2005版·考研经典

NETEM MATHS

全国硕士研究生入学统一考试

数学四

模拟试卷8套

文登考研数学团队

陈文灯 黄先开

曹显兵 施明存

殷先军

文登考研

指定用书

- 依据新大纲
  10年命题规律
- 答案详尽
- 附"知识点水平检测表"

世界图书出版公司

FOCUS 聚焦图书

数学四

模拟试卷8套

2004.12.13购于文泉

2005版·考研经典

NETEM MATHS

全国硕士研究生入学统一考试

数学四 模拟试卷8套

文登考研数学团队

陈文灯 黄先开 曹显兵

施明存 殷先军

《数学复习指南》

帮助考生理解和吃透大纲，掌握解题方法和技巧，奠定坚实的应试知识基础。

《数学题型集粹与练习题集》

将浩渺的习题浓缩于有限的题型之中，并配以练习题巩固所学知识点。

《重点题型》

帮助考生在中后期复习阶段梳理思路，对重点题型了然于胸。

《模拟试卷》

依据05年新大纲与十年命题规律编写，以全面检测考生的水平。

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

2005版数学模拟试卷8套.4/陈文灯等编著.—3版.—北京:世界图书出版公司北京公司,2003.8

ISBN 7—5062—6066—2

Ⅰ.2... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第070935号

数学四·模拟试卷8套

主　　编:陈文灯　黄先开　曹显兵　施明存　殷先军
责任编辑:武海燕
封面设计:滕晓娜

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街137号　邮编100010　电话010—62198079)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:廊坊人民印刷厂

开　　本:787×1092毫米　1/16
印　　张:8.875
字　　数:216千字
版　　次:2004年8月第3版　　2004年8月第1次印刷

ISBN 7—5062—6066—2/G·148　　**定价:12.60**

服务热线　010—62198078

前 言

目前考研数学统考题的特点可以用两句话，十八个字来概括：信息量大，题量大；知识面宽，综合性强，难度大。这些命题的特点在近几年不会有大的变化。面对这种形势如何合理安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题。解决好了，应试时就能考出自己的水平，或许能超常发挥，考出好成绩；解决不好就会“事倍功半”。为此，我建议同学们这样复习：

(1)牢记重要的概念、定理和公式。这样做可使你考试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯错用定理、公式的错误。

(2)掌握一些题型的快速解法，提高解题速度。

(3)掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧、重要题型的解题思路和方法。这可使你考试时很快找到解题的突破口，节省宝贵的考场时间。

《数学四·模拟试卷8套》就是基于上面的出发点并通过对历年考研真题的深入研究和我们多年的考研辅导经验精编了8套难度与真题相当或稍大、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟训练试卷。由于各种考研辅导书中选了大量的真题作为例题讲解，所以只有通过模拟试题的训练，才能更真实地检验自己的复习效果，真正起到查缺补漏的作用。

本书中每套试卷完全根据2005年全国硕士研究生入学统一考试样卷比例编写，对每套模拟试卷中的每道题给出了详尽的解析，包括解题切入点提示、答案详解、知识点的链接及对解题技巧的评注。

另外，对每套试卷，请读者严格掌握在3小时内独立做完，然后再看后面答案解析中的解题过程。通过与答案比照，看看自己在哪些方面还存在不足，及时突破提高。

由于一套试卷不足以检验考生的复习程度，我们在书的最后给出了一张知识点水平检测表格，包括所有试题所考查的知识点，请读者做完8套试卷后认真填写，检测自己的薄弱环节，及时调整，重点补习。

由于增添了新的思路、新的题型，难免有欠缺和不足或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

编　者

2004.8

目 录

108

数学四　模拟试卷（一）

8:30-11:30

考生注意:（1）本试卷共23大题,满分150分.

（2）根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$、cot$x$、arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分,把答案填在题中横线上)

(1) 设函数$f(x)$在点$x=0$处有$f(0)=0$, $f'(0)=-2$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)\,dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=$ ~~0~~ 0.

(2) 设$z=xf(u)+g(u)$, $u=\dfrac{y}{x}$,且$f(u)$及$g(u)$是二阶可导,则$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ 0.

(3) 设函数$y=y(x)$满足$\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$,且$y(1)=1$,则$\int_1^2 y(x)dx=$ $\frac{\pi}{4}$.

(4) 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & a\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$($a$为某常数),$\boldsymbol{B}$为$4\times 3$的非零矩阵,且$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,则矩阵$\boldsymbol{B}$的秩为 1.

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{B}=$ $\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(6) 设A、B是两个随机事件,$P(A)=0.4$, $P(AB)=0.2$, $P(A\mid B)+P(\bar{A}\mid\bar{B})=1$,则$P(A+B)=$ 0.7.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内) -8

(7) 设$F(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\}$,其定义域为$(-1,1)$,其中$f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=(x+1)^2$,则$F'(x)$等于

(A) $\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ 2(x+1), & 0<x<1.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2(x+1), & 0<x<1,\\ 1, & -1<x<0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ 2(x+1), & 0\leqslant x<1.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2(x+1), & 0\leqslant x<1,\\ 1, & -1<x<0.\end{cases}$　【A】

(8) 已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导,且$f''(x)>0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$,则当$x>1$时,

$f(x)$

(A) 单调减少且大于零. (B) 单调增加且大于零.

(C) 单调减少且小于零. (D) 单调增加且小于零. 【 ~~C~~ B 】

(9) 下列等式中正确的是

(A) $\int f'(2x)\mathrm{d}x = f(2x) + c.$ (B) $\int \mathrm{d}f(2x) = f(2x) + c.$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = f(x-t).$ (D) $\mathrm{d}\int_0^1 xf(xt)\mathrm{d}t = f(x).$ 【 B 】

(10) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$ 可写成

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$ (B) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y.$ (D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$ 【 D 】

(11) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} < 0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} > 0$,则在下列条件中使 $f(x_1,y_1) < f(x_2,y_2)$ 成立的是

(A) $x_1 < x_2,\ y_1 < y_2.$ (B) $x_1 < x_2,\ y_1 > y_2.$

(C) $x_1 > x_2,\ y_1 < y_2.$ (D) $x_1 > x_2,\ y_1 > y_2.$ 【 C 】

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,则

$|AB|=0 \Rightarrow |A|=0, |B|=0$

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均不可逆的充要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆.

(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < \mathrm{n}$ 与 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) < \mathrm{n}$ 均成立的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB}) < \mathrm{n}$.

(C) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵.

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件是 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似. 【 ~~A~~ D 】

(13) 设随机变量 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,若概率 $P(aX-bY<\mu)=\dfrac{1}{2}$,则

(A) $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}.$ (B) $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}.$

(C) $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}.$ (D) $a=-\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{1}{2}.$ 【 B 】

(14) 设 X 为随机变量,若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & -2 & -X\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ 的特征值全是实数的概率为 0.5,则

(A) X 服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布. (B) X 服从二项分布 $\mathrm{B}(2,0.5)$.

(C) X 服从参数为 1 的指数分布. (D) X 服从正态分布 $N(0,1)$.

【 A 】

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤） -36

得分	评卷人

(15)（本题满分 8 分） -3

设 $f''(1)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]\,\mathrm{d}t$，求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 某个邻域内的导数，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

$\varphi(x)=\dfrac{1}{x-1}\int_0^1 d f[1+(x-1)t]=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$

由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0 \Rightarrow f(1)=0,\ f'(1)=0$

$\varphi(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

$\varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(1)$

~~若~~ $f''(x)$ 在 $x=1$ 点连续，则 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处连续 $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)}{x-1}-\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

~~若~~ $f''(x)$ 在 $x=1$ 点不连续，则 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处不连续 $\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(1)=\varphi'(1)$

$\therefore$ $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处连续

得分	评卷人

(16)（本题满分 8 分） -7

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=0$，$\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x=1$.

证明：至少存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=2$.

$\int_0^1 x f'(x)dx=\int_0^1 x\,d f(x)=xf(x)\Big|_0^1-\int f(x)dx=-\int_0^1 f(x)dx=1$

~~$=f(\eta)=1.\ \eta\in(0,1)\Rightarrow f(\eta)=1$~~ $\int_0^1 f(x)dx=-1$

令 ~~$F(x)=f(x)-2x$~~ 令 $F(x)=\int_0^x f(x)dx$. $F(0)=0,\ F(1)=-1$

~~$F(1)=f(1)-2=-2.\ F(0)=f(0)$~~ $F'(1)=f(1)=0$

由泰勒公式：$F(0)=F(1)+F'(1)(0-1)+\dfrac{F''(\xi)}{2!}(0-1)^2\quad \xi\in(0,1)$

$\Rightarrow F''(\xi)=f'(\xi)=2$

得分	评卷人

(17)（本题满分 9 分）

设 $\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(2x^2-1)y=x^3, x\geqslant 1, \\ y(1)=y_1. \end{cases}$

(1) 求满足上述初值问题的解 $y(x)$；

(2) 是否存在 y_1，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在有限极限.

(1) 求 $x\frac{dy}{dx}-(2x^2-1)y=0 \Rightarrow C=xye^{-x^2}$

令 $C(x)=xye^{x^2}$ 代入原式得 $C(x)=\cancel{\frac{x^4}{4}+C_1}-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+C_1$

∴ $\cancel{\frac{x^4}{4}+C_1=xye^{-x^2}}$ $y=\frac{\cancel{C_1e^{x^2}}-(x^2+1)}{2x}+\frac{C_1e^{x^2}}{x}$

∵ $y(1)=y_1$ ∴ $C_1=\frac{y_1+1}{e}$ ∴ $\cancel{\frac{x^4-1}{4}+y_1e=xye^{-x^2}}$ ~~即~~ $\cancel{y=\frac{x^4+4y_1e}{4x}e^{x^2}}$

$\cancel{y=-\frac{1}{2}e}$ $y=\frac{2(y_1+1)e^{x^2-1}-(x^2+1)}{2x}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(y_1+1)e^{x^2-1}}{\dots}$ $=\cancel{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2(y_1+1)e^{\frac{1}{t}-1}\cdot t-1}{t}}$

∴ ~~不存在~~ $y_1=-1$ 时 存在 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}$

得分	评卷人

(18)（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程.

由关系式代入 $x=0 \Rightarrow f(1)-3f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0$、$\Rightarrow f(-1)=0$

~~代入 $x=1$ 得 $f(e)-3f(1+\sin1)=3$~~

切线方程为 $y=f'(-1)(x+1)=-f'(1)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{2x^2+o(x^2)}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+\sin x^2)-f(1)}{\sin x^2}$、$\frac{\sin x^2}{2x^2+o(x^2)}=1$

$\Rightarrow f'(1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}f'(1)=-f'(1)=1$

$\Rightarrow f'(1)=-1$

∴ 切线方程为 $y=x+1$

得分	评卷人

（19）（本题满分 8 分）

已知某种商品的需求价格弹性为 $\varepsilon = \frac{P}{Q}e^{P} - 1$，其中 P 为价格，Q 为需求量，且当 $P = 1$ 时，需求量 $Q = 1$，试求需求函数关系.

$\varepsilon = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}e^{P} - 1 \Rightarrow \frac{dQ}{dP} = -\frac{Q}{P} + e^{P}$

令 $\frac{dQ}{dP} + \frac{1}{P} \cdot Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{C}{P}$ 令 $C = C(P)$ 代入原方程 $\cancel{C'(P) = \frac{e^P}{P}}$ $C'(P) = Pe^{P}$

$C(P) = Pe^{P} - e^{P} + C_1 \therefore Q = \frac{Pe^{P} - e^{P} + C_1}{P}$ $\cancel{\frac{P-1}{P}e^{P}}$

$\because P = 1$ 时 $Q = 1 \Rightarrow C_1 = 1$ $\therefore Q = \frac{Pe^{P} - e^{P} + 1}{P}$

得分	评卷人

（20）（本题满分 13 分） −10

设 A 是实矩阵. 证明：(1) $A^{T}Ax = 0$ 与 $Ax = 0$ 是同解方程组；(2) 秩$(A^{T}A)$ = 秩(A).

(1) 令 X_i 为 $AX=0$ 的任意解

由 $AX_i = 0 \Rightarrow A^TAX_i = A^T \cdot 0 = 0$ 故 X_i 也为 $A^TAX=0$ 的解.

反之，X_i 为 A^TAX 的解 由 $A^TAX = 0 \Rightarrow X^TA^TAX = 0$ 即 $(AX)^TAX = 0$

从而 $\|AX_i\|^2 = (AX_i, AX_i) = (AX_i)^T(AX_i) = 0$ $\therefore AX_i = 0$ 即 X_i 也是 $AX=0$ 的解.

$\therefore A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解

(2) $\because A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解，

$\therefore$ 两者的解系中基础向量个数相等

$\therefore r(A^TA) = r(A)$

得分	评卷人

(21)(本题满分 13 分) -3

设$B = AA^T$,其中$A^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$,且$a_i(i = 1,2,\cdots,n)$为非零实数,$A^T$为$A$的转置矩阵.

(1) 证明$B^k = lB$,并求数l(k为正整数);

(2) 求可逆矩阵P,使$P^{-1}BP$为对角阵,并写出该对角阵.

(1) $B^k = (AA^T)(AA^T)\cdots(AA^T) = (a_1^2+\cdots+a_n^2)^{k-1}AA^T = (a_1^2+\cdots+a_n^2)^{k-1}B$

$\therefore\ l = (a_1^2+\cdots+a_n^2)^{k-1}$

(2) $\because\ B = AA^T\ \therefore\ r(B) = 1.\ \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0.\ \lambda_n = a_1^2+\cdots+a_n^2$

当$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$时 $B \sim \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots \alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}$, 当$\lambda_n = a_1^2+\cdots+a_n^2$时 $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

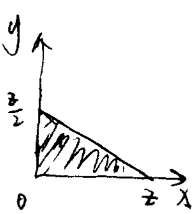
得分	评卷人

(22)(本题满分 13 分) $\therefore P = \begin{pmatrix} a_2 & \cdots & a_n & a_1 \\ -a_1 & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -a_1 & a_n \end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_1^2+\cdots+a_n^2 \end{pmatrix}$

设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 令$Z = X + 2Y$.

(1) 求Z的分布函数$F_Z(z)$及密度函数$f_Z(z)$;

(2) 求$E(Z)$,$D(Z)$.



$F_Z(z) = P(X+2Y \le z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} f(x,y)dy$

$= \int_0^z (e^{-x} - e^{-z})dx = 1 - e^{-z}(z+1).\ \ z>0.$

$z \le 0$时 $F_Z(z) = 0$

$f_Z(z) = \begin{cases} z e^{-z}, & z>0 \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$

$E(Z) = \int_0^{+\infty} z^2 e^{-z} dx = 2$

$E(Z^2) = \int_0^{+\infty} z^3 e^{-z} dx = 6$

$D(Z) = 6 - 2^2 = 2$

得分	评卷人

(23)(本题满分 13 分) -13

要验收一批(100 件)乐器,验收方案如下:自该批乐器中随机地取 3 件测试(设三件乐器的测试是相互独立的),如果 3 件中有一件在测试中被认为是音色不纯,则这批乐器就被拒绝接收,设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为 0.95;而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01. 如果已知这 100 件乐器中恰有 4 件是音色不纯的,试问这批乐器被接收的概率是多少?

A=接收. B_i=第i件被认为音色纯. C_i=第i件是音色纯. $i=1,2,3$

$P(A) = P(B_1B_2B_3) = P^3(B_1)$

$P(B_1) = P(C_1)P(B_1|C_1) + P(\bar{C}_1)P(B_1|\bar{C}_1) = \frac{96}{100}\cdot 0.99 + \frac{4}{100}\cdot 0.05 = 0.9624$

$P(A) = 0.9624^3 = 0.8914.$

A=接收. B_i=取出3件中恰有i件音色不纯 $i=0,1,2,3$

6 $P(A) = P(B_0)P(A|B_0) + P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.8629$

7:55.

数学四　模拟试卷（二）

考生注意：（1）本试卷共23大题，满分150分.

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数，余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$、cot$x$、arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示.

得分	评卷人

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

（1）已知$f(x)$满足$f(0)=0,f'(0)=-2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^u f(u-t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}u}{\sin x(1-\cos x)}=$ $-\frac{2}{3}$.

（2）设$f(x)=\begin{cases}\sin x+2ae^x, & x<0\\ 9\arctan x+2b(x-1)^3, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在$x=0$处可导，则$a=$ 1 ，$b=$ -1 .

（3）已知$f(x)$是微分方程$xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$满足初始条件$f(1)=0$的特解，则$\int_0^1 f(x)dx=$ $-\frac{\pi}{8}$.

（4）设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为三阶相似矩阵，且$|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$为$B$的两个特征值，则行列式$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{AB}|=$ 18 .

（5）已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&a\\1&3&5\\0&0&2\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，则$a=$ -10 .

（6）已知随机事件A、B、C满足$\boldsymbol{P}(A)=0.4,\boldsymbol{P}(B)=0.5,\boldsymbol{P}(C)=0.5$，且$A,B$独立，$A,C$互不相容，则概率$\boldsymbol{P}(A-C\mid \mathrm{AB}\cup \mathrm{C})=$ $\frac{2}{7}$.

得分	评卷人

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）设$f(x)=\int_0^x\arctan(t-x)^2\mathrm{d}t,\ g(x)=\int_0^{\sin x}(3t^2+t^3\cos t)\mathrm{d}t$，当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的

（A）高阶无穷小.　　（B）低阶无穷小.

（C）等价无穷小.　　（D）同阶而非等价无穷小.　【D】

（8）设$f(x)$、$g(x)$在点$x=0$的某邻域内连续，且$f(x)$具有连续一阶导数，满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0,f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$，则

（A）$x=0$为$f(x)$的极小值点.

（B）$x=0$为$f(x)$的极大值点.

（C）$(0,f(0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 【 C 】

(9) 下列结论中,成立的是

(A) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x > \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(B) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x < \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x > \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x < \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x < \int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x < \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$. 【 B A 】

(10) 下列结论正确的是

(A) 若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(B) 若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(C) 若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定可导.

(D) 若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导. 【 C 】

(11) 已知广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(1-p)x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{p-1}x}$ 均收敛,则常数 p 的取值范围为

(A) $p>1$.　(B) $p<1$.　(C) $1<p<2$.　(D) $p>2$. 【 C 】

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵,现有四个命题:

① 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵,则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价; ×

② 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的行列式相等,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵; ×

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 均只有零解,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵; ✓

④ 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为相似矩阵,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 解空间的维数相同. ✓

以上命题中正确的是

(A) ①,③.　(B) ②,④.　(C) ②,③.　(D) ③,④. 【 D 】

(13) 下表中列出了二维相互独立的离散型随机变量 (X,Y) 的部分联合分布律和边缘分布律中的数值,则

X \ Y	0	1	2	$P(X=x_i)$
0	α	$\frac{1}{8}$	β	
1	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$			1

(A) $\alpha=\frac{3}{8},\beta=\frac{1}{12}$.　(B) $\alpha=\frac{1}{24},\beta=\frac{1}{12}$.

(C) $\alpha=\frac{1}{12},\beta=\frac{1}{3}$.　(D) $\alpha=\frac{1}{24},\beta=\frac{1}{6}$. B

(14) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 服从正态分布 $N(0,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(0,\sigma_2^2)$，则概率 $P(|X-Y|<1)$

(A) 随 σ_1 与 σ_2 的增加而增加.

(B) 随 σ_1 与 σ_2 的减少而减少.

(C) 随 σ_1 的增加而增加，随 σ_2 的减少而减少.

(D) 随 σ_1 的增加而减少，随 σ_2 的减少而增加. 【D】

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

得分	评卷人

(15)（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\dfrac{x}{t}\cdot\left[g(2x+\dfrac{1}{t})-g(2x)\right]$，$g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，计算定积分 $\int_0^1 f(x)\,dx$.

得分	评卷人

(16)(**本题满分 8 分**)

设函数$f(x)$满足方程$xf'(x)-3f(x)=-6x^2$,且由曲线$y=f(x)$,直线$x=1$与x轴围成的平面图形D绕x轴旋转一周所得旋转体的体积最小,试求D的面积.

得分	评卷人

(17)(**本题满分 9 分**)

设$u=f(x,y,xyz)$,函数$z=z(x,y)$由方程$e^{xyz}=\int_{xy}^{z}g(xy+z-t)\mathrm{d}t$确定,其中$f(x)$具有一阶连续偏导数,$g$连续,求$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}$.

得分	评卷人

(18)（本题满分 9 分）

已知生产 x 对汽车挡泥板的成本是 $C(x)=10+\sqrt{1+x^2}$（元），每对的售价为 5 元，于是销售 x 对的收入为 $R(x)=5x$.

(1) 出售 $x+1$ 对比出售 x 对所产生的利润增长额为 $I(x)=[R(x+1)-C(x+1)]-[R(x)-C(x)]$. 当生产稳定、产量很大时，这个增长额为 $\lim\limits_{x\to+\infty}I(x)$，试求这个极限值；

(2) 生产 $3x$ 对挡泥板时，每对的平均成本为 $\dfrac{C(x)}{x}$，同样当产品产量很大时，每对的成本大致是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}$，试求这个极限值.

得分	评卷人

(19)（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，$0\leqslant a<b\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

证明：在区间 (a,b) 内至少存在 ξ_1,ξ_2，使

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}.$$