学生使用科学方法进一步熟悉教材，抓住重点、难点进行系统地复习，以利于他们整理和巩固已学的知识，提高运用各科知识的能力。

《高中数学复习指导题解》是对《高中数学复习指导》一书中的基本练习题、复习思考题、自我测验题等作出的答案和提示，对较难的题作出了详解，供读者复习时参考。本书由王恩大、郭维亮、张维谐、李景宽四同志编写。

因水平所限，书中难免有缺点错误，恳请读者批评指正。

一九八一、十一

目　　录

基本内容

数学方法

附　录

基 本 内 容

一、数 与 式

【基本练习题】

1. 〔答〕（1）是；（2）不是；（3）都存在相反数；除零外，都存在倒数.

2. 〔答〕不是；能是有理数；不能. 举例（略）.

3. 〔解〕略.

4. 〔解〕(1)、(2)略. (3) 因为$\sqrt{3}+i$、$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$、$2i$和-2四个数的模数都是2，所以它们所对应的四点共圆.

5. 〔解〕(1) $r=2$，$\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$；$(k=0, \pm1, \pm2\cdots\cdots)$；

(2) $-5-2i=\sqrt{29}(\cos 201°48'+i\sin 201°48')$；

(3) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{13}e^{i1.313\pi}$.

6. 〔解〕(1) $\frac{ab}{b-a}$；(2) $\begin{cases} x^2-x+9, & (x\geqslant 0), \\ x^2+x+9; & (x<0); \end{cases}$

(3) $|x-y|=\begin{cases} x-y, & (x-y\geqslant 0), \\ y-x; & (x-y<0); \end{cases}$

(4) $|\sin\alpha|=\begin{cases} \sin\alpha, & (0\leqslant\sin\alpha\leqslant 1), \\ -\sin\alpha; & (-1\leqslant\sin\alpha<0); \end{cases}$

(5) $2-\sqrt{3}$；(6) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$；(7) i；(8) $-i$；

(9) $-i$；(10) $i^n\cdot 8i=\begin{cases}8i,\ (n=4k),\\ -8,\ (n=4k+1),\\ -8i,(n=4k+2),\\ 8;\ (n=4k+3);\end{cases}$

(11) $12\sqrt{6}-6i$；

(12) $\frac{1+\sqrt{15}i}{4}$；

(13) $\sqrt[3]{a^2}$；

(14) x；

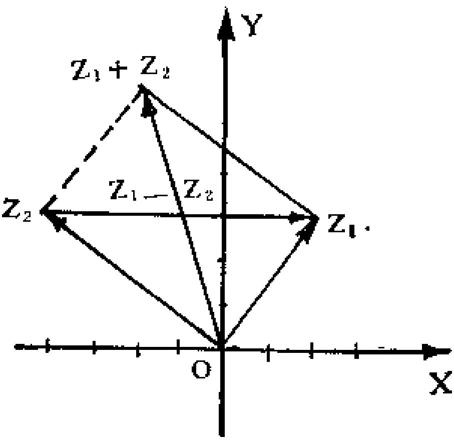
(15) -1；

(16) $-\frac{19}{10}$。

7. 〔解〕(1) 当 a 是平方数时是有理数；当 $a>0$，但不是平方数时是无理数；当 $a<0$ 时既不是有理数，也不是无理数。

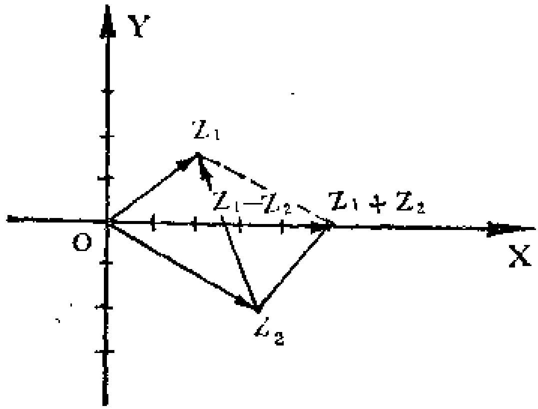
(2) n为0,1，4，9时，$\sqrt{n}$是有理数，n为2，3，5，6，7，8，10时，$\sqrt{n}$是无理数。

8. 〔解〕(1)



(第 8 (1)题)

（2）



（第8（2）题）

9．〔证〕设$Z_1=a+bi$，$Z_2=c+di$．

（1）$|Z_1|^2=a^2+b^2$，$Z_1\cdot\overline{Z_1}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2$．

∴ $|Z_1|^2=Z_1\cdot\overline{Z}_1$．

（2）$|Z_1+Z_2|^2=|a+bi+c+di|^2$

$=(a+c)^2+(b+d)^2$，

$(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z_2})=(a+bi+c+di)(a-bi+c-di)=(a+c)^2+(b+d)^2$．

∴ $|Z_1+Z_2|^2=(Z_1+Z_2)(\overline{Z_1}+\overline{Z}_2)$．

（3）和（4）仿照（2）证得．

10．〔解〕（1）$Q(x)=x^4+2x^3+4x^2+8x+13$，$r=27$；

（2）$f(2)=27$，$r=f(2)$；

（3）∵ $f(x)=(x-a)Q(x)+r$，∴$f(a)=r$；

（4）①$r=f(1)=-1$；　　②$r=f(-2)=12$；

③$r=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=0$，即整除。

11．(1) $2^{\log_4(2-\sqrt{3})^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}=4$；

(2) $a^{\frac{\log_b\log_b a}{\log_b a}}=\log_b a$；

(3) $\log_a\frac{1}{a}+\log_a\sqrt{a}+\log_a\sqrt[4]{a}+\log_a\sqrt[8]{a}+\cdots=0$；

(4) $\lg5(\lg8+\lg1000)+(\lg2^{\sqrt{3}})^2+\lg0.1\dot{6}+\lg0.06=1$；

(5) $\frac{2\lg2+\lg3}{1+\frac{1}{2}\lg0.36+\frac{1}{3}\lg8}=1$；

(6) $\log_a\left[\left(\frac{m^4n^{-4}}{m^{-1}n}\right)^{-3}\div\left(\frac{m^{-2}n^2}{mn^{-1}}\right)^5\right]=0$；（$a\neq1$，$m$、$n$、$a$是正数）

(7) $e^{\frac{2a(\ln a-\ln b)}{a-b}}\cdot e^{\frac{-2b(\ln a-\ln b)}{a-b}}=\frac{a^2}{b^2}$；

(8) $\frac{1}{\lg3}-\sqrt{4-4\log_3 10+\log_3^2 10}+\log_{(\sqrt{2}-1)}(3+2\sqrt{2})=0$。

〔解〕(1)～(8)全都正确。验证略。

12．改正下列各式的错误：

(1) $\frac{x-y}{a+b}-\frac{x+y}{a+b}=\frac{x-y-x+y}{a+b}=\frac{0}{a+b}=0$；

(2) $\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2+b^2$；

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=3-2=1$;

(4) $\sqrt{25}=\pm 5$;

(5) $\sqrt{(-3)^2(x^2+9)^2}=-3(x^2+9)$;

(6) $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$;

(7) $\sqrt{\dfrac{-2}{-3}}=\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$;

(8) $\dfrac{x-c}{(x+a)(x+b)}-1=(x-c)-(x+a)(x+b)$;

(9) $\sin 4x=4\sin x$;

(10) $\sqrt{\cos^2 245^\circ}=\cos 245^\circ$;

(11) $\lg 4+\lg 6=\lg 10=1$;

(12) $(\log_a x)^2=2\log_a x$;

(13) $(\log_2 25)\div 5=\log_2 5$;

(14) $\dfrac{\log_{16}20}{\log_{16}2}=\log_{16}20-\log_{16}2$;

(15) $\lg(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{5}})=\dfrac{1}{3}\lg a+\dfrac{1}{5}\lg b$;

(16) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(1-3a)^2}=(a-1)-(1-3a)$

$=2a-2$;

(17) $\sqrt{(\lg 3)^2-2\lg 3+\lg 10}=\sqrt{(\lg 3-1)^2}=\lg 3-1$.

〔解〕 略。

13.〔解〕 (1) $\because$ $\lg 2^{517}=517\lg 2=155.617$,

$\therefore$ 2^{517}有156位数。

$\because\ 2^{517}=2^{4\times129+1}$,

$\therefore\ 2^{517}$的个位数是 2 。

$$\left.\begin{array}{lll}(2)\ 2x+7\geqslant0, & \therefore & x\geqslant-\dfrac{7}{2}\\ \quad\ 2-x\geqslant0, & \therefore & x\leqslant2\\ \quad\ 5-x\geqslant0, & \therefore & x\leqslant5\end{array}\right\}\therefore -\frac{7}{2}\leqslant x\leqslant2.$$

$A-B=C$成立，即$\sqrt{2x+7}-\sqrt{2-x}=\sqrt{5-x}$成立.

解之，得 $x=1$，$x=-\dfrac{10}{3}$（舍去）.

(3) $\because\ \phi(x)=\ln x$, 且 $\phi\left(\dfrac{9}{22}\right)=m$, $\phi\left(\dfrac{8}{33}\right)=n$,

$\phi\left(\dfrac{1}{66}\right)=p$, $\therefore\ \ln\dfrac{9}{22}=m$, $\ln\dfrac{8}{33}=n$, $\ln\dfrac{1}{66}=p$.

$$\therefore\begin{cases}2\ln3-\ln2-\ln11=m,\\ 3\ln2-\ln3-\ln11=n,\\ -\ln2-\ln3-\ln11=p.\end{cases}$$

解之，得 $\ln11=-\dfrac{4m+3n+5p}{12}$,

$$\therefore\ \phi(11)=-\frac{4m+3n+5p}{12}.$$

【复习思考题】

1. 〔答〕属有理数集的有：$\sqrt[3]{-8}$，$\lg0.01$，$\sin150^\circ$，$16^{\frac{1}{4}}$，$(1+2i)(1-2i)$，0，3.1416，$0.\dot{1}23\dot{4}\cdots\cdots$，2.7182，$|1+\sqrt{3}i|$；

属于无理数集的有：$\lg2$，$\cos330^\circ$，$16^{\frac{1}{8}}$，π，0.101001

0001……，$|2+3i|$；

属于实数集的有：$\sqrt[3]{-8}$，lg2，lg0.01，sin150°，cos330°，$16^{\frac{1}{3}}$，$16^{\frac{1}{4}}$，$(1+2i)(1-2i)$，0，π，3.1416，$0.\dot{1}23\dot{4}\cdots\cdots$，2.7182，$|2+3i|$，$|1+\sqrt{3}i|$；

属于复数集的是所给数的全体。

2．〔**解**〕$|-3-2|>|-3|-|-2|$；$0.2^{10}>0.2^{11}$；

$\sqrt{-4}$与2不能比较大小；$2-\sqrt{3}<2+\sqrt{3}$；

$|10+8i|>|1+4i|$；$-5i$与0不能比较大小；

$0.3^{0.3}>0.3^{2}$；

当$a=\pm 2$时，则$\sqrt{4-a^2}=\sqrt[3]{a^2-4}$；

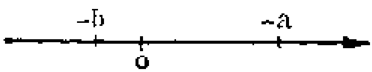
当$a>|\pm 2|$时，则二者不能比较大小；

当$a<|\pm 2|$时，则$\sqrt{4-a^2}>\sqrt[3]{a^2-4}$。

$\sqrt{2}^{\,3.1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}$；

$\log_7 8>\log_{\frac{1}{2}}8$。

3．〔**解**〕(1) 在数轴上表示$-a$和$-b$如图：



（第3(1)题）

(2) $a-b<0$；$a+b<0$；$|a|-|b|>0$；

(3) $|a+b|+|b-a|+|a|+|b|=-(a+b)+(b-a)+(-a)+b=-a-b+b-a-a+b=-3a+b$；

(4) $a+|a|$既不是正数也不是负数，而是零；$|a|-a=-a-a=-2a>0$，所以$|a|-a$是正数。

4. 〔解〕(1) ①a是0，2，4，6，8；②1，4，7；③0，5；④2.

(2) 当$x>0$时，式子的值是1；不存在能使式子的值为-5的x值；当$x=0$时，式子没有意义。

(3) x是全体实数；$x\neq-1$的实数；x是全体实数；$x\geqslant-1$的实数；x是全体实数；$x\geqslant-1$的实数。

(4) 不一定，如$|-4|>|2|$，但$-4<2$；也不一定，如$|-4|=|4|$，但$-4\neq4$.

(5) 有.如正的真分数的平方反而比这个数小；有.如负数的相反数比这个数大；零的相反数是零就是和这个数相等的；有.如正的真分数的倒数比这个数大；1的倒数和这个数相等；零没有倒数。

(6) 当$|x-2|$有最小值时，则$\dfrac{1}{|x-2|+1}$就有最大值。显然$|x-2|$的最小值是零，所以，当$x=2$时，原式有最大值是1；

因为$(|x-4|-2)^2$有最小值，原式就有最小值. 显然，当$|x-4|=2$，即当$x=6$或$x=2$时，$(|x-4|-2)^2$的最小值为零，所以，原式有最小值是4.

(7) 当$m^2-5m-6=0$时，即当$m=6$或-1时，复数为实数；当$m^2-3m-4=0$，即当$m=4$或-1时，复数为纯虚数。

(8) 设$S=1+2i+3i^2+\cdots\cdots+(4n+1)i^{4n}$，则

$$iS=i+2i^2+3i^3+\cdots\cdots+(4n+1)i^{4n+1},$$

两式相减$(1-i)S=1+i+i^2+\cdots\cdots+i^{4n}-(4n+1)i$

$$=\frac{1-i^{4n+1}}{1-i}-(4n+1)i=1-(4n+1)i. \therefore S=(2n+1)-2ni.$$

(9) $\because$ $\left|\dfrac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\sqrt{5}i}\right|+2i$

$$=\left|\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{7\sqrt{10}}{10}i\right|+2i$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2+\left(-\frac{7\sqrt{10}}{10}\right)^2}+2i=\sqrt{5}+2i,$$

$\therefore$ $\left|\left|\dfrac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)\sqrt{5}i}\right|+2i\right|$

$$=\left|\sqrt{5}+2i\right|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3.$$

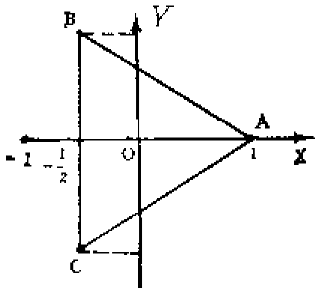
(10) $\because$ $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\omega^2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

$\therefore$ 由 1、ω、ω^2 所对应的三点连结起来所组成的图形是$\triangle ABC$（如图）.

$\because A(1,0), B\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore$ $|AB|=|AC|=|BC|=\sqrt{3}$.

故由 1、ω、ω^2 所对应的点组成的$\triangle ABC$是一个正三角形.



(第 4 (10) 题)

5.〔解〕(1) 在自然数集加、乘运算永可实施；

(2) 在整数集加、减、乘运

算永可实施；

（3）在有理数集加、减、乘、除运算永可实施；

（4）在实数集加、减、乘、除、乘方运算永可实施；在复数集六种代数运算永可实施。

6.〔解〕(1) $\because |x|=3$，$|y|=5$，

$\therefore x=\pm 3$，$y=\pm 5$，

$\therefore x+y$的值是 ± 8，± 2。

（2）①在自然数集，能使 $-2<x<3$ 成立的 x 值是1，2；能使 $|x-2|=3$ 成立的 x 值是5。②在整数集能使 $-2<x<3$ 成立的 x 值是 -1，0，1，2；能使 $|x-2|=3$ 成立的 x 值是5，-1。

（3）若 a和b是任意两个整数，那么，在有理数集方程：$x+a=b$；$x-a=b$；$ax=b$；$\frac{x}{a}=b$ 一定可解。

若 a 和 b 是任意两个有理数，那么在实数集方程 $ax^2=b$ 不一定可解，在复数集方程 $ax^2=b$一定可解。

7.〔解〕(1) $481\frac{1}{3}$；　(2) $\frac{19}{6}$；　(3) $\frac{1}{6}$；

（4）原式 $=n\log_2 3\times\log_{3^2}2^{\frac{5}{n}}=\frac{n\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\frac{5}{n}\lg 2}{2\lg 3}=\frac{5}{2}$；

（5）原式 $=\frac{1}{2}\lg 2+\frac{3}{2}\lg 3-4\lg 2+3\lg 2-\lg 3+\frac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{2}\lg 3=0$；

（6）原式 $=[(e^x-e^{-x})^2]^{\frac{1}{2}}+[(e^x+e^{-x})^2]^{\frac{1}{2}}=2e^x$；

（7）原式 $=\left[\log_{8^2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2\right]$

$$\left[2^{\log_2 2(2-\sqrt{3})^2}+3^{\log_3 2(2+\sqrt{3})^2}\right]$$

$$=(\log_{64}2)\left[2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}\right]=\frac{1}{6}\times 4$$

$$=\frac{2}{3};$$

(8) 原式$=2$;

(9) 原式$=[(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)]^{61}(-6)$

$(6^{-\frac{3}{8}})=6^{\frac{5}{8}}$;

(10) 原式$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$.

8. 〔证〕$\because$ $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6=(x^6+y^6)$

$-(x^4y^2+x^2y^4)$

$=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$-x^2y^2(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(x^4-2x^2y^2+y^4)$

$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2\geqslant 0$,

$\therefore$ 多项式 $x^6-x^4y^2-x^2y^4+y^6$ 的最小值是零。

9. 〔证明〕(1) 设 $2n-1$为任意一个奇数，则

$(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4n(n-1)+1$.

如果 n 是奇数时，则 $4n$ 是偶数，$n-1$ 是偶数，$4n(n-1)$ 也是偶数，所以 $4n(n-1)+1$ 必是奇数；

如果 n 是偶数时，则 $4n$ 是偶数，$n-1$ 是奇数，$4n(n-1)$也是偶数，所以 $4n(n-1)+1$必是奇数。

故不论 n 是奇数还是偶数，$4n(n-1)+1$ 必是奇数。即奇数的平方是奇数。

(2) 设两个连续整数为$2n+1$，$2n$，则

$$(2n+1)^2-(2n)^2=4n+1.$$

$\because$ $4n$一定是偶数，

$\therefore$ $4n+1$ 一定是奇数。

故两个连续整数的平方差是奇数。

(3) 设三个连续奇数是$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$，则

$$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12n^2+12n+12=12(n^2+n+1).$$

$\because$ $12(n^2+n+1)$含有12的因式，

$\therefore$ $12(n^2+n+1)$必能被12整除。

又在 n^2+n+1中，不论 n 是奇数还是偶数，n^2+n+1必是奇数。所以 n^2+n+1 不是 2 的倍数，因而$12(n^2+n+1)$也不是24的倍数。

故三个连续奇数的平方和加 1 必可被12整除，但不能被24整除。

(4) 设三个连续的自然数是 $n-1$，n，$n+1$，则

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

$\because$ 不论 n 是奇数还是偶数，$3n(n^2+2)$必能被 3 整除，