下册

〔苏〕多洛费也夫等·上海教育出版社

初等数学问题选析

CHUDENG SHUXUE WENTI XUANXI

初等数学问题选析

初等数学问题选析

下册

G. 多洛费也夫
〔苏〕M. 波塔坡夫 著
N. 罗 佐 夫

李鸿祥 俞兰芳 翁仲章 译

上海教育出版社

ELEMENTARY MATHEMATICS

SELECTED TOPICS AND PROBLEM SOLVING

G. Dorofeev, M. Potapov, N. Rozov

MIR PUBLISHERS, MOSCOW, 1980

初等数学问题选析

下 册

G. 多洛费也夫

〔苏〕 M. 波塔坡夫 著

N. 罗 佐 夫

李鸿祥 俞兰芳 翁仲章 译

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 江苏高邮印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 11.375 字数 249,000

1983 年 9 月第 1 版 1983 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—20,500 本

统一书号：7150·2953 定价：0.96 元

内 容 提 要

本书原是苏联的数学高考复习参考书；内容包括了初等数学中所有的主要部分．与通常的复习参考书不同，这本书的每一节中只有简短的内容提要，而主要是通过问题选析的形式，指出应该掌握的定义、定理或法则，讲述了解题方法的规律，介绍了许多特殊的技巧，特别注意逻辑上的严密性．这本书还有一个重要特点，就是分析了一般学生在考试中易犯的典型错误．在每节后还附有适量的练习题；书末附有习题答案或解法提示．本书可供我国中学师生及知识青年参考，师范院校数学系的师生也可阅读．

本书下册包括第二章三角、第三章几何及第四章非标准问题(上册是第一章算术与代数)．

序　言

数学成为物理和技术科学的基本工具已经有很长时间了。近年来，数学的研究方法逐渐深入到化学、生物学、经济学、地质学、语言学、医学、教育学、心理学、考古学、法律和军事等领域中。

中学初等数学课程是整个数学知识的基础，不牢固地掌握这个基础课程，就谈不上掌握数学的更高分支，也谈不上在自己的科学实践活动和技术工作中应用数学。

不言而喻，数学知识并不仅仅是记住大量的公式；求解问题在数学中占有核心地位，但是解题并不只意味着要完成一定数量的演算，最重要的是答案要完整，逻辑上没有破绽。而这正是学生面临的主要困难，因为记住一定数量的公式或者按照特殊的步骤做练习，比之理解问题的实质要容易得多。

本书的目的是帮助中学生弄清解题的逻辑过程，教会学生反问自己为什么现在要这么做，并且能回答这一点。尤其重要的是使学生在解答过程的每一步中都能了解自己已经做了些什么，下面还要做什么。简而言之，我们试图教给学生怎样合理地解一个题目。

这个方法的特点已贯串在正文中。与有经验的数学家通常所做的不同，我们并不总是给出问题的最优或最简捷的解法。我们力求用没有经验的学生眼光来观察手头的问题，而这样的学生并没有什么聪明的技巧、手段或特殊解法。我们用的是对一般水平的学生来说似乎是最自然的解法，主要的

是这种解法始终非常注重逻辑性，并且做得尽可能地严格。

读者可能发现某些简单的例子被分析得太详细了，但是请不要急于批评这个做法，因为某些问题显得简单也许就是由于没有被深入地研究过。另外，也不是所有的解答都写得很详细。我们希望读者不只是读读本书，而是要用手中的笔和纸来研究它。有大量内容留下来让学生自己去弄清楚，这主要是指一些理论部分和问题解答的某些步骤。

要强调的是，本书不是一本普通的教科书，而是一本这样的书，它将通过一些精心挑选的理论课题和相当丰富的问题解答，使学生扩大和加深他们的初等数学知识，并使他们在高等学校中能更顺利地开始学习高等数学。这里所选的并作详细讨论的是那些通常产生麻烦的课题，或者是因各种原因而没有受到应有重视的课题。初等数学中最复杂和最重要的部分，我们已用详细的题解和随后的讨论作了分析和解释，并特别注意到了分析学生的典型错误。

值得强调的另外一点是，我们仅考虑初等数学中较为传统的课题。我们没有使用解析几何或微积分方法。在几何部分，既未详细叙述公理系统，也不多用集合论术语。

本书以习题形式对每一部分补充了大量的问题，答案在书末给出。

本书对广大范围的读者都是有帮助的。这些读者包括中等学校的学生和师范学院或师范大学的大学生，以及中等或高等师范院校的数学教师。它也可以作为正规教科书的一种补充而用于自学。

G. 多洛费也夫

M. 波塔坡夫

N. 罗佐夫

目　　录

（下　册）

第二章　三　　角

§2.1　关于三角的一般说明

学生通常熟悉角的三角函数定义。但是，象在代数中研究的所有函数那样，三角函数最终可以看成是数值变量的函数。然而，一个给定的数的正弦这样的短语却引起一些困难。

当问起 $\sin\pi$ 表示什么时，学生常常很快地答道："$\sin\pi=0$"。然而问题不是问 $\sin\pi$ 等于什么，而是问这个符号代表什么意思，应该怎样理解记号 $\sin\pi$。实际上，数 π 的正弦，即 $\sin\pi$，就是 π 个弧度的角（即 180° 的角）的正弦。

数值变量的三角函数的定义是逐步给出的。这些函数先是定义为任意（正或负）角的函数，然后再引进角的弧度度量，从而把 a 弧度的确定角与实数 a 联系起来；并且反过来，将每一个实数都唯一地与一个角相联系。这个实数就是弧度制下该角的大小。最后，我们可以这样定义数值变量的三角函数：数 a 的三角函数就是 a 弧度的角的三角函数。概括地说，就是从一个给定的数可以求得相应的角，而对每个角，三角函数是可以确定的。

这样一来，$\sin 10$ 就是 10 弧度的角的正弦。换句话说，我们必须取 Oxy 坐标系下中心在原点 O 的单位圆，并且求出圆周上的点 M，使得向量 $\overrightarrow{OM}$ 和 Ox 轴按逆时针方向量起，构

成10弧度($\approx 570°$)的角①．于是，点 M 的纵坐标(它是一个数字!)就是10弧度的角的正弦，这个数值等于 $\sin 10$．

我们知道，最后得到的三角函数定义完全不包含角，而只是建立了数之间的一种关系．角的引进只是一个中间的辅助步骤，这种步骤的必要性完全是出于教学法的考虑．

学生经常使用符号 ∞．一般地说，在初等数学中并不常用这个符号．例如，一个常见的但无意义的式子是 $\operatorname{tg} 90° = \infty$，或用文字叙述为："一个直角的正切等于无穷大"．有时学生甚至这样"证明"它：

$$\operatorname{tg} 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty.$$

要记住，所有这些运算都是没有意义的．

三角公式当然必须记住，但是学生还应该能够推导出它们之中的每一个来．因为推导公式的能力远比没有理解推导过程的单纯记忆重要得多．

从分析三角公式的证明得知，如果学生记住了 $\sin x$，$\cos x$，$\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$② 等函数的定义和基本性质，记住了关系式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 及和角公式，那么任何一个三角公式就都能很快地推得．例如，以这些为基础，容易推得诱导公式、积化和差或和差化积公式，等等．

---

① 这里要指出一种常见的错觉：认为用度数度量角时，得到的是一个具体的数字，而用弧度度量时只给出一个抽象的数．实际上，不管是5公里，还是28°，或是10弧度，任何一种度量总是给出一个具体的数．当用弧度度量角时，纯粹出于约定，我们略去了单位名称，并且常说"一个等于 3π 的角"，而不说"一个等于 3π 弧度的角"．

② 记号 $\frac{1}{\sin x} = \csc x$(余割)、$\frac{1}{\cos x} = \sec x$(正割)也会遇到．

假设我们需要半角的正弦公式①．由和角公式及

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

我们马上可以写出

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\\&=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\\&=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\\&=\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\frac{\alpha}{2}\\&=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

由此得

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\quad\text{即}\quad\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.\qquad(1)$$

另一方面，过分地强调推导公式的重要性，而不去记忆公式，也是不明智的．如果那样做，在考试中推导所需要的公式就要占去很多时间．所以学生积极记忆的公式范围应该广泛一点．

许多公式可以用各种方法推得，其中任何两种方法实际上是等价的．学生应该挑选他最喜欢的一种．唯一的要求是，推导过程要正确地进行．标准教科书中所给出的公式证明只应看作是可能的推导形式之一．如果学生能提出不同的推导方法，那就更好了．应该优先选用包含直接推证的简单方法．

注意，在推导一个公式时，不要依赖那种本身还需从欲

---

① 最好说一数之半的正弦公式，一数的两倍的余弦公式等等．但是这里我们不违反传统说法，仍然沿用“角”这个词．然而要记住，以后可以交替地使用“角”和“数”．

证公式导出的公式。例如，学生常常如下证明函数 $\cos x$ 的偶性：

$$\cos(-x)=\cos(0-x)$$
$$=\cos 0\cos x+\sin 0\sin x=\cos x. \qquad (2)$$

这一系列等式使用了当 $\alpha<\beta$ 时的和角公式 $\cos(\alpha-\beta)$。因此，(2) 式中给出的余弦函数的偶性证明，只有当学生能够不求助于余弦函数的偶性而证明出 $\cos(\alpha-\beta)(\alpha<\beta)$ 的公式时，才能认为是恰当的。

关于对公式(1)中的符号"±"的理解，存在着非常普遍的混乱。一些学生相信"半角的正弦可以取两个值"；另一些人认为这两个值中只能选用一个(即不是对应于正号，就是对应于负号)。但当要选出一个确定的值时，他们却不能正确地给出解释。

实际上，在公式(1)中，对于任何一个确定的值 α，我们不是取对应于正号的值，就是取对应于负号的值(但是永远不是同时取两个值！)①。选哪个值的问题取决于角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的那个象限：如果它在第一或第二象限，那么应取正号；如果它位于第三或第四象限内，那么就取负号②。

因此，(1)式中的符号 ± 并不表示半角的正弦有"双重符号性质"。我们必须放上符号"±"，这是因为 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 对于 α 的不同的值可以取正值或取负值，而 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ 这个式子对于所有的 α 值都是非负的。

① 假设 $\cos\alpha\neq1$；因为当 $\cos\alpha=1$ 时，两者都是零。

② 容易看出，当 $4n\pi<\alpha<4n\pi+2\pi$ 时，在(1)式中取正号，当 $4n\pi+2\pi<\alpha<4n\pi+4\pi$ 时，就取负号，这里 n 是任一整数。当 $\alpha=2n\pi$ 时，选取哪个符号并不重要，因为对于这个值，有 $\sin\frac{\alpha}{2}=0$。

事实上，公式(1)表明，$\cos\alpha$ 的值并不唯一地确定 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的值，而只是确定了它的绝对值。为了确定 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的值，必须同时知道 $\cos\alpha$ 以及角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限。

因此，最好避免象(1)式那样的写法，而使用更为恰当的记号

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

当需要利用一个三角式子来计算另一个三角式子的值时，也会遇到与前面类似的情况。应该记住，一般地说，根据角的一个三角函数值，只能确定这个角的其它三角函数的绝对值。为了决定这些函数值本身，还必须知道所给的这个角位于哪个象限内。

我们来考察一个例子。

已知 $\sin\beta=\frac{4}{5}$，$0<\beta<\pi$。如果(a) β 是锐角；(b) β 是钝角，试问下式等于什么：

$$\frac{\sqrt{3}\sin(\alpha+\beta)-\frac{2}{\cos(\pi/6)}\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}.$$

将这个比式简记为 M，可以容易地把它化为如下形式

$$M=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha}[\sin\alpha(3\cos\beta+4\sin\beta)$$
$$+\cos\alpha(3\sin\beta-4\cos\beta)].$$

要计算这个式子的值，必须知道 $\sin\beta$ 及 $\cos\beta$ 的值。由于

$$\sin\beta=\frac{4}{5},$$

因此可以马上求得这个角的余弦的绝对值：

$$|\cos\beta|=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3}{5}.$$

余弦的符号必须根据所考虑的象限来决定。

当 β 是锐角时，我们有 $\cos\beta=\frac{3}{5}$。因此，容易算出 $M=\frac{5\sqrt{3}}{3}$；如果 β 是钝角，那么就有 $\cos\beta=-\frac{3}{5}$，因此

$$M=\frac{\sqrt{3}}{15}(7+24\operatorname{ctg}\alpha).$$

遗憾的是，并不是所有的学生都能搞清哪些变量值能使所给公式成立。经常听到这样的话："教科书中导出的所有三角公式都是恒等式，这就是说，它们对于所有的变量值都成立"。实际上并非如此。它们仅仅对允许的变量值成立。

特别地，公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

对于任意的 α 值，确实是成立的；而公式

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$$

只对异于 $\frac{k\pi}{2}$ 的 α 值有意义，这里 k 是一个任意整数(因为当 $\alpha=\frac{k\pi}{2}$ 时，公式中的两个函数之一没有意义)。

因此，当写出一个三角公式时，始终要记住能使该式成立的各个字母的取值范围。

求出使三角式子成立的值的问题，可以通过确定使每一个组成函数都有意义的变量值来解决。如果某个变量值至少使一个组成函数无意义，那个值就必须除去。

例如，考察公式

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\tag{3}$$

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$\beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ (其中 k 和 n 是任意整数)时，左端有意义；对于这两组值中的每一个，不是 $\operatorname{tg}\alpha$ 就是 $\operatorname{tg}\beta$ 无意

义。(3)式右端对于使 $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$ 的那些 α 和 β 值有意义；容易证明，这又归结到前面得出的对于 α 和 β 的限制。于是我们看到，(3)式的左端和右端在同样条件

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$$

(式中 k, n 为任意整数) 下存在。这两个不等式给出了使两个正切之差的公式成立的条件。

对于公式

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{4}$$

就需要作一些更为复杂的分析。当 $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，左端有定义；当 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 时，$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ 无意义。为使 (4) 式右端有意义，$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 必须都有定义，即必须有 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$，$\beta\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$，这里 n 和 m 都是整数。此外，分母 $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ 必须异于零。由于 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 有定义 (我们已经作了假设)，条件

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$$

可以改写为

$$\cos(\alpha-\beta)\neq 0.$$

因此，如果 $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k 是一个整数)①，那么(4)式右端分母就异于零。于是差的正切公式在

---

① 特别要注意，为了把 α 和 β 这对值从公式(4)的允许值域中除去，只要除去 $\alpha=\frac{\pi}{2}+n\pi$ (n 是某个整数，β 是任意数) 或 $\beta=\frac{\pi}{2}+m\pi$ (m 为某个整数，α 是任意数) 或 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k 为一个整数)。即使这些等式中有一个成立，公式(4)对于变量的相应值也不再成立。

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+m\pi,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \tag{5}$$

(式中 n、m、k 是整数)的假设下成立①。

比较一下前述使(3)和(4)式有意义的条件，我们看到这两个公式之间有一个本质的区别。两个正切之差的公式的左端和右端，对于同一组变量值，要么同时存在，要么同时不存在。而两角差的正切公式左端和右端就有不同的存在区域，例如，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$ 时，(4)式左端有意义，而右端却无意义。

可以给出左端和右端具有不同定义域(变量的允许值域)的其它三角公式的例子。例如，用半角正切表示的正弦和余弦的公式，和角的正切公式，二倍角的正切公式(建议读者对这些公式作仔细的分析)。

这个事实在解三角方程时是首先要注意的(在上册§1.9中已经详细讨论过了)。

习　　题

1. 试定义

　(a) 负角；　(b) 角的弧度度量；　(c) 已知角的正切；

　(d) $\cos 1$；　(e) $\arcsin a$。

2. 说出下列各条是定义，还是定理：

　(a) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$ 是任意值；

　(b) 角 φ 的正弦，等于自原点出发并和横轴正方向构成角 φ 的单位向量的纵坐标；

　(c) 函数 $y=\sin x$ 的图象通过坐标原点；

　(d) $\operatorname{ctg} 90^\circ=0$。

---

① 条件(5)有时这样写：

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.$$

这里假设，在每一个不等式中，数 k 与其它两个不等式无关地取遍所有整数.