张世基 主编

振动学基础

京航空航天大學出版社

振动学基础

张世基 主编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是根据1987年航空高等院校教材会议审订的固体力学专业《振动学基础》教学大纲编写的。编写的着眼点是使学生具备基本的结构动力学的基础知识，以适应新技术的发展对产品的动态品质及抗震能力方面日益增长的要求。书中的内容包括：单自由度及多自由度保守系统与非保守系统（比例阻尼系统）的振动的一般理论；弹性连续系统的振动特性及近似解法；固有振动问题的有限元素法及时间域（动力响应）问题的有限元素法的基本知识；随机过程的统计描述及系统对随机干扰响应的基础知识。

本书还可作为飞机设计专业及工科院校力学专业及机械、结构设计等专业的教材。也可供机械、运输、建筑等技术领域的技术人员参考。

振 动 学 基 础

ZHENDONGXUE JICHU

张世基 主编

张世基 诸德超 章思骙 编

责任编辑 许传安

*

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

朝阳区科普印刷厂印制

787×1092 1/16 印张：14.75 字数：377千字

1990年2月第1版 1990年2月第1次印刷 印数：3500册

ISBN 7-81012-144-8/V·016 定价：3.00元

前　言

机械、交通、建筑、航空航天等工业技术的发展，对产品的经济性、可靠性及舒适性都提出了很高的要求。保证产品具有优良的经济性、可靠性及舒适性，当然要靠多种学科及技术的协同配合才能达到。由于机械、交通等工业技术领域中，总是不可避免地要遇到振动问题。例如，高速运行时机床的振动、风浪引起的海洋平台的振动、地震引起的建筑物的振动、车辆在崎岖道路上行驶时引起的振动、飞机起飞、着陆及不平稳气流中飞行时的振动等等。这些振动往往会产生不良的后果。当然，振动还有可以造福于人类的另一面。例如，振动筛、振动搅拌器、振动按摩器、振动剪、振动消除残余应力等等，则是人们掌握振动机理后，应用振动规律造福于人类的一些例证。因此，工程技术人员具备基本的结构动力学知识，是保证产品具有良好的动态品质及抗震能力的重要一环。

《振动基础》一书是我们多年来从事结构振动理论教学的讲义的修订本。它的原型是我们1964年编写的《结构振动》及1979年重新编写时改名的《振动学基础》。这次修订，在内容上删去了原书中的矩阵初参数法及柔度系数法等两章，并将振动方程迭代解法这一节作了适当的扩充，单独成为特征值与特征矢量的若干解法一章。这样全书共八章，其中第一章是单自由度系统的振动，包括无阻尼自由振动特性及能量关系、有阻尼自由振动特性及系统受一般干扰时的响应特性以及阻尼的能量耗散、振动隔离的概念等。第二章是变分原理及拉格朗日运动方程，主要介绍一些分析动力学的基本知识。第三章是二自由度系统的振动，重点阐述了二自由度系统的振动特性、弹性与惯性耦合的概念及主坐标（模态坐标）的概念以及动力减震器基本原理。第四章是多自由度系统的一般理论，这一章重点阐述自然模态的正交特性及模态迭加解法（实模态分析法）在动力响应分析中的应用。第五章是弹性连续系统的振动，包括杆与梁等一些典型结构振动特性，还着重介绍了瑞莱原理及瑞莱-李兹近似解法与伽辽尔金近似解法。第六章是特征值与特征矢量问题的若干解法。这一章扼要地介绍了特征值问题的若干实用解法。它包括幂迭代法、Jacobi迭代法及子空间迭代解法。第七章是有限元素法基础。这一章扼要地介绍有限元素法在固有振动分析中的应用，并对时间域（动力响应）问题的有限元素法作了初步介绍。第八章是随机振动概论。主要包括随机过程的统计描述及系统对随机干扰响应的一些基本知识。由于篇幅的限制，前面所述各章的内容都只涉及线性系统的微幅振动问题。

这次修订时，在每章的末尾都增加了一些习题。这些习题主要选自《振动学基础习题集》。它对帮助读者对各章基本理论的理解是十分有益的。

本书的修订工作是由张世基完成的。书稿曾经钱浩生副教授及李翠英副教授的精心审阅对改进原稿提出了宝贵的意见。本书的先前几个版本还得到黄文虎教授及赵令诚教授的关心与帮助。对此，作者深表谢意。

书中的图是张丽华及金振镁同志帮助描绘的。对她们的辛勤劳动我们十分感谢。

由于我们业务水平的限制，书中不妥之处恳请读者批评指正。

编　者

1988年月8

目　　录

第一章　单自由度系统的振动

第二章　变分原理与拉格朗日运动方程

第一章　单自由度系统的振动

§1　无阻尼自由振动

所谓单自由度系统，是指其在空间的位形可以用一个变量（参数或者坐标）来加以确定的系统，例如图1·1-1所示的各种系统。

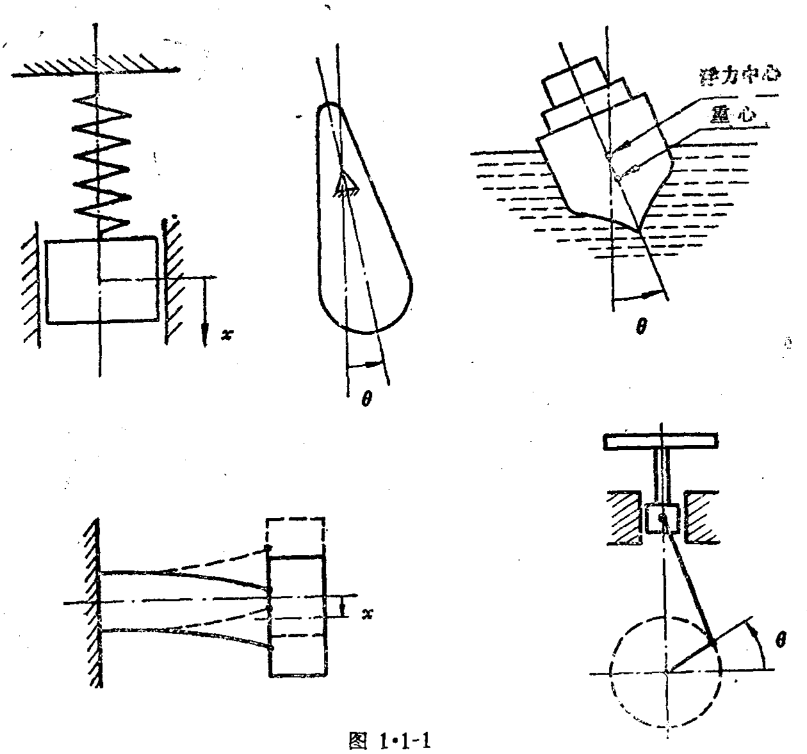


图 1·1-1

在现考查一下图1·1-2所示的一个悬挂在很轻的弹簧（即其质量可忽略不计）上处于静止状态的重块。当重块受外加干扰作用时将偏离平衡位置，一旦干扰消除后重块将发生振动。现在的问题是要研究重块的运动规律，即要求出重块位置随时间的变化规律。为此，可按下列步骤来处理。

§1·1　求系统运动方程

我们用变量x来表示重块在任一时刻的位置，那么x将是时间t的函数，$x=x(t)$。假设x的坐标原点取在平衡位置处，并取向下为正，如图 1·1-2所示。重块运动中所受的力只需考虑弹簧力$-kx$（其中k代表弹簧常数，重力W已被弹簧静伸长中的弹簧力所平衡）。根据牛顿第二定律可以求出重块的运动方程。

牛顿第二定律的表述是："作用在质点上的力等于质点质量与其加速度的乘积"。已知重块偏离平衡位置x后，作用在重块（质点）上的弹簧力是：

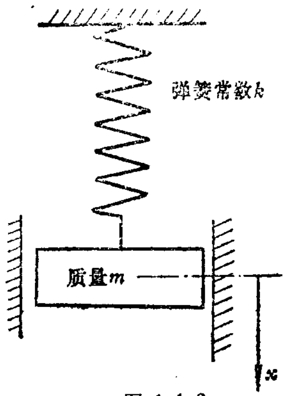


图 1·1-2

$$F_s = -kx(t) \tag{1}$$

根据牛顿第二定律有：

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{2}$$

或

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \text{①} \tag{3}$$

式中m代表质点的质量。

方程式（3）就是图1·1-2所示单自由度无阻尼系统自由振动时的运动微分方程。

引用达朗培(D'alembert）原理同样可以导出系统的运动方程。达朗培原理说："引入惯性力的概念，并把惯性力加到质点上，则质点在任何瞬时都可看作是平衡的"。即可将质点运动问题当作相当的静力平衡问题来处理。因为质点的惯性力是：

$$F_{in} = -m\ddot{x}(t) \tag{4}$$

按照达朗培原理就得到：

$$F_s + F_{in} = 0 \tag{5}$$

将（1）式及（4）式代入（5）式中，得到质点的运动方程为：

$$-kx(t) - m\ddot{x}(t) = 0 \tag{6a}$$

或

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{6b}$$

可见所得结果与(3）式完全相同。它是一个线性的二阶齐次微分方程。通常，在研究重块的运动状况时，还有初始条件，即$t=0$时，重块偏离平衡位置的初始位移与初始速度：

$$x(0) = x_0; \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{7}$$

（3）式与（7）式合在一起，就是本节所叙述问题的数学提法。

§1·2 解运动方程

为求解齐次微分方程（3）式的通解，设特解为：

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \tag{8}$$

其中C与λ是常数。

将（8）式代入（3）式中，得到：

$$(m\lambda^2 + k)Ce^{\lambda t} = 0 \tag{9}$$

对于有意义的解应有：

$$(m\lambda^2 + k) = 0 \tag{10}$$

方程式（10）称为（3）式的特征方程，它的根为：

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm j\omega \tag{11}$$

① 符号上的"·"代表对时间t的求导，即 $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$；$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

其中：$j=\sqrt{-1}$； $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。

因此，(3) 式的通解是：

$$x(t)=C_1e^{j\omega t}+C_2e^{-j\omega t} \tag{12}$$

其中C_1与C_2是任意常数。

由于

$$\begin{aligned} e^{j\omega t}&=\cos\omega t+j\sin\omega t \\ e^{-j\omega t}&=\cos\omega t-j\sin\omega t \end{aligned} \tag{13}$$

所以

$$\begin{aligned} C_1e^{j\omega t}+C_2e^{-j\omega t}=&C_1(\cos\omega t+j\sin\omega t) \\ &+C_2(\cos\omega t-j\sin\omega t) \end{aligned}$$

因而

$$x(t)=(C_1+C_2)\cos\omega t+j(C_1-C_2)\sin\omega t \tag{14}$$

重块的运动（位移）$x(t)$是一个真实的物理量。因此，上式右边两项只能是实数，即C_1与C_2必须是一对共轭复数。由此得到：

$$x(t)=\bar{A}\cos\omega t+\bar{B}\sin\omega t \tag{15a}$$

或

$$x(t)=A\cos(\omega t-\varphi) \tag{15b}$$

其中$\bar{A}$与$\bar{B}$（或A与φ）是任意常数。(15)式指出，重块围绕平衡位置的振动将是一个和谐运动。式中A表示位移$x(t)$能达到的最大值，称为振幅，φ是一个角度，称为相位（角）。

(15) 式揭示了无阻尼自由振动系统的和谐特性。由于这种情况下系统所持有的总能量既不消散也不增加，因此，运动一经开始就延续不断地保持下去。

和谐运动可以用一个旋转矢量的投影来表示，如图1·1-3所示。旋转矢量的模为A，而旋转矢量的角速度为ω，称为系统的自然圆周频率（弧度/秒）或固有圆周频率，显然，从(15)式可知，无阻尼自由振动是周期运动，振动重复一周所需的时间T称为自然周期，它与自然圆周频率之间的关系是：

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{16}$$

反之，每单位时间内振动的次数

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{17}$$

称为自然频率〔周/秒或赫兹（Hz）〕。由(11)式可知，它只与系统的弹性性能及质量特

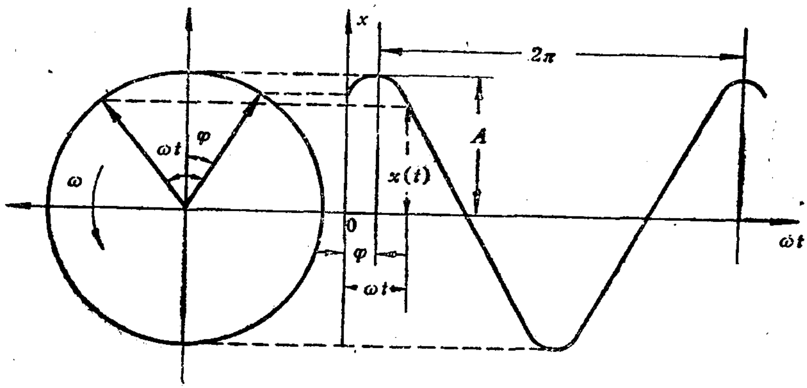


图 1·1-3

性有关。因此，它是系统的固有特性。

至于振幅A与相角φ，则取决于初始条件（7）式。将（15b）式代入（7）式，得到：

$$\begin{aligned} x(0) &= A\cos\varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) &= -A\omega\sin\varphi = \dot{x}_0 \end{aligned} \tag{18}$$

由此解得：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi &= \mathrm{Arctg}\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

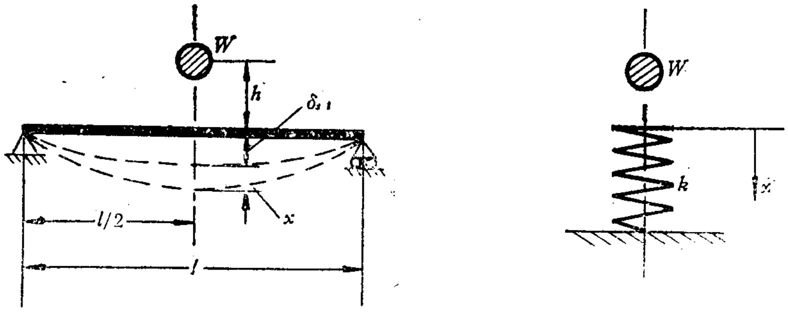
如果将（15a）式代入（7）式，得到：

$$\begin{aligned} \bar{A} &= x_0 \\ \bar{B} &= \dot{x}_0/\omega \end{aligned} \tag{20}$$

将$\bar{A}$与$\bar{B}$代回（15a）式，则有

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t \tag{21}$$

例题1·2·1 图1·1-4a所示简支梁，长度$l = 3$米、弯曲刚度$EI = 5.7\times10^4$牛顿-米²。今有重块$W = 890$牛顿，从高度$h = 1.27\times10^{-2}$米处自由下落，当重块接触梁后就附着于梁上成为一个系统。如果忽略梁的分布质量，试求系统的自然频率及系统自由振动时的振幅。



(a)　　(b)

图 1·1-4

解：

（一） 按题意该系统属于单自由度系统，其计算模型如图1·1-4b所示。

选择$x(t)$（向下为正）为描述质点W运动的坐标。则计算模型的刚度系数与质量为：

$$k = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48\times5.7\times10^4}{3^3} = 1.0133\times10^5\text{牛顿·米}^2$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{890}{9.81} = 90.72\text{牛顿·秒}^2\text{·米}^{-2}$$

（二）根据（17）式求得该系统的自然频率

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1.0133\times10^{5}}{90.72}}$$

$$=5.25\text{周/秒}$$

（三）重块下落与梁接触后附着于梁上，相当于给定初始时刻（$t=0$）的初始位移：

$$x(0)=x_0=-\delta_{st}=-\frac{Wl^3}{48EI}$$

$$=-0.8783\times10^{-2}\text{米}$$

初始速度　$\dot{x}(0)=\dot{x}_0=\sqrt{2gh}=0.499$米/秒

（四）根据（19）式，求得该系统自由振动时的振幅

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{(0.8783)^2+\left(\frac{0.499}{0.3299}\right)^2}\times10^{-2}$$

$$=1.749\times10^{-2}\text{米}$$

§1·3　无阻尼系统自由振动时的能量关系

无阻尼系统自由振动时，作用在质点上的力只有弹簧力与惯性力。方程式（3）描述了这些力之间的关系。为研究系统自由振动时的能量关系，将(3）式乘以$\dot{x}\mathrm{d}t$，得到：

$$m\ddot{x}\dot{x}\mathrm{d}t+kx\dot{x}\mathrm{d}t=0 \tag{22}$$

对（22）式进行积分，得到：

$$\int_0^t m\ddot{x}\ \dot{x}\mathrm{d}t+\int_0^t kx\dot{x}\mathrm{d}t=0 \tag{23}$$

其中积分　$$\int_0^t m\ddot{x}\dot{x}\ \mathrm{d}t=\int_0^t m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)\mathrm{d}t=\int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)}\mathrm{d}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)-\frac{1}{2}m\dot{x}^2(0)=T-T_0 \tag{24}$$

其中　$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$$

是系统的动能。而积分

$$\int_0^t kx\dot{x}\mathrm{d}t=\int_{x(0)}^{x(t)}kx\mathrm{d}x=\int_{x(0)}^{x(t)}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}kx^2(t)-\frac{1}{2}kx^2(0)$$

$$=V-V_0 \tag{25}$$

其中　$$V=\frac{1}{2}kx^2(t)$$

是该系统的弹簧势能。

将（24）式与（25）式代入（23）式，得到：

$$T + V = T_0 + V_0 = \text{常数} = E \tag{26}$$

其中E代表系统的总能量。(26)式表明无阻尼系统自由振动时，其动能与势能之和是常数，即无阻尼系统自由振动时，系统的总能量保持不变。这种具有机械能守恒的系统称为保守系统。

对于保守系统，(25)式可以用来建立系统的运动方程。为此，对(25)求导数，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{26'}$$

利用(26′)式，可以很方便地建立保守系统的运动方程。

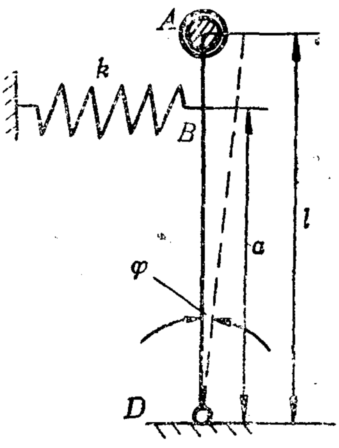


图 1·1-5

例题1·2·2 图1·1-5所示系统，AD为刚性杆，其质量可忽略。试用能量守恒原理求系统的运动方程。

解：

（一）选择φ为坐标，由此可计算系统的动能与势能：

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{W}{g}(l\dot{\varphi})^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(a\varphi)^2 - Wl(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}k(a\varphi)^2 - \frac{1}{2}Wl\varphi^2$$

（二）将T与V代入(26)式，即

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0$$

得到

$$\frac{W}{g}l^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + ka^2\varphi\dot{\varphi} - Wl\varphi\dot{\varphi} = 0$$

由此，得到运动方程：

$$\frac{W}{g}l^2\ddot{\varphi} + (ka^2 - Wl)\varphi = 0$$

或

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left(\frac{ka^2}{Wl} - 1\right)\varphi = 0$$

§2 具有粘性阻尼时的自由振动

在实际系统中多少总是具有阻尼的，而且阻尼力的性质是很复杂的，它可能是位移、速度以及其它因素的函数。工程结构中常常采用粘性阻尼的假设。这类阻尼力与速度成正比，方向相反。即

$$F_D = -c\dot{x} \tag{1}$$

其中c是常数，称为粘性阻尼系数，单位是：牛顿·秒·米$^{-1}$。

图1·2-1表示一个具有粘性阻尼系数c的系统。为研究其运动规律，可根据达朗培原理，求得系统的运动方程为：

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0 \tag{2}$$

它是线性的齐次的二阶微分方程，设特解为：

$$x(t)=Ae^{\lambda t} \tag{3}$$

将（3）式代入（2）式中，得到：

$$(m\lambda^2+c\lambda+k)Ae^{\lambda t}=0 \tag{4}$$

（4）式具有非零解的条件是：

$$(m\lambda^2+c\lambda+k)=0 \tag{5}$$

（5）式是所谓的特征方程。求解(5)式，得到：

$$\lambda_{1,2}=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}} \tag{6}$$

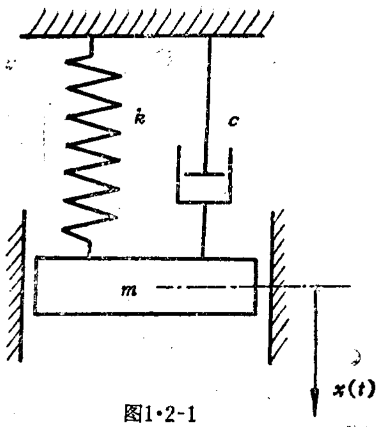


图1·2-1

引入符号：

$$\frac{k}{m}=\omega;\quad \frac{c}{2m}=\varepsilon\omega$$

则（6）式可写成：

$$\lambda_{1,2}=(-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-1})\omega \tag{7}$$

其中ε称为阻尼因子。

§2·1 微小阻尼的情况

当阻尼不大时，即$\varepsilon<1.0$，则（7）式根号内的数值是负的实数。所以λ是一对共轭复根，它们可写成：

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}&=(-\varepsilon\pm j\sqrt{1-\varepsilon^2})\omega\\&=-\varepsilon\omega\pm j\omega_d\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\omega_d=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\omega$

于是，方程式（2）的通解为：

$$\begin{aligned}x(t)&=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}\\&=e^{-\varepsilon\omega t}(A_1e^{j\omega_d t}+A_2e^{-j\omega_d t})\end{aligned} \tag{9a}$$

或者写成 $x(t)=e^{-\varepsilon\omega t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t)$ (9b)

也可写成 $x(t)=e^{-\varepsilon\omega t}D\cos(\omega_d t-\varphi)$ (9c)

其中A与B（或D与φ）是任意常数，它们由初始条件决定。

若已知$t=0$时的初始位移与初始速度为：

$$\begin{aligned}x(0)&=x_0\\\dot{x}(0)&=\dot{x}_0\end{aligned} \tag{10}$$

将（9b）式代入（10）式，得到：

$$x_0=A$$

$$\dot{x}_0=-\varepsilon\omega A+\omega_d B$$

由此解得

$$A=x_0$$

$$B=\frac{\dot{x}_0+\varepsilon\omega x_0}{\omega_d}$$

将A与B代入（9b）式，得到：

$$x(t)=e^{-\varepsilon\omega t}\left(x_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\varepsilon\omega x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \qquad (1\ldots$$

方程式(9)代表的是衰减性振荡运动，这种运动可以用一个模按指数函数$e^{-\varepsilon\omega t}$减小的旋

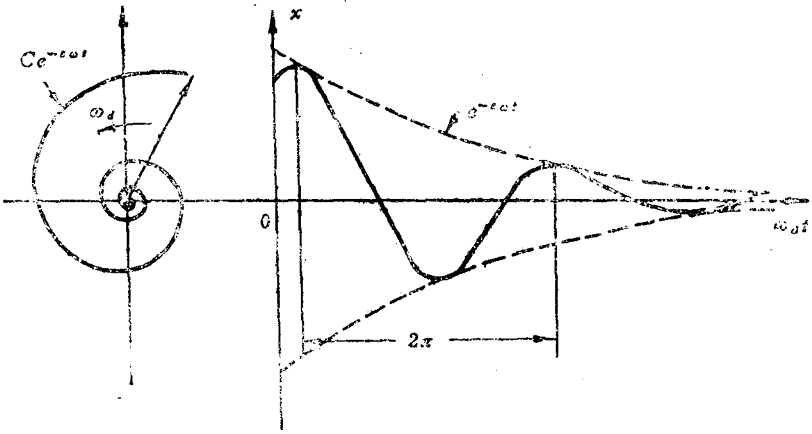


图 1·2-2

转矢量的投影来代表，如图1·2-2所示。矢量旋转的角速度为ω_d。所以这种振动运动的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\omega_d} \qquad (12)$$

自然频率为：

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_d}{2\pi} \qquad (13)$$

ω_d称为有阻尼系统的自然圆周频率。

§2·2 阻尼很大的情况

当阻尼很大时，即$\varepsilon>1.0$，这时公式（7)式根号内的数值是正实数，所以λ的根是二个不相等的负实数。于是，系统的运动变成二个按指数函数衰减的运动之和，即

$$x(t)=A_1e^{(-\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1})\omega t}+A_2e^{(-\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2-1})\omega t} \qquad (14a)$$

或者写成：

$$x(t)=e^{-\varepsilon\omega t}(C\sinh\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}t+D\cosh\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}t) \qquad (14b)$$

其中A_1与A_2（或C与D）是任意常数，它们由初始条件决定。方程式（14）代表过渡阻尼的情况，这时运动不再具有振荡的性质了。

§2·3 临界阻尼的情况

从上面的讨论中知道，当阻尼系数逐渐增大时，系统的运动特性就有可能从振荡性过渡到非振荡性。临界情况相当于：

$$c=2m\omega=c_c \qquad (15)$$

其中c_c称为临界阻尼系数，它代表使运动变成非振荡性运动的最小阻尼值。这时$\varepsilon=1.0$，特征方程的根是一对重根：

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon\omega \tag{16}$$

这时，运动方程（2）式的通解具有如下的形式：

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\varepsilon\omega t} \tag{17}$$

§2·4 对数递减率

实际结构系统的阻尼特性往往是十分复杂和难以确定的。我们知道，具有阻尼的振动系统，其振幅的衰减率是随阻尼的大小而变化的。因此，可以利用测量振幅的衰减曲线来确定阻尼系数。

阻尼振动的一般运动用（9c）式表示为：

$$x(t) = De^{-\varepsilon\omega t}\cos(\omega_d t - \varphi)$$

由此可以看出，相隔周期$T = 2\pi/\omega_d$的两个瞬时位移之比是一常数，即

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\varepsilon\omega T} \tag{18}$$

注意到（18）式的指数形式，可以引入符号

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \varepsilon\omega T = \frac{\varepsilon\omega 2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{19}$$

其中δ称为对数递减率。

从（19）式得到阻尼因子与对数递减率的关系式：

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \tag{20}$$

对于微小阻尼情况，（20）式可近似地表为：

$$\varepsilon \cong \frac{\delta}{2\pi} \tag{21}$$

另外，（19）式可近似地表为：

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\left(\frac{x_2 + \Delta x_2}{x_2}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{\Delta x_2}{x_2}\right) \cong \frac{\Delta x_2}{x_2} \tag{22}$$

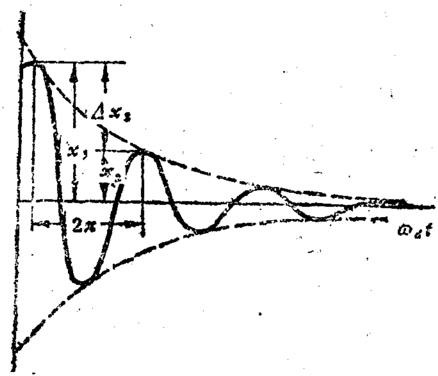


图 1·2-3

其中x_1与x_2是相隔一个周期时的两个最大振幅，如图1·2-3所示。

于是，利用（20）式〔或（21）式〕及（22）式，可以根据实测的振动衰减曲线求得系统的阻尼值。

§3 系统受和谐干扰力时的响应

假定图（1·3-1）所示系统受和谐干扰力作用时，运动方程可写成：

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Fe^{ipt} \tag{1}$$

其中F与p分别代表干扰力的幅值与频率。方程（1）是线性的非齐次微分方程。一般说来，