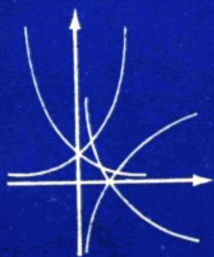

中学教学参考丛书

指数与对数

山东人民出版社

中学教学参考丛书

指 数 与 对 数

章 志 敏 编

山东人民出版社

一九八〇年 济南

中学教学参考丛书

指数与对数

章志敏 编

*

山东人民出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4.25印张 89千字

1980年3月第1版 1980年3月第1次印刷

印数：1—15,000

书号 7099·919 定价 0.35 元

编者的话

指数与对数是中学数学的一个组成部分，它在近代计算方面占有重要的地位，是计算中不可少的有力工具。

本书依照现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）的要求，在内容上略作了加深和提高。在编写中，力求做到以现代数学的观点，深入浅出地阐述基本概念，说理透彻，注意形成概念的背景和理论的系统性。每节附有例题和习题，并对其中难题作出了解答，以便于中学教师教学参考。

编　者

1979.9.8

目　录

第一章　指数概念的普遍化

一、有理指数幂

我们知道几个相同因数相乘的运算叫做乘方，其结果叫做幂，相同的因数叫做底数，相同因数的个数叫做指数。

如果用 a 表示一个数，则有

$$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{个}}=a^n.$$

"a^n"读作 a 的 n 次幂.

对于正整数指数幂具有五条运算法则.

1．$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$,

2．$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad(n>m,\ a\neq 0)$,

3．$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$,

4．$(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

5．$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}\quad(b\neq 0)$.

有了这些运算法则，可以使幂的乘、除、乘方运算，分别转化为它们的指数的加、减、乘运算，这样就使复杂的运算转化为简单的运算.

为了进一步学习数学，把分式和整式统一，把根式和整式统一，使运算简化．为此我们必须把指数概念加以推广，以适应运算的需要.

（一）零指数

我们知道当 n 是正整数时，a^n 表示 n 个 a 相乘的结果，那末 a^0 的意义是什么呢？显然 a^0 不是表示零个 a 相乘.

由于正整指数幂的运算，是通过指数间的运算来实现的，为了给 a^0 下个确切的定义，有必要着重对幂与指数的关系进行分析和讨论.

当 n 是正整数时，幂10^n 和它的指数 n 之间，可以建立一一对应的关系，用记号$\longleftrightarrow$表示一一对应.

$$n\longleftrightarrow 10^n.$$

这个一一对应关系可以用图一表示.

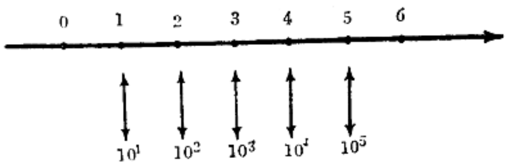

图　一

为了讨论的方便，我们将正整数的集合，如$N=$（1，2，3，4，5，…）中两个紧接的数，4 与 5，称 4 是 5 的先行数，5 是 4 的后继数. 显然在集合N中，一数的后继数是这个数加一而得，一数如果有先行数，那么这个先行数是这个数减一而得.

对于正整数指数幂的集合 $P=$（10^1，10^2，10^3，10^4，10^5，…），我们将其中两个紧接着的幂，比如 10^4与 10^5，称10^4是10^5的先行数，10^5是10^4的后继数，由此可以看出在集合 P中，一数的后继数是这个数乘以10或指数加 1 而得，一个数如果有先行数，那么它的先行数是这个数除以10，或

指数减 1 而得.

我们考虑在集合 P 中加进一个元素，使它成为 10^1 的先行数，这个数应该是什么呢？

根据先行数、后继数的组成规律，由数 10^1 除以 10 得到的"先行数"应为 1，由数 10^1 的指数减 1，而得到的"先行数"应为 10^0. 在 $n>1$ 的情况下，"10^n 的指数减去 1"和"10^n 除以 10"是一回事情. 这是正整指数幂运算规律的必然结论. 为了使这一规律，也能适用于求 10^1 的先行数，我们有必要把 10^0 和 1 看作一回事，即应规定 $10^0=1$. 用同样的方法，可以推知:

$$2^0=1,\quad 50^0=1,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^0=1,\quad (0.7)^0=1.$$

一般地，只要 $a\neq 0$，总有 $a^0=1$，即

定义 $a^0=1 \quad (a\neq 0)$.

这里要注意零的零次幂"0^0"是没有意义的.

零指数定义后，指数的运算法则也适用于零指数.

1. 因为 $a^m\cdot a^0=a^{m+0}=a^m$ 故 m 是正整数，n 是零时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

同理当 m 是零，n 是正整数时，此法则也能成立.

2. 因为 $\dfrac{a^m}{a^0}=\dfrac{a^m}{1}=a^{m-0}=a^m$，故 m 是正整数，n 是零时 $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

3. 因为 $(a^m)^0=a^{m\cdot 0}=a^0=1$，故当 m 是正整数时，n 是零时，$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

同理当 m 是零，n 是正整数时，此法则也能成立.

4．因为 $(ab)^0=a^0\cdot b^0=1$，故当 n 是零时，$(ab)^n=a^n\cdot b^n$。

5．因为 $\left(\frac{a}{b}\right)^0=\frac{a^0}{b^0}=1$，故当 n 是零时，$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$。

例 1　计算 $\frac{2^0}{\sqrt{2}}$

解： $\frac{2^0}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例 2　$(x-7)^0=?$

解： 由零指数定义知，0^0没有意义，所以当 $x\neq 7$ 时，$(x-7)^0=1$。

（二）负数指数幂

根据前面的讨论，我们在集合 P 中，再加进一个元素，使它成为 10^0 的先行数，就必然要规定　$10^{-1}=\frac{1}{10^1}$．类似的有（如图二）：

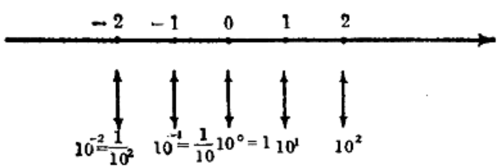

图　二

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}$，$10^{-3}=\frac{1}{10^3}$，…，$10^{-n}=\frac{1}{10^n}$（n 是正整数）.

用同样的方法，可以推知

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

一般地，只要 $a\neq 0$，总有 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

定义： $a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad(a\neq 0)$.

负指数定义后，指数的运算法则也适用于负指数.

1. 因为 $a^{-r}\cdot a^{-s}=\frac{1}{a^r}\cdot\frac{1}{a^s}=\frac{1}{a^{(r+s)}}=a^{-(r+s)}$

$=a^{-r-s}$，故当 m、n 都是负指数时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

同理如 m，n 是其他情形时，法则也能成立.

2. 因为 $\frac{a^{-r}}{a^{-s}}=\frac{\frac{1}{a^r}}{\frac{1}{a^s}}=\frac{a^s}{a^r}=a^{s-r}=a^{-r-(-s)}$，

故当 m、n 都是负数时，$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

同理，如 m、n 是其他情形时，法则也能成立.

3. 因为 $(a^{-r})^n=\left(\frac{1}{a^r}\right)^n=\frac{1}{a^{rn}}=a^{-rn}$，

故当 m 是负整数、n 是正整数时，$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

同理如 m、n是其他情形时，法则也能成立.

4. 因为 $(ab)^{-s}=\frac{1}{(ab)^{s}}=\frac{1}{a^{s}\cdot b^{s}}=a^{-s}b^{-s}$,

故当 n 是负整数时，$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$.

5. 因为 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-s}=\left(\frac{b}{a}\right)^{s}=\frac{b^{s}}{a^{s}}=\frac{a^{-s}}{b^{-s}}$,

故当 n 是负整数时，$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$.

正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂统称为整数指数幂. 利用负数指数幂的定义，便可以得到

$$\overbrace{0.00\cdots0}^{n\text{个}}1=\frac{1}{10^{n}}=10^{-n}\quad（n\text{ 为正整数}）,$$

这样可以把很小的正数写成 $a\times10^{-n}$ 的形式，如铀原子的重量是0.00…03901克，可以写成3.901×10^{-23} 克.

例 3 农用微生物溶液的浓度，常用 $P\cdot P\cdot m\cdot$表示（百万分之一浓度），$1\ P\cdot P\cdot m=\frac{1}{1000000}=10^{-6}$，20克“九二○”可配制多少20 $P\cdot P\cdot m\cdot$的“九二○”溶液？

解：$20\times\left(\frac{1}{20\times10^{-6}}\right)=\frac{1}{10^{-6}}=10^{6}$（克）$=10^{3}$（公斤）. 即可配制1000公斤的20 $P\cdot P\cdot m\cdot$“九二○”溶液.

利用负指数幂的定义和运算法则，我们可以简化计算.

例 4 计算$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)^{0}$.

解：（1）按定义直接计算可得：

原式$=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}}\times\dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}\div 1=\dfrac{27}{8}\times 4\div 1=13\dfrac{1}{2}$.

（2）按定义及幂的运算法则计算可得：

原式$=(2\times 3^{-1})^{-3}\times[(-1)(2^{-1})]^{-2}\div 1$

$=2^{-3}\times 3^{3}\times(-1)^{-2}\times 2^{2}=2^{-3+2}\times 3^{3}$

$=2^{-1}\times 3^{3}=13\dfrac{1}{2}$.

（3）利用$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$公式计算可得：

原式$=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3}\times(-2)^{2}\div 1=\dfrac{3^{3}}{2^{3}}\times(-2)^{2}$

$=\dfrac{3^{3}}{2}=13\dfrac{1}{2}$.

例5 计算（1）$\left(\dfrac{ab}{c^{2}}\right)^{3}\div\left(\dfrac{b^{2}}{ac^{3}}\right)^{2}$

（2）$\dfrac{1}{a^{2}b}\left(\dfrac{b}{a^{2}}\right)^{3}\cdot\dfrac{c}{\left(\dfrac{a}{b^{2}}\right)^{2}}$.

解：（1）原式$=(abc^{-2})^{3}\div(b^{2}a^{-1}c^{-3})^{2}$

$=\dfrac{a^{3}b^{3}c^{-6}}{a^{-2}b^{4}c^{-6}}=a^{5}b^{-1}=\dfrac{a^{5}}{b}$

（2）原式$=a^{-2}b^{-1}(ba^{-2})^{3}c(ab^{-2})^{-2}$

$=a^{-2}b^{-1}b^{3}a^{-6}ca^{-2}b^{4}=a^{-10}b^{6}c$

$=\dfrac{b^{6}c}{a^{10}}$.

（三）分数指数幂

幂的概念由正整数幂推广到整指数幂后，使得分式和整式统一在整数指数幂中，从而统一了运算法则，给分式运算提供了方便．我们还知道开方与乘方是互为逆运算的，那末根与幂这两种对立的形式，是否可以根据它们的运算性质，在一定的条件下互相转化呢？

在整数指数幂集合 $P=(\cdots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, \cdots)$ 中，我们先来看几个特殊的乘方与开方运算是如何进行的，例如，10^4的平方是$(10^4)^2=10^8$，这是从幂的运算法则 $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$ 得到的，而 10^8 的平方根是 $\sqrt{10^8}=10^4$，这是从根式性质$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$得到的(如图三)．

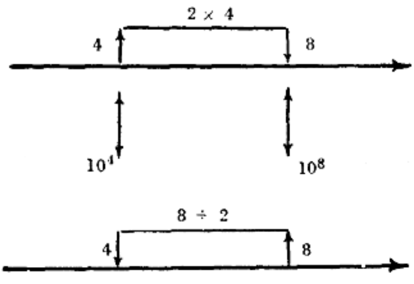

图　三

从上面的分析，我们可以看出，幂的开方运算实际上是用幂指数（作分子）和根指数（作分母）之间的除法运算来解决的．如果继续保持这样的运算法则，那么对于一般的开方运算，例如$\sqrt[12]{10^4}$就应该用幂指数 4 除以根指数 12，得到 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，再在数轴$\frac{1}{3}$处，找它的对应元素，由于$\sqrt[12]{10^4}$

$=\sqrt[3]{10}$，$\sqrt[3]{10}$不是10的整数次幂，当然在集合 P 中找不到这一元素．如果我们要求把$\sqrt[3]{10}$写成 10 的幂的形式，就应该规定$10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}$，或$10^{\frac{4}{12}}=\sqrt[12]{10^4}$．类似地有 $10^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{10^n}$（如图四）．

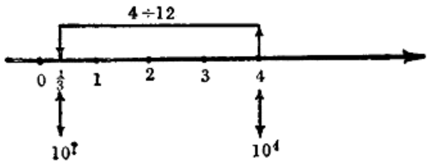

图　四

一般地，在 $a>0$ 时，有 $a^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a}$，即

定义　$a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n=(a^n)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$　$(a>0)$．

根据上述定义，我们阐述指数运算法则也适用于分数指数．

1．因为 $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{rq}}$

$=\sqrt[qs]{a^{ps}\cdot a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$．故 m，n 都是正分数时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$．

同理如 m、n 是其他情形时，法则也能成立．

2．因为 $\dfrac{a^{-\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}}=\dfrac{\sqrt[q]{a^{-p}}}{\sqrt[s]{a^r}}=\sqrt[qs]{\dfrac{a^{-ps}}{a^{rq}}}=\sqrt[qs]{a^{-ps-rq}}$

$=a^{-\frac{ps+rq}{qs}}=a^{-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$．故 m 是负分数，n 是正分数时，$\dfrac{a^m}{a^n}$

$=a^{m-n}$.

同理如 m，n 是其他情形时，法则也能成立。

3．因为 $(a^{-\frac{p}{q}})^{-\frac{r}{s}}=\dfrac{1}{(a^{-\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}}}=\dfrac{1}{\sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^{-p}})^{r}}}$

$$=\frac{1}{\sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{-pr}}}}=\frac{1}{\sqrt[qs]{a^{-pr}}}=\frac{1}{a^{-\frac{pr}{qs}}}=a^{\frac{pr}{qs}}=a^{(-\frac{p}{q})(-\frac{r}{s})}.$$

故 m，n 都是负分数时，$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$。

同理如 m，n 是其他情形时，法则也能成立。

4．因为 $(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^p\cdot b^p}=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}$．故 n 是正分数时，法则也能成立。

又因 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n=a^nb^{-n}=\dfrac{a^n}{b^n}$，所以 $(ab)^n=a^nb^n$ 及 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$，由于负指数的引入而统一起来了，指数法则可归纳为：

1．$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，

2．$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$，

3．$(ab)^n=a^nb^n$．

分数指数和根式建立关系后，根式运算中被开方的式中的值不能是负数的限制，应特别引起注意，否则会产生混乱的结果．

例如：$3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}$，$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$，

按算术根定义，$3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{9}$．但是被开方的式中若

是负数，则

$(-3)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{3}$，其值是负数，

$(-3)^{\frac{1}{3}}=(-3)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-3)^2}=\sqrt[6]{9}$，其值是正数．这就出现了矛盾现象．

再如，$(-3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-3}$，在实数范围内没有意义．而$(-3)^{\frac{1}{2}}=(-3)^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{9}$，在实数范围内有意义．为了避免这些混乱现象，我们特别强调在 $a>0$ 时，有 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$．

分数指数概念的引进，消除了幂与根形式上的对立，一个幂可以写作根式（$x^2=\sqrt{x^4}$），一个根式可以写作幂式（$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$）．

整数指数幂与分数指数幂统称有理指数幂，有理指数幂的引进，使我们在进行分式或根式运算时，提供了方便．

例6　计算下列各式：

（1）$\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$

（2）$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

（3）$(a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\cdot(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

（4）$\sqrt[3]{a^3\sqrt[4]{a^2b}}\div\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}}$

（5）$(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

解：（1）利用根式性质得：

原式$=\sqrt[12]{x^{1\times 6}}\cdot\sqrt[12]{x^{2\times 4}}\cdot\sqrt[12]{x^{3\times 3}}=\sqrt[12]{x^6x^8x^9}$

$=\sqrt[12]{x^{23}}=x\sqrt[12]{x^{11}}$

利用分数指数计算，得