

信息与电子学科百本精品教材工程

新编电气与电子信息类本科规划教材

数字信号处理 原理与实现

刘 泉 阙大顺 主编

<http://www.p>



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

新编电气与电子信息类本科规划教材

数字信号处理原理与实现

刘 泉 阙大顺 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书系统地介绍了数字信号处理的基本理论、方法和实现。全书共分9章。第1章为绪论。第2、3章阐述了离散时间信号与系统的基本理论,即离散时间系统的时域、频域分析及Z变换。第4、5章介绍了离散傅里叶变换及其快速算法。第6、7、8章讲述了数字滤波器的结构、设计原理和设计方法。第9章阐明了数字信号处理的有限字长量化效应、MATLAB实现的基本方法及数字信号处理器。

本书强调基本概念,论述简明,重点突出,可作为高等院校电子、计算机等相关专业的本科生教材,也可供研究生及有关科研人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理与实现 / 刘泉, 阙大顺主编. —北京: 电子工业出版社, 2005.8

新编电气与电子信息类本科规划教材

ISBN 7-121-01649-4

I. 数… II. ①刘… ②阙… III. 数字信号—信号处理 IV. TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第091615号

责任编辑: 王 颖

印 刷: 北京牛山世兴印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

经 销: 各地新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 14 字数: 358.4千字

印 次: 2005年8月第1次印刷

印 数: 6000册 定价: 19.80元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。
联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前 言

信息技术的迅猛发展,推动了数字信号处理理论和实现技术的日趋完善。特别是随着超大规模集成电路技术水平的不断提高,对数字信号处理的要求也越来越高。数字信号处理在科学研究、国防和民用电子技术领域发挥着越来越重要的作用。

数字信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的学科,因此在编写本教材时,我们特别注意对基本概念、基本理论、基本方法和基本技术进行重点论述,力求把理论和实际应用很好地结合,并跟踪本学科和本应用领域的新发展。

全书共分9章。第1章为绪论;第2章介绍了连续时间信号的采样、离散时间信号、线性非移变系统和线性常系统差分方程等时域分析方法;第3章介绍了离散时间信号与系统的频域分析及Z变换;第4章介绍了离散傅里叶级数(DFS)和离散傅里叶变换(DFT)及其性质;第5章介绍了快速离散傅里叶变换原理、算法、编程和相关应用;第6章介绍了数字滤波器的基本网络结构;第7、8章分别介绍了IIR数字滤波器和FIR数字滤波器的设计原理和设计方法;第9章介绍了数字信号处理的有限字长量化效应、MATLAB实现的基本方法及编程,并以TI公司的TMS320系列为例,介绍了数字信号处理器。

本书每一章后都附有习题,可供读者学习和巩固理论知识选用,且书后附有数字信号处理专业词汇中英文对照表。

数字信号处理是一门工程性和应用性很强的课程,许多概念的掌握、理论知识的理解,可通过实验方法获得。

本教材由武汉理工大学刘泉教授、阙大顺副教授担任主编。武汉理工大学杨杰教授担任主审。

本书第1、2章由刘泉编写,第6、7、8章由阙大顺编写,第3、4、5、9章由郭志强编写,全书由刘泉教授统稿。杨杰教授审阅了全部书稿,并提出了许多宝贵意见。编者指导的硕士研究生李占、姚涛、王长亮等编写了部分计算机程序并绘制了书中的插图。在本书的出版过程中,得到了电子工业出版社的热情支持。借此机会,谨向以上同志表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,殷切期望广大读者批评指正。

编 者

2005年6月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 数字信号处理的定义和特点	(1)
1.1.1 数字信号处理的定义	(1)
1.1.2 数字信号处理的特点	(1)
1.2 数字信号处理系统的基本组成与实现方法	(2)
1.2.1 数字信号处理系统的基本组成	(2)
1.2.2 数字信号处理的实现方法	(2)
1.3 数字信号处理的应用领域	(3)
第 2 章 时域离散时间信号与系统	(4)
2.1 连续时间信号的采样	(4)
2.1.1 信号的采样	(4)
2.1.2 采样定理	(5)
2.1.3 信号的恢复	(7)
2.2 离散时间信号序列	(8)
2.2.1 序列及其表示	(8)
2.2.2 常用的典型序列	(9)
2.2.3 序列的运算	(12)
2.2.4 用单位采样序列来表示任意序列	(16)
2.3 线性非移变系统	(16)
2.3.1 线性系统	(16)
2.3.2 非移变系统	(17)
2.3.3 单位采样响应与卷积和	(18)
2.3.4 线性非移变系统的性质	(18)
2.3.5 稳定系统	(19)
2.3.6 因果系统	(20)
2.4 线性常系数差分方程	(22)
2.4.1 线性常系数差分方程的表示	(22)
2.4.2 线性常系数差分方程的求解	(22)
2.4.3 用差分方程表示滤波器系统	(25)
习题	(26)
第 3 章 离散时间信号与系统的频域分析	(28)
3.1 序列的傅里叶变换	(28)
3.1.1 序列傅里叶变换的定义	(28)
3.1.2 傅里叶变换的性质	(29)
3.2 序列的 Z 变换	(33)

3.2.1	Z 变换的定义及收敛域	(33)
3.2.2	几种序列的 Z 变换及其收敛域	(34)
3.3	Z 变换的基本性质和定理	(37)
3.3.1	线性	(37)
3.3.2	序列的移位	(38)
3.3.3	乘以指数序列 (z 域尺度变换)	(38)
3.3.4	序列的线性加权	(38)
3.3.5	序列的共轭序列	(39)
3.3.6	序列的反褶	(39)
3.3.7	初值定理	(39)
3.3.8	终值定理	(39)
3.3.9	卷积定理	(40)
3.3.10	复卷积定理	(40)
3.3.11	巴塞伐尔定理	(41)
3.4	逆 Z 变换	(42)
3.4.1	幂级数法 (长除法)	(42)
3.4.2	部分分式法	(43)
3.4.3	留数法	(45)
3.5	单边 Z 变换	(46)
3.5.1	单边 Z 变换的定义	(46)
3.5.2	单边逆 Z 变换	(47)
3.5.3	用单边 Z 变换解线性差分方程	(47)
3.6	Z 变换、傅里叶变换、拉普拉斯变换的关系	(48)
3.6.1	Z 变换与序列傅里叶变换之间的关系	(48)
3.6.2	Z 变换与拉普拉斯变换之间的关系	(49)
3.6.3	序列 Z 变换与模拟信号傅里叶变换之间的关系	(51)
3.7	系统函数与频率响应	(51)
3.7.1	系统函数	(51)
3.7.2	利用系统函数的极点分布确定系统因果性与稳定性	(52)
3.7.3	频率响应的几何确定法	(52)
3.7.4	最小相位系统及全通系统	(54)
	习题	(55)
第 4 章	离散傅里叶变换 (DFT)	(58)
4.1	傅里叶变换的几种可能形式	(58)
4.1.1	连续非周期时间信号的傅里叶变换	(58)
4.1.2	连续周期时间信号的傅里叶变换	(59)
4.1.3	离散非周期时间信号的傅里叶变换	(59)
4.1.4	离散周期信号的傅里叶变换	(60)
4.2	离散傅里叶级数 (DFS)	(60)
4.2.1	离散傅里叶级数的导出	(60)

4.2.2	离散傅里叶级数的性质	(62)
4.3	离散傅里叶变换 (DFT)	(65)
4.3.1	离散傅里叶变换 (DFT) 的导出	(65)
4.3.2	离散傅里叶变换的物理意义及隐含的周期性	(66)
4.4	离散傅里叶变换的基本性质	(67)
4.4.1	线性	(67)
4.4.2	复共轭序列 DFT	(68)
4.4.3	列的圆周移位定理	(68)
4.4.4	延长序列的离散傅里叶变换	(69)
4.4.5	DFT 的对称性	(69)
4.4.6	圆周卷积	(71)
4.4.7	巴塞伐尔 (Parseval) 定理	(74)
4.4.8	圆周相关定理	(74)
4.5	频率采样	(76)
	习题	(78)
第 5 章	快速傅里叶变换 (FFT)	(80)
5.1	直接计算 DFT 的问题及改进的基本途径	(80)
5.1.1	直接计算 DFT 的运算量	(80)
5.1.2	改进措施	(80)
5.2	按时间抽选的基-2FFT 算法 (DIT-FFT)	(81)
5.2.1	算法原理	(81)
5.2.2	DIT-FFT 的运算量	(85)
5.2.3	DIT-FFT 算法的特点	(86)
5.3	按频率抽选的基-2FFT 算法 (DIF-FFT)	(88)
5.3.1	算法原理	(88)
5.3.2	DIF-FFT 的运算量	(90)
5.3.3	按频率抽选的 FFT 的特点	(91)
5.3.4	DIT-FFT 和 DIF-FFT 的区别与联系	(92)
5.4	离散傅里叶逆变换的快速算法 (IFFT)	(92)
5.5	N 为复合数的 FFT 算法	(93)
5.5.1	整数的多基多进制表示	(94)
5.5.2	N 为复合数的快速离散傅里叶变换	(94)
5.6	实数序列的 FFT 算法	(96)
5.6.1	用一个 N 点 FFT 计算两个 N 点实数序列 DFT	(96)
5.6.2	用 N 点 FFT 计算一个 $2N$ 点实数序列的 DFT	(97)
5.7	快速傅里叶变换的编程思想及实现	(97)
5.7.1	FFT 算法的编程思想	(97)
5.7.2	DIT-FFT 实现的 C 语言代码	(98)
5.8	快速傅里叶变换的应用	(99)
5.8.1	快速卷积运算	(100)

5.8.2 DFT 对连续时间信号进行谱分析	(102)
习题	(105)
第 6 章 数字滤波器的基本网络结构	(107)
6.1 数字滤波器结构的表示方法	(107)
6.2 无限长冲激响应 (IIR) 滤波器的基本网络结构	(109)
6.2.1 直接 I 型	(109)
6.2.2 直接 II 型	(110)
6.2.3 级联型	(110)
6.2.4 并联型	(111)
6.2.5 转置定理	(112)
6.3 有限长冲激响应 (FIR) 滤波器的基本网络结构	(113)
6.3.1 直接型	(113)
6.3.2 级联型	(113)
6.3.3 快速卷积型	(114)
6.3.4 线性相位 FIR 滤波器的结构	(114)
6.3.5 频率采样型结构	(116)
6.4 数字滤波器的格型结构	(119)
6.4.1 全零点系统 (FIR 系统) 的格型结构	(119)
6.4.2 全极点系统 (IIR 系统) 的格型结构	(121)
习题	(123)
第 7 章 无限长冲激响应 (IIR) 滤波器的设计方法	(125)
7.1 一般数字滤波器的设计方法概述	(125)
7.1.1 数字滤波器的分类	(125)
7.1.2 数字滤波器的技术要求	(126)
7.1.3 数字滤波器的设计方法简介	(127)
7.2 模拟滤波器的设计方法简介	(128)
7.2.1 由幅度平方函数确定系统函数	(128)
7.2.2 巴特沃斯 (Butterworth) 滤波器	(129)
7.2.3 切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器	(131)
7.3 用冲激响应不变法设计 IIR 数字低通滤波器	(135)
7.3.1 变换原理	(136)
7.3.2 混叠失真	(136)
7.3.3 模拟滤波器的数字化方法	(137)
7.3.4 优缺点	(139)
7.3.5 应用场合	(140)
7.4 用双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器	(140)
7.4.1 变换原理	(140)
7.4.2 变换常数 c 的选择	(141)
7.4.3 逼近情况	(142)
7.4.4 优缺点	(142)
7.4.5 模拟滤波器的数字化	(144)

7.6 IIR 数字滤波器设计举例	(146)
习题	(153)
第 8 章 有限长冲激响应 (FIR) 滤波器的设计方法	(155)
8.1 线性相位 FIR 滤波器的特点	(155)
8.1.1 线性相位条件	(155)
8.1.2 线性相位 FIR 滤波器的频率响应特点	(157)
8.1.3 幅度函数的特点	(159)
8.1.4 零点位置	(163)
8.2 用窗函数法设计 FIR 滤波器	(164)
8.2.1 设计原理	(164)
8.2.2 加窗处理产生的影响	(166)
8.2.3 各种窗函数	(168)
8.2.4 用窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤	(173)
8.2.5 窗函数法计算中的主要问题	(174)
8.3 用频率采样法设计 FIR 滤波器	(175)
8.3.1 设计原理	(175)
8.3.2 用频率采样法设计线性相位滤波器的条件	(176)
8.3.3 逼近误差及其改进措施	(177)
8.4 IIR 与 FIR 数字滤波器的比较	(179)
习题	(180)
第 9 章 数字信号处理的实现	(182)
9.1 数字信号处理中的有限字长效应	(182)
9.1.1 量化误差	(182)
9.1.2 量化误差的统计方法	(183)
9.1.3 乘积的舍入误差	(184)
9.2 数字信号处理的 MATLAB 实现	(186)
9.2.1 数字信号处理软件实现的原理	(186)
9.2.2 MATLAB 工具箱介绍	(187)
9.2.3 基于 MATLAB 的数字信号处理举例	(189)
9.3 数字信号处理的硬件实现	(191)
9.3.1 TMS320C542 系列的硬件结构	(191)
9.3.2 TMS320C54x 系列的指令系统简介	(192)
9.3.3 CCS 集成开发环境介绍	(193)
9.3.4 数字信号处理硬件实现的一个例子——FIR 数字滤波器的实现	(194)
习题	(195)
附录 A MATLAB 信号处理常用函数	(196)
附录 B TMS320C54x 汇编语言指令集	(198)
附录 C 汉英名词对照表	(204)
参考文献	(209)

第 1 章 绪 论

数字信号处理是一门应用学科,随着大规模集成电路和超大规模集成电路的发展及计算机技术的进步,数字信号处理理论与技术日趋成熟,且仍在不断发展之中。数字信号处理技术在科技领域中应用越来越广泛,其重要性也在不断提高。

1.1 数字信号处理的定义和特点

1.1.1 数字信号处理的定义

数字信号是用数字序列表示的信号,数字信号处理就是通过计算机或专用处理设备,用数值计算等数字的方式对数字序列进行各种处理,将信号变换成符合需要的某种形式。数字信号处理主要包括数字滤波和数字频谱分析两大部分。例如,对数字信号进行滤波,限制其频带或滤除噪声和干扰,以提取和增强信号的有用分量;对信号进行频谱分析或功率谱分析,了解信号的频谱组成,以对信号进行识别。当然,凡是用数字方式对信号进行滤波、变换、增强、压缩、估计和识别等都是数字信号处理研究的范畴。

1.1.2 数字信号处理的特点

与模拟信号处理相比,数字信号处理具有以下优点。

1. 高精度

数字信号处理系统 17 位字长可以达到 10^{-6} 的精度,计算机和微处理器普遍采用 16 位、32 位的存储器,再配合适当编程或采用浮点算法,可以达到相当高的精度。

2. 高稳定性

数字信号处理系统的特性不易随使用条件的变化而变化,特别是使用了超大规模集成的数字信号处理芯片(DSP 芯片)后,更提高了系统的稳定性;数字信号只有 0, 1 两种状态,其抗干扰能力优于模拟信号,具有高的可靠性。

3. 灵活性好

数字信号处理系统的性能取决于系统参数,而这些参数存放在存储器中,改变存放的参数,就可改变系统的性能,得到不同的系统;数字信号处理系统的灵活性还表现在可以利用一套计算设备同时处理多路相互独立的信号,即所谓“时分复用”。

4. 易于大规模集成

数字部件由逻辑和记忆元件构成,具有高度的规范性,易于大规模集成化和大规模生产,

这也是 DSP 芯片迅速发展的原因之一。

数字信号处理系统对数字信号进行存储和运算,可以获得许多高的性能指标,对于低频信号尤其优越。但目前数字信号处理系统的速度还不能达到处理高频信号,如射频信号的要求。然而,随着大规模集成电路、高速数字计算机的发展,尤其是微处理器的发展,数字信号处理系统的速度将会越来越高,数字信号处理也会越来越显示出其优越性。

1.2 数字信号处理系统的基本组成与实现方法

1.2.1 数字信号处理系统的基本组成

数字信号处理系统是应用数字信号处理方法处理模拟信号的系统,其基本组成如图 1.1 所示。

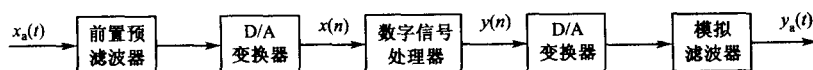


图 1.1 数字信号处理系统的基本组成

为了用数字的方法处理模拟信号,模拟信号 $x_a(t)$ 首先必须数字化:先通过一个连续时间的前置预滤波器,使输入模拟信号的最高频率限制在一定范围内,然后在 A/D 变换器中进行采样、量化和编码,将模拟信号变为在时间上和幅值上均量化的离散信号,即数字信号 $x(n)$ 。

数字信号处理器承担数字信号的各种处理工作,它可以是一台通用计算机,也可以是由各种数字硬件或软件构成的专用处理器,还可以是某个处理软件或软件包。数字信号按一定要求在数字信号处理器中进行加工,获得符合要求的数字信号 $y(n)$ 。

最后, $y(n)$ 通过 D/A 变换器,将数字信号变成模拟信号,并由一个模拟滤波器滤除不必要的高频分量,输出所需的模拟信号 $y_a(t)$ 。

实际的数字信号处理系统不一定要包括图 1.1 中的所有部分,如对于纯数字系统,就只需要数字信号处理器这一核心部分。

1.2.2 数字信号处理的实现方法

数字信号处理的主要对象是数字信号,且采用运算的方法来达到处理的目的,其实现方法基本上可以分成软件实现方法、硬件实现方法。软件实现方法是按照原理和算法,自己编写程序或者采用现成的程序在通用计算机上实现;硬件实现方法是按照具体的要求和算法,设计硬件结构图,用乘法器、加法器、延时器、控制器、存储器及输入/输出接口部件实现的一种方法。显然,软件实现方法灵活,通过修改程序中的有关参数即可改变处理功能,但其运算速度慢;而硬件实现方法运算速度快,可以达到实时处理要求,但不灵活。

用单片机实现的方法可以称为软/硬件结合实现的方法,单片机配以数字信号处理软件,不仅灵活,速度还比软件方法快,特别适用于数字控制系统。目前发展最快、应用最广的是采用 DSP 芯片, DSP 芯片配有乘法器和累加器,结构上采用并行结构、多总线和流水线工作方式,且配有适合数字信号处理的指令,是一类可实现高速运算的微处理器。

1.3 数字信号处理的应用领域

随着数字信号处理性能的迅速提高和产品成本的犬幅下降,数字信号处理的应用范围不断扩大,几乎遍及整个电子领域,其中常见的典型应用如下。

1. 语音处理

语音处理是最早应用数字信号处理技术的领域之一,也是最早推动数字信号处理理论发展的领域之一。它主要包括语音信号分析、语音合成、语音识别、语音编码、语音增强和语音信箱等。

2. 图形/图像处理

数字信号处理技术已成功应用于静止和活动图像的恢复和增强、数据压缩、图像识别、去噪等,还应用于三维图像变换、动画、电子出版和电子地图等。

3. 现代通信

在现代通信技术领域中,几乎所有分支领域都受到数字信号处理的影响。高速调制解调、编/译码、自适应均衡、多路复用等都广泛采用了数字信号处理技术。数字信号处理在传真、程控交换、移动电话、数字基站、电视会议、保密通信、卫星通信等通信领域应用,并随着互联网的迅猛发展,数字信号处理又在网络管理/服务和 IP 电话等新领域应用,而软件无线电的提出和发展进一步增强了数字信号处理在无线通信领域的应用。

4. 数字电视

数字电视将取代模拟电视、高清晰度电视,并依赖于视频压缩技术和音频压缩技术,而数字信号处理及其相关技术是视频压缩技术和音频压缩技术的重要基础。

5. 军事与尖端科技

雷达和声纳信号处理、雷达成像、自适应波束合成、阵列天线信号处理、导弹制导、全球定位系统 GPS、宇宙飞船和侦察卫星等无一不用到数字信号处理技术。

6. 医学电子

数字信号处理技术在医学中广泛应用,如心脑电图、超声波、CT 扫描、核磁共振和胎儿心音的自适应检测。

7. 其他领域

除上述领域外,数字信号处理技术还在地球物理学、音乐、消费电子、自动控制与监测和仪器仪表等许多领域得到广泛应用。

第2章 时域离散时间信号与系统

时域离散信号是指信号在时间上是离散的,即只在某些不连续的规定时刻给出信号的函数值,而在其他时间没有定义。时域离散信号可以从时域连续信号进行采样得到,也就是在采样瞬间保留了原连续信号的幅度值,这种信号简称为采样(或取样)信号,它的特点是时间上离散、幅度上具有无限精度的连续量。为了对信号进行数字化处理,必须按要求对其幅度的精度进行有限位量化,以便被数字系统所接受,这种时间上离散、幅度上被量化的信号称为数字信号。只有数字信号才能用数字系统进行各种处理,以达到分析、识别或使用的目的。

本章将对时域离散信号和系统的基本概念、基本分析方法进行讨论,这是学习以后各章内容的基础。

2.1 连续时间信号的采样

绪论中已经介绍了数字信号处理技术相对于模拟信号处理技术的优点,因此人们通常希望将模拟信号经过采样和量化编码后形成数字信号,再采用数字信号处理技术进行处理,这种处理方法称为模拟信号的数字处理方法。本节主要讨论信号采样、采样定理和信号重建等问题。

2.1.1 信号的采样

离散时间信号通常是由连续时间信号经周期采样得到的。完成采样功能的器件称为采样器,图 2.1 所示为采样器的示意图及波形图。图中 $x_a(t)$ 表示模拟信号, $\hat{x}_a(t)$ 或 $x_a(nT)$ 表示采样信号, T 为采样周期。一般可以把采样器看成是一个每隔 T 秒闭合一次的电子开关 S , 开关每接通一次,便得到一个输出采样值。在理想情况下,开关闭合时间无穷短,一般设开关闭合时间为 τ 秒,且 $\tau \ll T$ 。在实际采样器中,可以把采样过程看成是脉冲调幅过程, $x_a(t)$ 为调制信号,被调脉

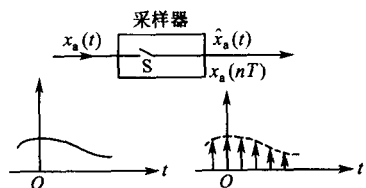


图 2.1 采样器示意图及波形图

冲载波 $p(t)$ 是周期为 T 、脉宽为 τ 的周期脉冲串,如图 2.2 (a) 所示。当 $\tau \rightarrow 0$ 时,便是理想采样情况,如图 2.2 (b) 所示。理想采样模型是实际采样的一种科学抽象,同时可使数学推导得到简化。下面主要讨论理想采样。

在 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况下,采样脉冲序列 $p(t)$ 变成冲激函数序列 $\delta_T(t)$, 即

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (2.1)$$

理想采样同样可以看成是连续时间信号对脉冲载波的调幅过程,因而理想采样输出 $\hat{x}_a(t)$ 可表示为

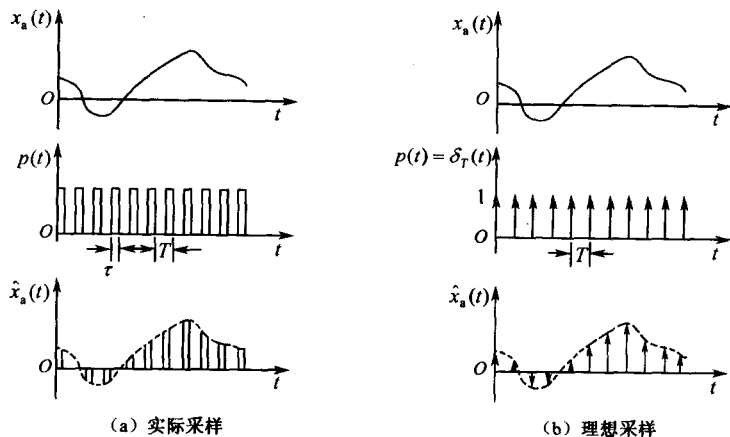


图 2.2 连续时间信号的采样

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_a(t) &= x_a(t)p(t) \\
 &= x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(t) \delta(t - nT)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

由于 $\delta(t - nT)$ 只有在 $t = nT$ 时为非零值, 所以式 (2.2) 中 $x_a(t)$ 只有在 $t = nT$ 时才有意义, 故有

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \tag{2.3}$$

2.1.2 采样定理

模拟信号经采样变为离散时间信号后, 是否会失掉一些信息? 信号的频谱会发生怎样的变化? 不丢失信息应满足什么条件? 这些问题关系到能否用数字化方法对连续时间信号进行处理。用采样定理可以解决这些问题。

下面首先讨论采样信号与模拟信号频谱之间的关系。将周期冲激函数序列 $p(t) = \delta_T(t)$ 展开成傅里叶级数, 得

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r e^{jr\Omega_s t}$$

级数的基波频率即采样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$, 采样角频率为 $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 傅里叶系数 c_r 为

$$\begin{aligned}
 c_r &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jr\Omega_s t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) e^{-jr\Omega_s t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jr\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T}
 \end{aligned}$$

于是 $p(t)$ 可表示为

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t} \quad (2.4)$$

$p(t)$ 的傅里叶变换为

$$P(j\Omega) = F\left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{jr\Omega_s t}\right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \quad (2.5)$$

根据傅里叶变换的卷积定理, 可得出理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= F[x_a(t) \cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) \cdot P(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega) \cdot \delta(j\Omega - jr\Omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \end{aligned} \quad (2.6)$$

从式 (2.6) 可以看出, 采样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期拓展, 周期为采样角频率 Ω_s 。亦即采样信号的频谱包括原信号频谱和无限多个经过平移的原信号频谱, 这些频谱都要乘以系数 $\frac{1}{T}$, 如图 2.3 (a) 和图 2.3 (b) 所示。

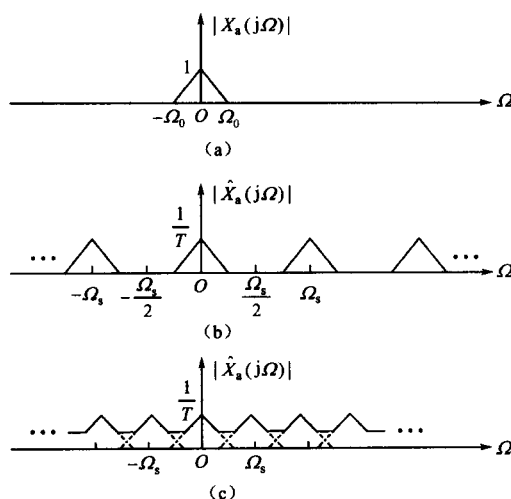


图 2.3 理想采样信号的频谱

设原信号 $x_a(t)$ 是最高频率为 Ω_0 的带限信号, 如图 2.3 (a) 所示, 其频谱称为基带频谱。当 $\Omega_s \geq 2\Omega_0$ 或 $f_s \geq 2f_0$ 时, 理想采样信号频谱中, 基带频谱及各次谐波调制频谱彼此是不重叠的, 如图 2.3 (b) 所示。此时可用一个带宽为 $\frac{\Omega_s}{2}$ 的理想低通滤波器, 取出原信号 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(j\Omega)$, 而滤除它的各次谐波频谱, 从而恢复出原信号 $x_a(t)$, 这时采样没有造成信息丢失。从图 2.3 (c) 可以看出, 当 $\Omega_s < 2\Omega_0$ 或 $f_s < 2f_0$ 时, 各次谐波频谱必然互相重叠, 重叠部分的频率成分的幅值与原信号不同, 因而不能分开和恢复这些部分, 这时采样造成了信息丢失。这种现象称为“混叠”现象。如果原信号不是带限信号, 或采样频率太低, “混叠”现象必然存在。

总结上述讨论, 在理想采样中, 为了使平移后的频谱不产生“混叠”失真, 应要求采样频

率足够高。在原信号 $x_a(t)$ 的频带受限的情况下，要使采样后能够不失真地还原出原信号，则采样频率应大于或等于信号最高频率的两倍，即

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0$$

这就是著名的奈奎斯特 (Nyquist) 采样定理。采样频率的一半，即 $\frac{\Omega_s}{2}$ 称为折叠频率；等于信号最高频率两倍的采样频率 (即 $\Omega_s = 2\Omega_0$) 又称为奈奎斯特频率。

实际中对连续时间信号进行采样，必须根据连续信号的最高截止频率，按照采样定理的要求选择采样频率，即 $\Omega_s \geq 2\Omega_0$ 。但是，考虑到信号的频谱一般不是锐截止的，则最高截止频率以上还有较小的高频分量，为此可选 $\Omega_s = (3 \sim 4)\Omega_0$ 。此外，为了避免混叠失真，一般在采样器之前加一个保护性的前置低通滤波器，称为防混叠滤波器，其截止频率为 $\frac{\Omega_s}{2}$ ，以滤除高于 $\frac{\Omega_s}{2}$ 的频率分量及其他一些杂散信号。

2.1.3 信号的恢复

从图 2.3 可以看出，如果采样信号的频谱不存在混叠，那么

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

这样，让采样信号通过一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器 (其频率特性如图 2.4 所示)

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

就可以将采样信号频谱中的基带频谱取出来，如图 2.5 所示，则原信号频谱为

$$Y(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega)H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

虽然理想低通滤波器是不可实现的，但是在一定的精度范围内，可以用一个可实现的滤波器来逼近它。因此在滤波器输出端可以得到恢复的原模拟信号 $y(t) = x_a(t)$ 。

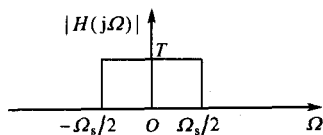


图 2.4 理想低通滤波器频率特性

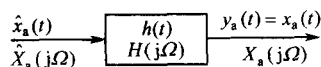


图 2.5 采样信号的恢复

下面讨论如何用采样值来恢复原来的模拟信号 $x_a(t)$ ，即 $\hat{x}_a(t)$ 通过 $H(j\Omega)$ 系统的响应。

式 (2.7) 的理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin \frac{\Omega_s}{2} t}{\frac{\Omega_s}{2} t} = \frac{\sin \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}$$

由 $\hat{x}_a(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分，可求得理想低通滤波器的输出为

$$y(t) = x_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - nT) \right] h(t - \tau) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) h(t - \tau) \delta(\tau - nT) d\tau \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) h(t - nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T} (t - nT) \right]}{\frac{\pi}{T} (t - nT)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

式 (2.8) 就是从采样信号 $x_a(nT)$ 恢复原信号 $x_a(t)$ 的采样内插公式, 内插函数为

$$s_a(t - nT) = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T} (t - nT) \right]}{\frac{\pi}{T} (t - nT)} \tag{2.9}$$

内插函数在 $t = nT$ 的取样点上的值为 1, 在其余采样点上的值均为零, 在采样点之间的值不为零, 如图 2.6 所示。这样, 被恢复的信号 $x_a(t)$ 在采样点的值恰好等于原来连续信号 $x_a(t)$ 在采样时刻 $t = nT$ 的值, 而采样点之间的部分由各加权内插函数波形的叠加而成, 如图 2.7 所示。从图 2.7 可以看出, 采样内插公式表明了只要采样频率高于信号最高频率的两倍, 整个连续信号就可以用它的采样值来代表, 采样信号通过理想低通滤波器之后, 可以惟一恢复出原来的信号, 而不会损失任何信息。这也是奈奎斯特采样定理的意义所在。

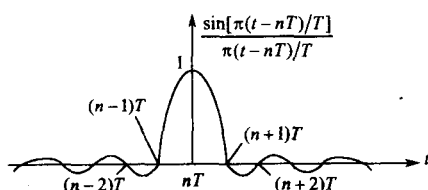


图 2.6 内插函数

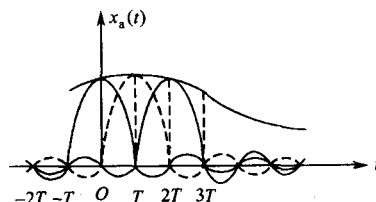


图 2.7 采样的内插恢复

2.2 离散时间信号序列

在连续时间系统中, 通常是用连续时间函数来表示信号。而在离散时间系统中, 信号要用序列来表示。

2.2.1 序列及其表示

离散时间信号是指那些在离散时间变量 $t = t_k$ (k 为整数) 时有定义的信号。若它是从连续时间信号均匀采样得到的, 则在 $t = nT$ (T 为采样周期, n 为整数) 时刻的信号值定义为离散信号值, 即

$$x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT) = x(n) \tag{2.10}$$