数学试题选

翟连林
于　林　编

1985年全国各地高考预考、毕业会考

海洋出版社

1985年全国各地高考预考、毕业会考

数学试题选

翟连林 于 林 编

海 洋 出 版 社

内 容 提 要

本书从1985年全国各地高考预考、毕业会考试题中精选了22套文科、理科数学试题汇编成册，并做了详细解答。

这些试题既注重考查学生的基础知识，又注重考查学生灵活运用这些知识的能力，对开展中学数学教学研究、提高数学教学质量都有参考价值，对分析、研究和交流各地数学命题工作经验也有帮助。

本书可供高中毕业班学生、高中数学教师、各类成人高中毕业班学生及各类职业高中毕业生使用，也可供教研人员参考。还可供高中一、二年级学生、各类成人高中一、二年级学生和各类职业高中一、二年级学生参考。

1985年全国各地高考预考、毕业会考
数 学 试 题 选
翟连林、于 林 编

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）
新华书店北京发行所发行89920部队印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：126千字
1986年3月第一版 1986年3月第一次印刷
印数：1—70,000

统一书号：7193.0786 定价：1.10元

目　录

（一）江苏省苏州市高中毕业会考数学试题及答案

试　题

一、选择题：（1－4每小题2分，5—8每小题3分，共20分）

下面每小题有且只有一个答案是正确的，请把正确答案的英文字母代号写在下表内。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	
								文	理
答案									

1．曲线 $y=|x|$ 与 $x^2+y^2=4$ 所围成的较小平面图形的面积是

（A）$\frac{\pi}{4}$；　（B）π；　（C）$\frac{3}{4}\pi$；　（D）$\frac{3}{2}\pi$．

2．若集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x \mid 3^x>1\}$，则集合 $A\cap B$ 是

（A）$\{x \mid 0<x\leqslant 3\}$；　（B）$\{x \mid x<0\}$；

（C）$\{x \mid 0\leqslant x<3\}$；　（D）$\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$．

3．函数 $f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$（a、b、c 是常数）的反函数

$f^{-1}(x)=\dfrac{-x+5}{2x-1}$，则 a 、 b 、 c 的值是

（A） $a=5$, $b=2$, $c=-1$; （B） $a=2$, $b=1$, $c=5$;

（C） $a=5$, $b=2$, $c=1$; （D） $a=1$, $b=2$, $c=5$.

4．条件甲：一个平面内的两条直线分别平行于另一个平面。

条件乙：两个平面平行。

（A）甲是乙的充分条件；

（B）甲是乙的必要条件；

（C）甲是乙的充要条件；

（D）甲既不是乙的充分条件，又不是乙的必要条件。

5．若 $f(x)$ 是偶函数，则 $[f(x)]^3$ 与 $xf(x)$

（A）都是奇函数；（B）都是偶函数；

（C） $[f(x)]^3$ 是奇函数，$xf(x)$ 是偶函数；

（D） $[f(x)]^3$ 是偶函数，$xf(x)$ 是奇函数。

6．若 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}$，则以下关系式正确的是

（A） $\cos a<\sin a<\operatorname{tg} a$; （B） $\sin a<\cos a<\operatorname{tg} a$;

（C） $\operatorname{tg} a<\sin a<\cos a$; （D） $\cos a<\operatorname{tg} a<\sin a$.

7．从1，2，3，4，5，6六个数字中，任何两个不同的数分别作一个对数的底数和真数，得到不同对数值的方法有

（A）20种；（B）17种；（C）25种；（D）21种。

8．（文科做）若三棱锥的三侧棱相等，则棱锥的顶点在底面内的射影是底面三角形的

（A）外心；（B）内心；（C）重心；（D）垂心。

（理科做）如图1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

P、Q分别是AA_1和CC_1的中点，则四边形$PDQB_1$是

（A）平行四边形；（B）正方形；

（C）矩形；（D）菱形。

二、填空题：（1—4每小题2分，5—8每小题3分共20分）

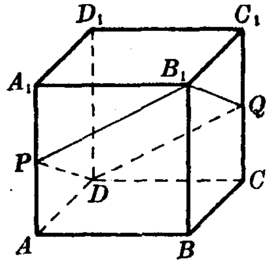

图 1

1．已知点$A(x, y)$，则A点关于直线$x=3$的对称点的坐标是________。

2．若球半径是r，则球的内接正方体的棱长为____。

3．某产品原来每月生产a件，经过革新工艺，提高生产效率，每月的增长率为$m\%$，则经过一年后产品的月产量$y=$____。

4．若椭圆的焦点与短轴的两个端点的连线成$90°$角，则椭圆的离心率是____。

5．函数$y=\log\ (x^2-4)$在区间____内单调递增。

6．已知$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$展开式的各项系数和为16，则$n=$____。

7．（文科做）函数$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的初相为____。

（理科做）$\arcsin(\sin 4)=$____。

8．（文科做）画出函数$y=\sqrt{x-1}$的简图。

（理科做）画出极坐标$\rho=4\sin\theta$的曲线。

三、（本题10分）写出棣莫佛定理，并用数学归纳法进行证明。

四、（本题10分）（文科做）如图2，长方体的长和宽

都是10cm，高是 5 cm。

（1）求证：$B_1D\perp AC$；

（2）求B_1D与平面$ABCD$夹角的正弦值。

（理科做）如图 3，正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为m，对角线BD_1与底面所成的角是θ，E是DD_1上的一点，且$BD_1 /\!/$平面ACE，求：（1）截面ACE的面积；

（2）正四棱柱的体积。

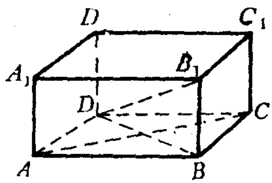

图 2

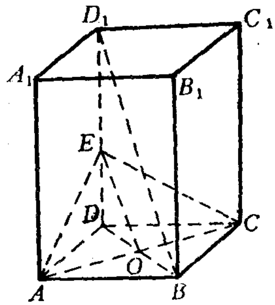

图 3

五、（本题10分）

已知：$f(x)=\log_8\sqrt{(1-\sin x)^3}+\log_2\sqrt{1+\sin x}$，

求：1．$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$的值；

2．$f(x)$在$-\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{4}$上的最小值。

六（本题10分）（文科做）已知中心在原点的双曲线的一个焦点是$F_1(-5,0)$，一条渐近线的方程是$3x-4y=0$，求双曲线的方程。

（理科做）AB是圆O的直径，且$|AB|=2a$，M为

圆周上一动点，作$MN\perp AB$，垂足为N，在OM上取点P，使$|OP|=|MN|$（如图 4），求P点的轨迹方程。

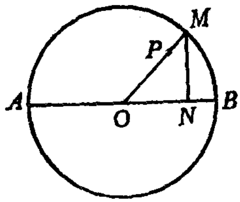

图 4

七．（本题10分）（文科做）圆C：$5x^2+5y^2-20y+16=0$，直线l过点（-2，2）且与坐标轴围成的三角形面积为1．

（1）求直线l的方程；

（2）试判断圆C和直线l的位置关系，并说明理由．

（理科做）已知数列$\{a_n\}$中的$a_1=\frac{3}{2}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+n+2)$．求：

（1）数列$\{a_n\}$的通项公式，并加以证明；

（2）数列$\{a_n\}$的前n项的和．

八、（本题10分）（文科做）一个等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数（公比不等于1），它的项数是偶数，它的全部项的和是其中偶数项和的4倍，又第2项与第4项的积是第3项与第4项和的9倍．

（1）求数列的通项公式；

（2）问数列$\{\lg a_n\}$前几项的和为最大？

（理科做）已知复数z满足$|z+5|-|z-5|=8$，复平面上z、-5、5对应的点分别记为P、A、B，设$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$．

（1）画出P点轨迹的图形；（2）求$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$、$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$的值．

附加题（本题10分，不计入总分）

设由曲线 $y=\sin x$ 在点 $D(t,\sin t)$ 处的切线和直线 $x=t$，$x=2t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ 及 x 轴所围成的图形面积为 $f(t)$，求证：$f(t)<\frac{t^2}{2}+1$。

答　　案

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	
								文	理
答案	B	A	C	B	D	A	C	A	D

二、1．$(6-x,\ y)$；

2．$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$；

3．$y=a(1+m\%)^{12}$；

4．$l=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

5．$(-\infty,\ -2)$　6．$n=4$；

7．（文）$\frac{\pi}{3}$，（理）$\pi-4$；

8．（文）如图5，（理）如图6．

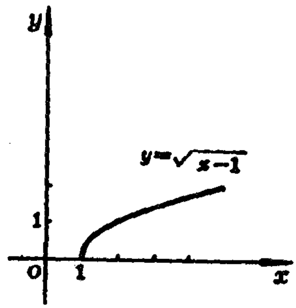

图　5

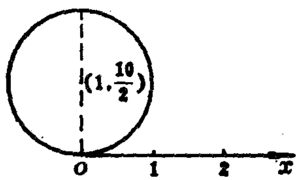

图　6

三、棣莫佛定理：

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(n\in N).$$

数学归纳法证明如下.

(1) 当 $n=1$ 时, 显然成立.

(2) 假设 $n=k$, $(k\in N)$ 时, 等式成立,

即 $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$.

当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
&[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{k+1}\\
&=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^k[r(\cos\theta+i\sin\theta)]\\
&=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\
&=r^{k+1}[(\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta)\\
&\quad+i(\cos k\theta\sin\theta+\cos\theta\sin k\theta)]\\
&=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta].
\end{aligned}
$$

所以 $n=k+1$ 时, 等式亦成立.

综合 (1)、(2), 对 $n\in N$,

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ 成立.

四、(文)

如图 7, $AB=BC=10$, $ABCD$ 为正方形.

(1) 连结 BD, 则 $BD\perp AC$. 又 $B_1B\perp$ 平面 $ABCD$, BD 是 B_1D 在平面 $ABCD$ 内的射影,

由三垂线定理, $B_1D\perp AC$.

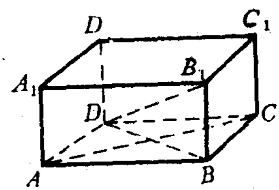

图 7

(2) $\because B_1B\perp$ 平面 $ABCD$, BD 为 B_1D 的射影,

$\therefore\angle B_1DB$ 为 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角.

长方形对角线 $B_1D=\sqrt{10^2+10^2+5^2}=15$,

$\therefore\sin\angle B_1DB=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$,

即BD与底面$ABCD$所成的角的正弦为$\frac{1}{3}$.

（理）

（1）如图3，AC与BD交于O.

$\because BD_1 \parallel$平面ACE，平面ACE交平面BDD_1于OE，

$\therefore EO \parallel D_1B$.

$\because D_1D \perp$平面AC，BD为D_1B在平面AC内的射影，

$\therefore BD_1$与底面所成角为$\angle D_1BD=\theta$.

在平面D_1BD中，$EO \parallel D_1B$，$\therefore \angle EOD=\theta$.

$\because$正方形$ABCD$对角线$AC=BD=\sqrt{2}m$，

$\therefore OD=\frac{\sqrt{2}}{2}m$.

在$Rt\Delta EDO$中，$DO \perp AC$，DO为EO在平面AC内的射影，$\therefore EO \perp AC$.

$$\therefore S_{截面\Delta ACE}=\frac{1}{2}AC \cdot OE=\frac{1}{2}\sqrt{2}m \cdot \frac{\sqrt{2}m}{2\cos\theta}$$

$$=\frac{m^2}{2\cos\theta}.$$

（2）在ΔD_1BD中，$\because EO \parallel D_1B$，$O$为$BD$中点，

$\therefore E$为D_1D中点，即$D_1D=2DE$.

在$Rt\Delta EOD$中，$ED=OE\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}m\,\mathrm{tg}\,\theta$，

$\therefore D_1D=\sqrt{2}m\,\mathrm{tg}\,\theta$;

$\therefore V_{\text{正四棱柱}} = S_{\text{底}} \cdot DD_1 = m^2\sqrt{2}\,m\,\mathrm{tg}\theta = \sqrt{2}\,m^3\,\mathrm{tg}\theta$.

五、函数定义域 $-1 < \sin x < 1$，

即 $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的实数.

$$f(x) = \frac{3\log_2\sqrt{1-\sin x}}{\log_2 8} + \log_2\sqrt{1+\sin x}$$

$$= \log_2|\cos x|,\quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f(x) = \log_2\cos x$.

$\because x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ 时，$\cos x$ 递增，$f(x)$ 递增.

$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\cos x$ 递减，$f(x)$ 递减.

$\therefore f(x)$ 的最小值只能在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{\pi}{4}$ 处取得，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$.

六、（文）设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，它的渐近线方程为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 1$，即 $bx \pm ay = 0$.

由题设条件，$\frac{b}{3} = \frac{a}{4}$，$c = 5$. 由 $a^2 + b^2 = c^2$，知 $c = 5$ ，$a^2 = 16$，$b^2 = 9$.

$\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

（理）解法一：以AB为x轴，AB中点为原点建立直角坐标系（如图8）。

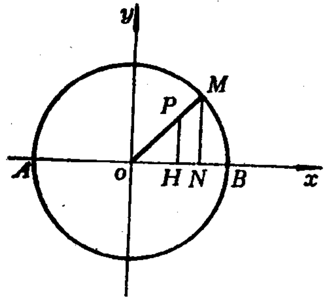

图 8

圆的方程为 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$

（θ为参数）

动点M的坐标为（$a\cos\theta$，$a\sin\theta$），$\angle POx=\theta$，

由题设

$|OP|=|MN|=|a\sin\theta|$，

∴点P的参数方程为

$$\begin{cases} x = |OP|\cos\theta = a|\sin\theta|\cos\theta = \pm\dfrac{a}{2}\sin 2\theta, \\ y = |OP|\sin\theta = a|\sin\theta|\sin\theta = \pm\dfrac{a}{2}(1-\cos 2\theta). \end{cases}$$

即 $\begin{cases} a\sin 2\theta = \pm 2x, \\ a\cos 2\theta = \pm 2y + a, \end{cases}$

∴P点轨迹方程为$x^2+y^2\pm ay=0$。

解法二：建立直角坐标系（如图8）。设M点坐标为(x_1, y_1)点P的坐标为（x，y），则圆的方程为$x^2+y^2=a^2$，因为M点在圆上，则有

$$x_1{}^2+y_1{}^2=a^2 \qquad ①$$

作$PH\perp Ox$轴于H，则$Rt\Delta OPH \backsim Rt\Delta OMN$，

即$\dfrac{|OH|}{|ON|}=\dfrac{|PH|}{|MN|}=\dfrac{|OP|}{|OM|}$，

$$\left.\begin{aligned} \therefore a|x| &= |x_1||OP| \\ a|y| &= |y_1||OP| \\ \text{又 } |OP| &= |MN| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a|x| = |x_1 y_1| & ② \\ a|y| = |y_1|^2 & ③ \end{cases}$$

$=|y_1|$

$\dfrac{②^2}{③}$，得 $x_1^2=a\dfrac{x^2}{|y|}$. 将$x_1^2=a\dfrac{x^2}{|y|}$，$y_1^2=a|y|$

代入①式，得 $a\dfrac{x^2}{|y|}+a|y|=a^2$，

$\therefore x^2+y^2=a|y|$，

故$x^2+y^2\pm ay=0$，此即P点轨迹方程.

解法三：建立以圆心为极点，OB为极轴的极坐标，求轨迹方程.（下略）

七、（文）（1）圆C的圆心为$M(0,2)$，半径$R=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

设直线l的方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

则$\dfrac{1}{2}|a||b|=1$，$\dfrac{-2}{a}+\dfrac{2}{b}=1$，

即$|ab|=2$，$a-b=\dfrac{1}{2}ab$.

当$ab=2$时，解$\begin{cases}ab=2,\\ a-b=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=-1\\ b=-2,\end{cases}$

$\therefore$直线l的方程为$\dfrac{x}{2}+y=1$，

或$-x-\dfrac{y}{2}=1$，即$x+2y-2=0$，或$2x+y+2=0$.

当$ab=-2$时，解$\begin{cases}ab=-2\\ a-b=1\end{cases}$ 这时无实数解.

（2）点M（0，2）到直线$x+2y-2=0$距离为

$\dfrac{|0+2\times2-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=R$，这时直线与圆相切.

点M（0，2）到直线$2x+y+2=0$的距离为
$\frac{|0+2\times1+2|}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}>R$，这时直线与圆相离。

(理)解法一：先用$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+n+2)$探索通项公式。

（1）$a_1=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$，

$$a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1+2\right)=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4},$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+2+2\right)=\frac{25}{8}=3+\frac{1}{8},\ \cdots\cdots$$

∴推测$a_n=n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$。

用数学归纳法证明如下：

(i) $n=1$时，前面已证，公式成立。

(ii) 假设$n=k$（$k\in N$）时，$a_k=k+\left(\frac{1}{2}\right)^k$成立，
则当$n=k+1$时，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+k+2)$$
$$=\frac{1}{2}\left[k+\left(\frac{1}{2}\right)^k+k+2\right]$$
$$=(k+1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$ 亦成立。

综合(i)、(ii)得数列通项公式为
$a_n=n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$（$n\in N$）。