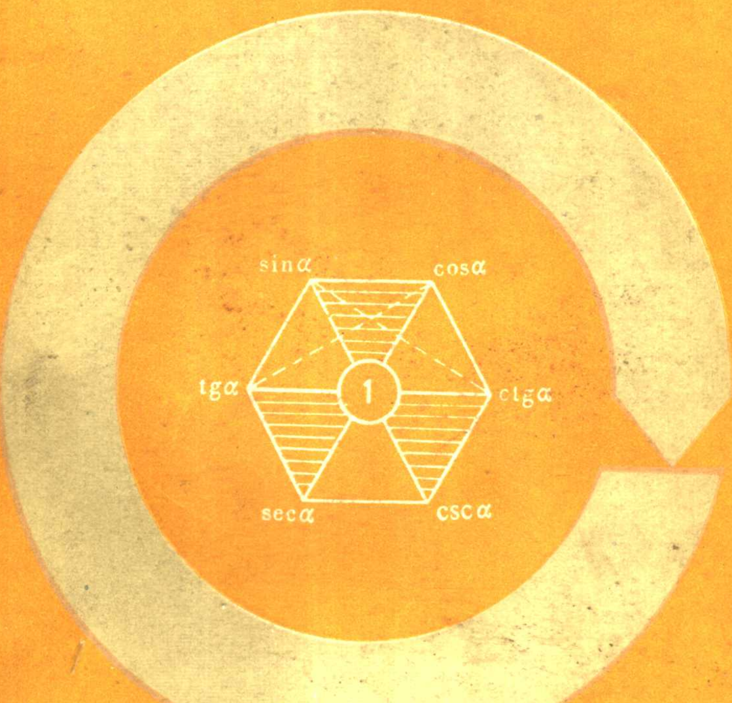
中学数学课本辅导丛书

高中代数第一册学习指导

钱永耀　宋桂茹　编



辽宁教育出版社

中学数学课本辅导丛书

高中代数第一册学习指导

钱永耀　宋桂茹　编

辽 宁 教 育 出 版 社

1987年·沈阳

高中代数第一册学习指导

钱永耀　宋桂茹　编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）金　　城印刷厂印刷

字数：138,000　开本：$787\times1092\,^1/_{32}$ 印张：$6\,^7/_8$
印数：1—34,100
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷

责任编辑：杨　力　　责任校对：王淑芬
封面设计：周咏红

统一书号：7371·110　定价：0.90 元

出版说明

提高学生的自学能力，是时代对人材培养的要求．中学生在求知阶段，主要是从课本中汲取知识营养．长期以来，广大中学生迫切要求出版一套能够帮助他们学好课本的辅导读物，作为良师益友．为了满足这个要求，我们组织了一些执教多年、经验丰富的中学数学教师和专门从事数学教学研究的人员，编写了这套《中学数学课本辅导丛书》．

辽宁教育学院邢清泉、关成志同志担任了本丛书的主编工作，并同钱永耀同志一起审阅了全部初稿．本书第一章由宋桂茹同志执笔，第二、三章由钱永耀同志执笔．

这套辅导丛书紧扣中学数学教学大纲，按照现行数学课本的知识顺序，逐章逐节逐个问题地进行剖析解疑，力求起到提醒注意、开阔思路、指导解题、介绍学习方法的作用．每个单元都配有巩固基本知识的思考与练习，每章后面配有少量典型的综合练习题，帮助学生更好地理解和消化课本内容，提高自学能力。

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

这一章是学习集合与对应的初步知识，并通过分析集合间元素的对应关系，进一步理解函数概念，进而研究幂函数、指数函数和对数函数。

我们所要学的知识结构是：

1. 集合
   - 集合的种类
     - 无限集
     - 有限集
     - 空　集
   - 集合间的关系
     - 子集（真子集、等集）
     - 交集
     - 并集
     - 补集

2. 对应
   - 不成为映射的对应
   - 单值对应——映射
     - 不能形成函数概念的映射
     - 能形成函数概念的特殊映射

→ 逆映射→反函数的概念

- 一一映射
- 非一一映射

函数
- 概念
- 图象、性质

3. 三种基本初等函数
- 幂函数—定义、图象、性质
- 指数函数—定义、图象、性质 } 关系
- 对数函数—定义、图象、性质 }

一 集 合

（一）内容简介

在这一单元里，同学们主要学习集合与元素的概念，集合的表示方法，两集合之间包含与相等的关系，以及交、并、补概念．这些知识对同学来说并不陌生，大家在初中已接触过，但是与初中数学知识比较，抽象性强，观点高了．因为这是由一些数、式或形的集合的概念到一般的集合概念，因此这是认识上的一个飞跃．

本单元重点知识是集合、集合的表示方法及子集、交集、并集、补集的概念，学会这些知识可以使同学们对初等数学中的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确，同时也可以为以后学习近代数学提供有利的条件．

（二）学习指导

集合是近代数学最基础最重要的概念之一，许多学科如数理逻辑、概率统计等都是建立在集合论的基础上的，同学们尽早接触集合的简单知识可为今后学习提供有利条件．中学数学研究的数和图形，即数的集合和点的集合，它和集合思想有密切的关系，用集合的有关概念、术语和记号，可以把有些知识叙述得更准确，更简明，更清楚易懂．另外，在

一些科普读物中也常碰到集合有关术语。因此，在中学阶段学一点简单的集合知识是完全必要的。

1.1 集合

集合知识的学习在我们的课本中是分段进行的。同学们可回忆一下：在小学阶段渗透集合的思想但不引出集合的名词，只是让同学们把具有某种特性的对象看作一个整体，使同学们从小就受到从整体看问题，研究一个整体中各对象的共同性质的训练。在初中讲完正负数以后说："所有正数组成正数集合，所有负数组成负数集合。"这时未加任何说明，第一次出现集合名词。现在到高中我们就正式学习集合的简单知识。

1. 集合概念

（1）集合概念：每一组对象的全体形成一个集合。

（2）集合是原始概念。

①因为集合概念是数学中最原始的概念之一，我们不能用其他更基本的概念来给它下定义，所以把它叫做不定义的概念，或原始概念。

②点、直线、平面等概念也都是不定义的概念，对于这些不定义的概念，我们只能对它作描述性的说明。课本从同学们已有的知识出发，用涉及数、点、图形、整式、常见机器的五个实例引入集合概念，这样既便于同学们接受，又告诉大家集合概念如同其他数学概念一样，不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。

③由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的每一组对象的全体形成一个集合。

（3）空集是补充定义.

2．集合的分类

（1）无限集：含有无限个元素的集合；

（2）有限集：含有有限个元素的集合；

（3）空集：不含任何元素的集合.

3．集合的表示方法

（1）列举法；

（2）描述法.

特点：列举法可以看清集合的元素，描述法可以看清集合元素的特征.

究竟用那种方法，要视具体问题而定．例如，集合$\{2, 0, 3, 1\}$就不宜用描述法表示，而集合$\{x \mid x > -2\}$就不能用列举法表示．两种方法并没有严格的界限，例如$\{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0\} = \{-1\}$；$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{x \mid x \in N, x < 6\}$.

【注意】 a 和$\{a\}$是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$表示只有一个元素 a的集合；中学数学中研究的主要对象是数集和点集.

4．集合概念的特征

（1）确定性：对于任何一个对象都能够确定它是不是某一集合的元素．这是集合的最基本特征，没有确定性就不能成为集合．例如年龄小的人，好看的花都不是集合.

（2）元素互异性：在同一集合里不能重复出现同一元素.

（3）元素无序性：对于一个集合，通常不考虑它的元素之间的顺序．例如$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{5, 1, 4, 3, 2\}$.

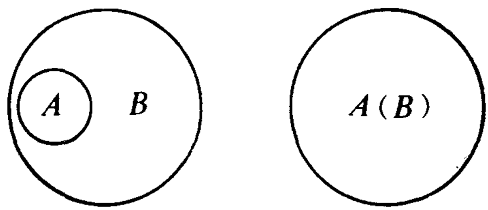
但对于象数列一类的特殊无限集，例如，自然数集合，通常表示为$N=\{1,2,3,4,\cdots\}$，而不能表示为$N=\{3,1,4,2,\cdots\}$．这里1，2，3，4的排列顺序是为了体现省略号所代表那些元素的规律，这种排列顺序是数列所要求的，而不是集合所要求的．

1.2 子集、交集、并集、补集

学习这节，同学们要掌握两部分内容，第一部分就是两集合之间的包含关系与相等关系；第二部分是简单的交、并、补关系．进而能理解这两部分内容是互相关联的．

1．子集概念

（1）韦恩图：



真子集　　　　等集

图1—1

【注意】韦恩图有的书中叫文氏图或欧拉图．

（2）文字：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集．

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集．

对于两个集合A与B，如果A包含于B，同时B也包含于A，则这两个集合相等。

（3）表示方法：

如图1－1中，子集：$A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$；

真子集：$A\subset B$ 或 $B\supset A$；

等集：$A\subseteq B$， $B\subseteq A$。

（4）包含关系的性质：

①对于任何集合 A，都有 $A\subseteq A$；

②对于任何集合 A，都有 $\phi\subseteq A$；

③ $A\subseteq B$，$B\subseteq C\Longrightarrow A\subseteq C$，

$A\subset B$，$B\subset C\Longrightarrow A\subset C$。

【注意】（1）$\in$ 与 $\subseteq$（或 $\subset$）这两种符号的区别：$\in$ 用在元素与集合之间，表示从属关系；$\subseteq$（或 $\subset$）用在集合与集合之间，表示包含（或真包含）关系。（2）不要把数0或集合$\{0\}$与空集 ϕ 混淆。数0不是集合，$\{0\}$是含有一个元素0的集合，而 ϕ是不含任何元素的集合。并且不要把空集错误地写成{空集}或$\{\phi\}$．（3）要注意区别“包含于”、“包含”、“真包含”、“不包含”这些概念的不同涵义与不同表示法。$A\subseteq B$、$A\supseteq B$是互逆的，$A\subseteq B$ 与 $A\not\subseteq B$ 是互否的，而 $A\subseteq B$与 $B\supseteq A$是同义的。至于 $A\subset B$，它等价于“$A\subseteq B$且 $A\neq B$”；换言之，$A\subseteq B$ 包括$A=B$、$A\subset B$两种情况，其中必有一种且只有一种成立。

【研究】（1）集合相等是一个重要概念，中学课本中的一些内容可用它来作出比传统课本更简明的定义。例如，同解方程可定义为：如果两个方程的解集相等，那么这两个方程

叫做同解方程．同样，可用解集相等来定义同解不等式．因此，方程（或不等式）同解原理的证明，实质就是证明两方程（或两不等式）的解集相等．

（2）我们已经知道空集是任何集的子集，那么一个有限集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的子集应有多少个呢？回答是 2^n 个．

证明：∵不取任何元素所成的子集，即空集有 C^0_n 个；

只取一个元素所成的子集有 C^1_n 个；

只取二个元素所成的子集有 C^2_n 个；

……………………………………

取 n 个元素所成的子集有 C^n_n 个．

∴ A 的子集共有 $C^0_n+C^1_n+C^2_n+\cdots+C^n_n=2^n$ 个．

2．交集概念

（1）韦恩图：

（2）文字：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集。

（3）表示方法：如图 1—2 中，交集 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A, 且\ x\in B\}$．

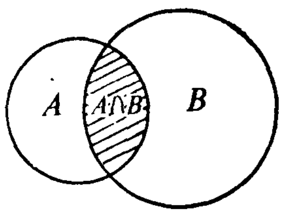


图1—2

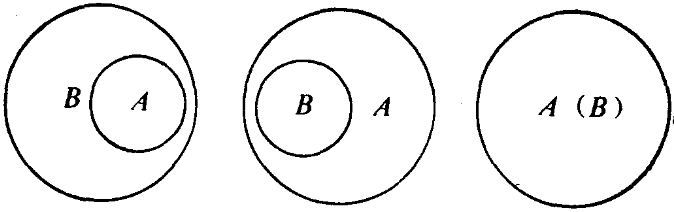
（4）交集的性质：

① $A\cap A=A$；　② $A\cap\phi=\phi$；

③ $A\cap B=B\cap A$；　④ $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

⑤ $A\cap I=A$.

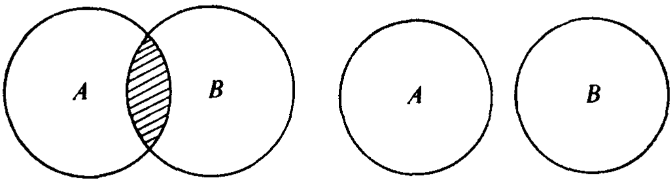
（5）交集的应用：



① 若$A\subset B$，则$A\cap B=A$.

② 若$B\subset A$，则$A\cap B=B$.

③ 若$A=B$，则$A\cap B=A=B$.



④ 若A与B相交（有公共元素，但互不包含），则$\phi\subset A\cap B\subset A$，$\phi\subset A\cap B\subset B$.

⑤ 若A与B分离（无公共元素），则$A\cap B=\phi$.

图1—3

由图1—3可见，无论集合A与B处于何种关系，$A\cap B$都有意义.

【注意】 求A、B的交集是一个二元运算．在A中求出适合B的元素所组成的集合即$A\cap B$．$A\cap B$是唯一存在的，其形式则可以是有限集，无限集，空集或全集．如果有两个以上的集求它们的交集，可依次进行，或用括号给出运算顺序．作题时一定要注意.

3．并集概念

（1）韦恩图：

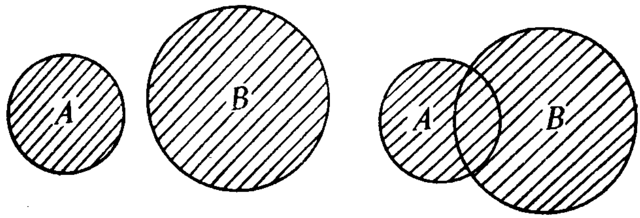


图1—4

（2）文字：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做 A、B的并集.

【注意】“并”与“和”不完全相同.

（3）表示方法：如图1—4中，并集$A\cup B$，即$A\cup B=\{x\mid x\in A，\text{或}\ x\in B\}$.

（4）并集的性质：

① $A\cup A=A$;　　② $A\cup\phi=A$;

③ $A\cup B=B\cup A$;　　④ $A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$.

【引申】由交集和并集的定义可知：A与B都是 $A\cup B$的子集，$A\cap B$ 都是 A、B 的子集，由此可得$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

【注意】（1）我们知道，集合中的元素是没有重复现象的．因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次．（2）要注意定义中的“或”字的意义，用它连接的并列成分之间不一定是互相排斥的．

“$x\in A$ 或 $x\in B$”这一条件，包括下列三种情况：

① $x\in A$，但$x\notin B$；

② $x\in B$，但 $x\notin A$；

③ $x\in A$，且 $x\in B$（很明显，适合第三种情况的元素x 构成的集合就是 $A\cap B$，它不一定是空集）．

4．补集概念

补集是怎样定义的呢？为此我们首先要了解全集概念．全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念，它含有与所研究的问题有关的各个集合的全部元素，因此，全集因所研究的问题而异．例如在考虑自然数的因数分解时，我们把自然数集作为全集；在解不等式时，我们把实数集作为全集．下边我们来研究补集概念．

（1）韦恩图：

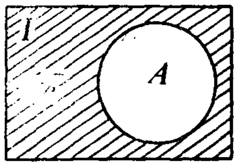


图1—5

（2）文字：已知全集I，集合 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集．

（3）表示方法：如图 1 — 5 中，补集$\overline{A}$，即$\overline{A}=\{x\mid x\in I$，且 $x\notin A\}$．

（4）补集的性质：

① $A\cup\overline{A}=I$；　　② $A\cap\overline{A}=\phi$；

③ $\overline{\overline{A}}=A$；　　④ $\overline{I}=\phi$，$\overline{\phi}=I$；

⑤ $A\cap I=A$，$A\cup I=I$．

【研究】运用集合的基本概念，可把初等数学中的一些概念用集合术语来重新叙述．例如：

（1）在解方程时，可把给定的未知数的取值集合作为全集 I，那么方程在 I 中的解集就是 I 的一个子集。如果一个方程在 I 中的解集是空集 ϕ，就说这个方程在 I 中无解。

（2）设方程组：

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_2(x, y)=0 \end{cases}$$

的解集是 F，方程 $f_1(x, y)=0$ 与 $f_2(x, y)=0$ 的解集分别是 F_1 与 F_2，则 $F=F_1\cap F_2$。

一般地说，如果一个方程组的解集是 F，而组成这个方程组的 n 个方程的解集分别是 F_1，F_2，…，F_n，那么 F 就是 F_1，F_2，…，F_n 的交集（记作 $F_1\cap F_2\cap F_3\cap\cdots\cap F_n$）。

（3）设方程 $f(x)=0$ 的解集是 F，如果

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

且方程 $f_1(x)=0$ 与 $f_2(x)=0$ 的解集分别是 F_1，F_2，那么 $F=F_1\cup F_2$。

（4）如果把线段、射线和直线都看成是由其上的点组成的点集，那么，线段 AB 是射线 AB 的子集，射线 AB 是直线 AB 的子集，线段 AB 是射线 AB 与射线 BA 的交集，直线 AB 是射线 AB 与射线 BA 的并集。

（三）解题指导

这一单元的题目总的来说都是基本概念题，可分为三类：1．集合的表示法题；2．元素与集合、集合与集合间的关系题；3．集合的交、并、补题。

1．集合的表示法题