

模糊集理论及其应用

● 陈水利 李敬功 王向公 编著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统介绍了模糊集理论及其应用的基本知识和研究方法. 全书共分三个部分. 第一部分详细介绍模糊集合的基本理论; 第二部分系统介绍了模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与预测、模糊规划、模糊概率和模糊统计等研究领域的基本原理、研究方法及其应用程序; 第三部分介绍模糊推理的基本理论与算法, 以及模糊控制系统的基本原理.

本书可作为高等院校数学类本科生, 以及经济类、管理类、机械类、计算机科学类、信息科学类专业高年级本科生和研究生的教材, 也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

模糊集理论及其应用/陈水利, 李敬功, 王向公编著. —北京: 科学出版社, 2005

ISBN 7-03-015801-6

I. 模… II. ①陈… ②李… ③王… III. 模糊集理论-教材 IV. O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 069652 号

责任编辑: 陈玉琢 吕 虹 祖翠娥/责任校对: 李奕莹
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

[http // www . sciencep . com](http://www.sciencep.com)

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 9 月 第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2005 年 9 月第一次印刷 印张: 28 1/2

印数: 1—2 500 字数: 549 000

定价: 52.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前言

自从美国著名控制论专家、加利福尼亚大学 L. A. Zadeh 教授于 1965 年建立模糊集理论以来, 在各国学者的共同努力和不断探索下, 模糊集理论及其应用的研究成果已非常丰富. 它不仅发展和扩充了经典数学的研究领域, 使数学学科的研究体系发生了新的重大变革, 而且能有效地解决经典数学难以解决的大系统的复杂性问题, 以及在自然界和日常生活中普遍存在而无法解决的模糊性问题. 从数学方面来讲, 以模糊集理论为基础的模糊数学学科, 如模糊拓扑学、模糊代数学、模糊分析学、模糊测度论、模糊概率论、模糊数理统计、模糊逻辑学已经形成; 而从应用方面来讲, 以模糊集理论为基础的应用学科, 如模糊聚类分析、模糊模式识别、模糊综合评判、模糊决策与模糊预测、模糊规划、模糊控制、模糊信息处理等已在工业、农业、医学、军事、计算机科学、信息科学、管理科学、系统科学、工程技术、社会科学和自然科学的各个领域中发挥着非常重要的作用, 并已获得巨大的经济效益.

本书是在作者多年来为研究生和本科生讲授模糊数学课程的讲稿基础上, 经过修订而成的. 第 1、2 章主要介绍模糊集理论的基本内容; 第 3~7 章分别介绍模糊集理论在聚类分析、模式识别、综合评判、决策与预测、数学规划等应用领域中的基本原理和基本方法; 第 8 章介绍模糊概率和模糊统计的基本知识及其在企业投资问题和网络计划问题中的应用; 第 9 章介绍模糊推理的基本思想和常用的算法, 以及模糊控制系统的基本原理及其应用实例; 而构造隶属函数的各种方法则放在附录 A 中. 本书在选材上侧重于模糊集理论及其应用的基本知识和基本方法; 在叙述方法上, 力求通俗易懂, 以适合数学与应用数学、信息与计算科学、经济、管理、生物工程、医学、计算机科学、自动化和工科各专业的研究生和高年级本科生的阅读与选修. 为了满足读者的应用需要, 我们分别在各章介绍了 7 个应用程序.

读者只要具有高等数学、线性代数和概率论初步的基础知识, 即可阅读本书第 1~8 章的基本内容. 学完本书的全部内容大约需要 80 学时, 但各专业可根据教学时数的要求, 有针对性地选读部分章节. 第 1~6 章是本书中最基本的内容, 建议读者仔细阅读, 大约需要 54 学时即可.

在本书的写作过程中, 始终得到了陕西师范大学王国俊教授、武汉大学欧阳绵教授和裴礼文教授的鼓励和支持, 在此向他们表示衷心的感谢. 另外, 韩立岩

教授、李洪兴教授、张跃教授和徐扬教授等人的研究成果是本书的重要参考文献,借此机会向他们表示诚挚的感谢.集美大学杨中南副教授、朱荣坤副教授、黄朝霞副教授和黄欢博士仔细校对了本书部分内容,福州大学陈国龙博士和漳州师范学院数学系林梦雷副教授仔细地阅读本书,并提出了一些宝贵的建议,福州大学数学与计算机科学学院钮永莉和吕艳萍两位硕士对本书的一些应用程序给出了仔细地修订,对此作者表示深深的谢意.最后感谢国家自然科学基金委员会、福建省科技厅、福建省教育厅和集美大学教务处对本书的出版给予的大力支持.

由于时间仓促和作者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者和同仁们批评指正.

作 者

2005 年 1 月于厦门

目 录

第 1 章 模糊集合及其运算	1
1.1 经典集合与特征函数	1
1.2 模糊集合与隶属函数	2
1.3 模糊集合的运算	4
1.4 模糊集合的分解定理与表现定理	10
1.5 模糊性的度量	19
习题 1	24
第 2 章 模糊映射与模糊数	26
2.1 一元模糊映射及其性质	26
2.2 多元模糊映射及其性质	34
2.3 模糊数及其运算	38
2.4 模糊值函数的积分	49
习题 2	56
第 3 章 模糊关系与模糊聚类分析	59
3.1 模糊关系及其运算	59
3.2 模糊等价关系及其性质	73
3.3 模糊图及其运算	82
3.4 基于模糊等价矩阵的模糊聚类分析	94
3.5 基于目标函数的模糊 ISODATA 聚类分析	113
3.6 基于摄动的模糊聚类分析	125
3.7 求模糊等价矩阵的 C 语言程序	134
3.8 模糊 ISODATA 聚类分析的 C 语言程序	139
习题 3	152
第 4 章 模糊集之间的度量与模糊模式识别	156
4.1 模糊集之间的距离	156
4.2 模糊集之间的贴近度	161
4.3 模糊模式识别的直接方法	170
4.4 模糊模式识别的间接方法	178
习题 4	184

第 5 章 模糊线性变换与模糊综合评判	187
5.1 模糊线性变换	187
5.2 一级模糊综合评判	189
5.3 多级模糊综合评判	196
5.4 因素重要程度模糊集的确定方法	207
5.5 模糊综合评判的 C 语言程序	223
习题 5	232
第 6 章 模糊决策与模糊预测	235
6.1 多目标模糊决策法	235
6.2 层次权重决策分析法	241
6.3 意见集中排序法	252
6.4 空间静态类的模糊预测方法	257
6.5 时间动态类的模糊预测方法	261
6.6 多目标模糊决策法的 C 语言程序	265
习题 6	278
第 7 章 模糊极值与模糊规划	280
7.1 模糊约束下的条件极值	280
7.2 模糊线性规划	289
7.3 多目标模糊规划	297
7.4 多目标线性规划的模糊最优解	299
7.5 单纯形法的 C 语言程序	302
习题 7	310
第 8 章 模糊概率与模糊统计	313
8.1 模糊事件的概率	313
8.2 事件的模糊概率	320
8.3 模糊统计及其应用	325
8.4 网络计划的模糊概率 PERT 方法	337
8.5 模糊统计判决与决策	347
8.6 多元隶属函数 m 分类法的 C 语言程序	357
习题 8	370
第 9 章 模糊推理与模糊控制	373
9.1 模糊命题	373
9.2 模糊推理的 CRI 算法	379
9.3 模糊推理的三 I 算法	391
9.4 由经典推理规则建立模糊推理规则的方法	396

9.5 模糊控制系统	401
9.6 模糊控制系统的应用实例	417
习题9	424
参考文献	426
附录 A 隶属函数的构造方法小结	429
附录 B 符号表	445

第 1 章 模糊集合及其运算

本章重点介绍模糊集合的定义、表示方法及模糊集合间的运算,详细讨论模糊集合与经典集合的互相转化关系(分解定理与表现定理),最后介绍几个刻画模糊集合的模糊性程度的数量指标.

1.1 经典集合与特征函数

集合是现代数学中最基本的概念之一,集合可以表现概念、性质和运算,也可以表现判断和推理,因而集合能够描述各门学科的语言、内容和思想.

所谓集合,是指具有某种特定属性的对象集体.例如,某一所学校的所有学生就是一个集合.集合通常用大写字母 A, B, C 等表示.人们在研究具体问题时,总是对局限于一定范围内的对象进行讨论,所讨论的对象的全体称为论域,常用 U, V, X, Y 等来表示.论域 U 中的每个对象 u 称为 U 的元素.显然,论域 U 是一个集合,而任一个经典集合总是由论域中的一些元素所构成的.

在论域 U 中任意给定一个元素 u 及任意给定一个经典集合 A ,则 u 或者属于 A (记作 $u \in A$),或者不属于 A (记作 $u \notin A$),二者必居且仅居其一.这种关系可用如下二值函数表示:

$$\begin{aligned}\chi_A: U &\longrightarrow \{0, 1\} \\ u &\longmapsto \chi_A(u),\end{aligned}$$

其中

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1, & u \in A; \\ 0, & u \notin A. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

函数 χ_A 称为集合 A 的特征函数,其图形如图 1.1.1 所示,它明确地表示了集合 A ,即对于 $u \in U$,若 $\chi_A(u) = 1$,则 u 是 A 的元素;若 $\chi_A(u) = 0$,则 u 不是 A 的元素.

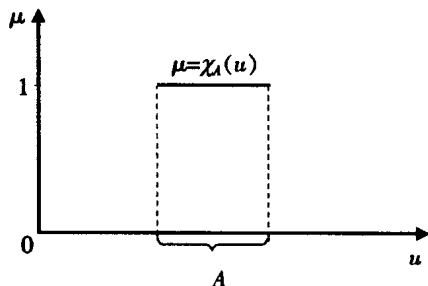


图 1.1.1 特征函数图

经典集合的表示方法常见的有下列两种.

1.1.1 列举法

把集合中的所有元素一一列举出来表示集合的方法,称为列举法.当集合中的元素个数为有限,且可以一一列举出来时,该集合可用列举法来表示.例如,以字母

a, b, c, d 为元素的集合 A 可表示为

$$A = \{a, b, c, d\}.$$

1.1.2 描述法

通过描述集合元素的共同特征来表示集合的方法,称为描述法,也称为定义法.用数学语言表述就是,给定某一性质 P , $P(x)$ 表示“ x 具有性质 P ”,则具有性质 P 的全体元素 x 构成的集合可表示为

$$A = \{x | P(x)\}.$$

例如,设 χ_A 表示集合 A 的特征函数,则

$$A = \{x | \chi_A(x) = 1\}. \quad (1.1.2)$$

1.2 模糊集合与隶属函数

我们知道,概念是科学的细胞,每个概念都有它的内涵和外延.从集合论的观点讲,一个概念的外延就是一个集合.有些概念在特定的场合有明确的外延,例如“人”这个概念的外延就是世界上所有的人组成的集合.而有些概念在某些场合不具有明确的外延,如“年轻人”这个概念,谁都无法给出明确的划分,哪些是年轻人,而其余的都不是,这是因为“年轻”与“不年轻”之间没有明确的边界.又如“通货膨胀”、“市场萧条”、“多云”、“高个子”、“稠油”、“高产油井”、“价格合理”、“教学优质”等概念也都没有明确的外延,这种外延不明确的不确定性,我们称之为模糊性.具有模糊性外延的概念,称为模糊概念.

由于经典集合只能表现具有明确外延的概念,不能表现模糊概念,因此经典集合论在模糊概念面前显得无能为力.于是,要定量表现模糊概念和研究具有模糊性的对象的客观规律性,就必须把经典集合的概念进行推广.为了定量地刻画模糊概念和模糊现象,美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 教授于 1965 年提出了模糊集合这一重要概念,其基本思想是:把经典集合中的隶属关系加以扩充,使元素对“集合”的隶属程度由只能取 0 和 1 这两个值推广到可以取单位区间 $[0, 1]$ 中的任意一数值,从而实现定量地刻画模糊性对象.具体定义如下.

定义 1.2.1 设 U 为论域,则 U 上的一个模糊集合 A 由 U 上的一个实值函数

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow [0, 1] \\ \mu_A: u &\longmapsto \mu_A(u) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

来表示.对于 $u \in U$, 函数值 $\mu_A(u)$ 称为 u 对于 A 的隶属度,而函数 μ_A 称为 A 的隶属函数,其图形如图 1.2.1 所示.

由此可见,模糊集合 A 是一个抽象的概念,其元素是不确定的,我们只能通过隶属函数 μ_A 来认识和掌握 A . $\mu_A(u)$ 的数值的大小反映了论域 U 中的元素 u 对

于模糊集合 A 的隶属程度, $\mu_A(u)$ 的值越接近于 1, 表示 u 隶属于 A 的程度越高; $\mu_A(u)$ 的值越接近于 0, 表示 u 隶属于 A 的程度越低. 特别地, 若 $\mu_A(u) = 1$, 则认为 u 完全属于 A ; 若 $\mu_A(u) = 0$, 则认为 u 完全不属于 A .

论域 U 上的模糊集合的全体记为 $\mathcal{F}(U)$, 称之为模糊幂集.

对于 U 上的模糊集合 $A \in \mathcal{F}(U)$, 当 A 的隶属函数 μ_A 的值域为 $\{0, 1\}$ 时, μ_A 便是一个经典集合的特征函数 χ_A , 此时 A 就是一个经典集合. 因此, 经典集合可看作是特殊的模糊集合. 如果我们记 $\mathcal{P}(U)$ 为论域 U 上的经典集合的全体, 则 $\mathcal{P}(U) \subset \mathcal{F}(U)$.

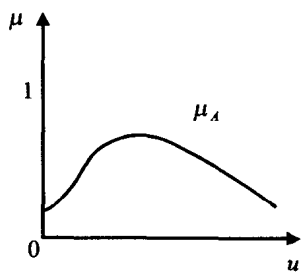


图 1.2.1 隶属函数图

由于模糊集合 A 只能由其隶属函数 μ_A 来表达, 因此, 为方便起见, 我们将用记号 $A(u)$ 来代替 $\mu_A(u)$. 这样, 模糊集合与其隶属函数的记号将不加区分.

模糊集合的表示方法最常见的有下列两种.

1.2.1 Zadeh 表示法

当论域 U 只包含有限个元素, 即 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 时, 则 U 上的模糊集合 A 可表示为

$$A = A(u_1)/u_1 + A(u_2)/u_2 + \dots + A(u_n)/u_n, \quad (1.2.2)$$

式中符号 $A(u_i)/u_i$ 不表示“分数”, 而是表示元素 u_i 隶属于 A 的程度为 $A(u_i)$; 符号“+”也不表示“加号”, 而是一种联系符号.

例 1.2.1 考虑 5 个科研项目, 分别记为 u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 . 取论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. 现对这 5 个科研项目进行成果鉴定, 请有关专家按百分制打分, 规定几项鉴定的技术指标, 考核每个科研项目对“成果优秀”的符合程度. 这里“成果优秀”是一个模糊概念, 用模糊集合 A 表示. 设这些专家打分后, 取其平均值, 再除以 100, 得到的结果为

$$u_1: 87 \text{ 分, 记 } A(u_1) = 87/100 = 0.87;$$

$$u_2: 73 \text{ 分, 记 } A(u_2) = 73/100 = 0.73;$$

$$u_3: 94 \text{ 分, 记 } A(u_3) = 94/100 = 0.94;$$

$$u_4: 85 \text{ 分, 记 } A(u_4) = 85/100 = 0.85;$$

$$u_5: 79 \text{ 分, 记 } A(u_5) = 79/100 = 0.79.$$

这样就确定了论域 U 上“成果优秀”这个模糊集合 A , 用 Zadeh 表示方法就是

$$A = 0.87/u_1 + 0.73/u_2 + 0.94/u_3 + 0.85/u_4 + 0.79/u_5.$$

当论域 U 为无限集时, U 上的模糊集合 A 可表示为

$$A = \int_U A(u)/u, \quad (1.2.3)$$

式中符号“ $\int$ ”不是普通的积分,也不是求和记号,而是表示各个元素与隶属度对应关系的一个总括.

例 1.2.2 以年龄作论域,取 $U = [0, 200]$, Zadeh 给出“年轻”的模糊集合 Y , 其隶属函数为

$$Y(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 25, \\ \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}, & 25 < u \leq 200. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

用 Zadeh 表示方法就是

$$Y = \int_{[0,25]} 1/u + \int_{[25,200]} \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}/u. \quad (1.2.5)$$

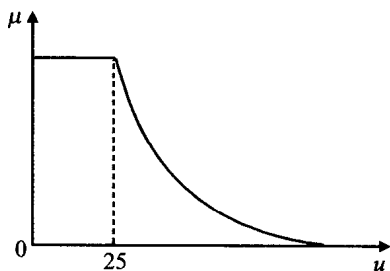


图 1.2.2 “年轻”集的曲线

“年轻” Y 的曲线如图 1.2.2 所示. 由此可见, 年龄对“年轻”的隶属度呈现出连续的变化, Y 的外延是不分明的、模糊的, 这样描述更符合人的意识。

1.2.2 向量表示法

当论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 时, U 上的模糊集合 A 也可用如下向量来表示:

$$A = (A(u_1), A(u_2), \dots, A(u_n)). \quad (1.2.6)$$

例如, 例 1.2.1 中的模糊集合“成果优秀” A 也可表示为

$$A = (0.87, 0.73, 0.94, 0.85, 0.79).$$

由于 $A(u_i) \in [0, 1], i=1, 2, \dots, n$, 即(1.2.6)式确定的向量的每个分量的值都在 0 与 1 之间, 我们把这种特殊的向量称为模糊向量。

1.3 模糊集合的运算

1.3.1 经典集合的运算及其性质

定义 1.3.1 设 A, B 为论域 U 上的两个经典集合.

(1) 如果属于 A 的元素都属于 B , 则称集合 B 包含集合 A , 或称 A 为 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

(2) 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

(3) 由 A 与 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 这时

$$A \cup B = \{u | u \in A \text{ 或 } u \in B\}.$$

(4) 由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 这时

$$A \cap B = \{u | u \in A \text{ 且 } u \in B\}.$$

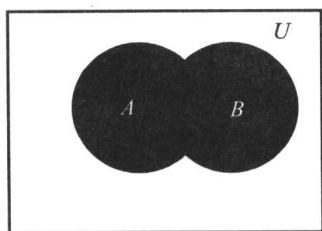
(5) 论域 U 中不属于集合 A 的所有元素构成的集合称为 A 的补集, 或余集, 记作 A' , 这时

$$A' = \{u | u \notin A, \text{ 但 } u \in U\}.$$

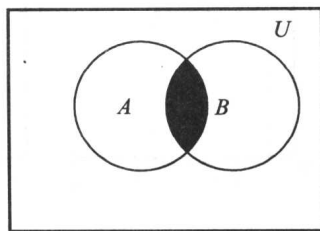
(6) 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$, 这时

$$A - B = \{u | u \in A, u \notin B\}.$$

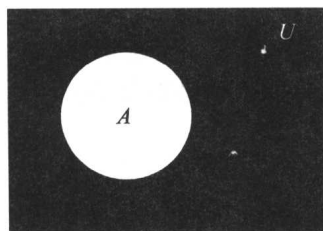
集合的并、交、补和差运算常用如下 Venn 图来直观表示, 图中阴影部分表示集合运算后的并集、交集、补集和差集, 如图 1.3.1 所示.



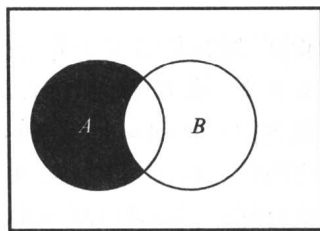
(a) 并集 $A \cup B$



(b) 交集 $A \cap B$



(c) 补集 A'



(d) 差集 $A - B$

图 1.3.1 经典集合的运算图

由于经典集合与其特征函数可互相转化, 于是集合的包含、并、交、补运算可转化为相应的特征函数的运算, 其运算性质如下.

定理 1.3.1 设 U 为论域, $u \in U$, A 和 B 是 U 上的两个经典集合, 则

$$(1) A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(u) \leq \chi_B(u), \quad (1.3.1)$$

即 A 包含于 B 等价于 A 在每一个元素 u 处的特征值均小于或等于 B 在 u 处的特征值;

$$(2) \chi_{A \cup B}(u) = \max\{\chi_A(u), \chi_B(u)\}, \quad (1.3.2)$$

即 $A \cup B$ 在每一个元素 u 处的特征值等于 A, B 分别在 u 处的特征值取最大者, 如图 1.3.2(a) 所示;

$$(3) \chi_{A \cap B}(u) = \min\{\chi_A(u), \chi_B(u)\}, \quad (1.3.3)$$

即 $A \cap B$ 在每一个元素 u 处的特征值等于 A, B 分别在 u 处的特征值取最小者, 如图 1.3.2(b) 所示;

$$(4) \chi_{A'}(u) = 1 - \chi_A(u), \quad (1.3.4)$$

即 A' 在每一个元素 u 处的特征值等于 1 减去 A 在 u 处的特征值, 如图 1.3.2(c) 所示.

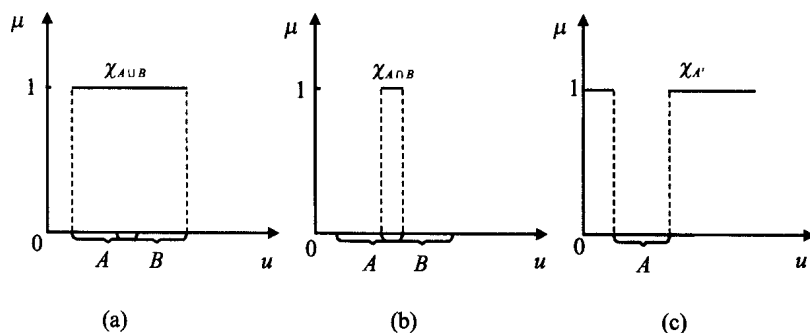


图 1.3.2 特征函数的运算图

不难验证, 经典集合关于并、交、补这三种运算具有如下基本性质.

定理 1.3.2 设 U 为论域, A, B, C 为 U 上的三个经典集合, 则

- (1) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$;
- (2) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (3) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$
- (4) 吸收律: $(A \cap B) \cup B = B, (A \cup B) \cap B = B;$
- (5) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
- (6) 复原律: $(A')' = A;$
- (7) 两极律: $A \cup U = U, A \cap U = A,$
 $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$

其中 $\emptyset$ 表示不包含任何元素的集合, 称为空集;

(8) De Morgan 对偶律:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B';$$

(9) 排中律(互补律): $A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset$.

在数学中,通常把满足定理 1.3.2 中这九条运算规律的代数系统称为布尔代数(Boolean algebra). 因此, $(\mathcal{P}(U), \cup, \cap, ')$ 成为布尔代数. 计算机的运算系统就是建立在布尔代数系统基础上的.

1.3.2 模糊集合的格运算及其性质

由于经典集合是模糊集合的特例,即经典集合的特征函数是一种特殊的隶属函数,于是 Zadeh 由经典集合的特征函数的运算性质出发,引入模糊集合的包含与相等关系以及并、交、补运算如下.

定义 1.3.2 设 U 为论域, A 和 B 是 U 上的两个模糊集合.

(1) 如果 $\forall u \in U, A(u) \leq B(u)$, 则称 A 包含于 B , 或称 B 包含 A , 记作 $A \subseteq B$, 即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A(u) \leq B(u), \quad \forall u \in U, \quad (1.3.5)$$

这时也称 A 为 B 的子集, 其隶属函数如图 1.3.3(a) 所示.

(2) 如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$, 即

$$A = B \Leftrightarrow A(u) = B(u), \quad \forall u \in U, \quad (1.3.6)$$

(3) A 与 B 的并记作 $A \cup B$, 其隶属函数为

$$(A \cup B)(u) = A(u) \vee B(u), \quad (1.3.7)$$

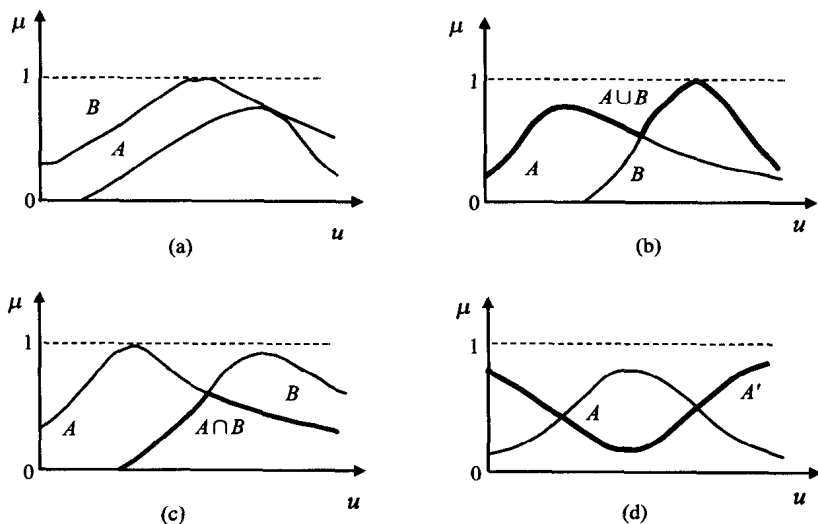


图 1.3.3 隶属函数的运算图

其中“ $\vee$ ”表示取上确界,如图 1.3.3(b)所示.

(4) A 与 B 的交记作 $A \cap B$,其隶属函数为

$$(A \cap B)(u) = A(u) \wedge B(u), \quad (1.3.8)$$

其中“ $\wedge$ ”表示取下确界,如图 1.3.3(c)所示.

(5) A 的补模糊集记作 A' ,其隶属函数为

$$A'(u) = 1 - A(u), \quad (1.3.9)$$

如图 1.3.3(d)所示.

例 1.3.1 设某油田有 5 个不同的采油厂,采油厂构成的论域为 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.

$$A = (0.9, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

表示“产量高”,

$$B = (0.7, 0.8, 0.3, 0.7, 0.85)$$

表示“油质好”. 则 $A, B \in \mathcal{F}(U)$, 且

(1) “产量高且油质好”为

$$\begin{aligned} A \cap B &= (0.9 \wedge 0.7, 0.5 \wedge 0.8, 0.6 \wedge 0.3, 0.8 \wedge 0.7, 0.8 \wedge 0.85) \\ &= (0.7, 0.5, 0.3, 0.7, 0.8); \end{aligned}$$

(2) “产量高或油质好”为

$$\begin{aligned} A \cup B &= (0.9 \vee 0.7, 0.5 \vee 0.8, 0.6 \vee 0.3, 0.8 \vee 0.7, 0.8 \vee 0.85) \\ &= (0.9, 0.8, 0.6, 0.8, 0.85); \end{aligned}$$

(3) “产量不高”为

$$\begin{aligned} A' &= (1-0.9, 1-0.5, 1-0.6, 1-0.8, 1-0.8) \\ &= (0.1, 0.5, 0.4, 0.2, 0.2). \end{aligned}$$

注 1.3.1 两个模糊集合的并、交运算可推广到一般情形,即设 T 为任意给定的指标集, $\forall t \in T, A_t$ 是 U 上的模糊集合, 则

(1) $\{A_t\}_{t \in T}$ 的并记作 $\bigcup_{t \in T} A_t$, 其隶属函数为

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)(u) = \bigvee_{t \in T} A_t(u); \quad (1.3.10)$$

(2) $\{A_t\}_{t \in T}$ 的交记作 $\bigcap_{t \in T} A_t$, 其隶属函数为

$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)(u) = \bigwedge_{t \in T} A_t(u). \quad (1.3.11)$$

类似于定理 1.3.2, 模糊集合间关于并、交、补这三种运算满足定理 1.3.2 中的前 8 条运算规律, 即有如下定理.

定理 1.3.3 在 $(\mathcal{F}(U), \cup, \cap, ')$ 中, 幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复原律、两极律和 De Morgan 对偶律均成立, 但排中律不成立.

证明 我们仅证 De Morgan 对偶律, 其余的留给读者作为练习.

设 $A, B \in \mathcal{F}(U)$, 则 $\forall u \in U$,

$$\begin{aligned}(A \cap B)'(u) &= 1 - (A \cap B)(u) \\ &= 1 - [A(u) \wedge B(u)] \\ &= [1 - A(u)] \vee [1 - B(u)]. \\ &= A'(u) \vee B'(u) \\ &= (A' \cup B')(u),\end{aligned}$$

从而得 $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

第三个等式成立, 是因为若 $A(u) \leq B(u)$, 则

$$1 - [A(u) \wedge B(u)] = 1 - A(u),$$

且 $1 - A(u) \geq 1 - B(u)$, 于是,

$$[1 - A(u)] \vee [1 - B(u)] = 1 - A(u).$$

根据复原律及已证明的等式, 我们有

$$(A' \cap B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B,$$

即 $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

最后我们举一个反例来说明排中律不成立.

取 $U = \{u, v\}$, $A = (0.6, 0.4)$, 则 $A' = (0.4, 0.6)$, 从而

$$A \cup A' = (0.6, 0.6) \neq U,$$

$$A \cap A' = (0.4, 0.4) \neq \emptyset.$$

通常把满足定理 1.3.2 中前 8 条运算规律的代数系统称为软代数 (soft algebra). 根据定理 1.3.3, $(\mathcal{F}(U), \cup, \cap, ')$ 构成一个软代数, 或称之为模糊格 (fuzzy lattice).

上述介绍的模糊集的并、交运算是由 Zadeh 提出的, 称为模糊格运算, 它是经典集合格运算的直接推广. 然而, 推广的方式不是惟一的.

下面介绍模糊集合的另外几种常用的运算, 这些运算也都是经典集合并、交运算的推广.

1.3.3 模糊集合的其他运算

(1) 概率和 $A \overset{\wedge}{+} B$ 与乘积 $A \cdot B$, 其隶属函数分别为

$$(A \overset{\wedge}{+} B)(u) = A(u) + B(u) - A(u)B(u), \quad (1.3.12)$$

$$(A \cdot B)(u) = A(u) \cdot B(u). \quad (1.3.13)$$

(2) 有界和 $A \oplus B$ 与有界积 $A \otimes B$, 其隶属函数分别为

$$(A \oplus B)(u) = \min\{A(u) + B(u), 1\}, \quad (1.3.14)$$

$$(A \otimes B)(u) = \max\{A(u) + B(u) - 1, 0\}. \quad (1.3.15)$$

(3) Einstein 和 $A \overset{+}{\varepsilon} B$ 与 Einstein 积 $A \overset{\cdot}{\varepsilon} B$, 其隶属函数分别为

$$(A \overset{+}{\varepsilon} B)(u) = \frac{A(u) + B(u)}{1 + A(u) \cdot B(u)}, \quad (1.3.16)$$

$$(A \overset{\cdot}{\varepsilon} B)(u) = \frac{A(u) \cdot B(u)}{1 + [1 - A(u)][1 - B(u)]}. \quad (1.3.17)$$

以上介绍的四对模糊集合的运算: $(\cup, \cap)$ 、 $(\overset{\wedge}{+}, \cdot)$ 、 $(\oplus, \otimes)$ 、 $(\overset{+}{\varepsilon}, \overset{\cdot}{\varepsilon})$ 各自适合于不同的描述对象, 应用时必须根据实际问题加以选择. 根据具体问题的要求, 也可以选取下列几对运算: $(\cup, \cdot)$ 、 $(\oplus, \cdot)$ 、 $(\overset{\wedge}{+}, \cap)$ 、 $(\oplus, \cap)$.

1.4 模糊集合的分解定理与表现定理

从模糊集合的定义我们已经看到, 模糊集合所表示概念的外延是不明确的, 即模糊集合所含的元素是模糊的, 它只能由其隶属函数来表示. 然而, 在研究和处理实际问题时我们总希望对模糊概念有个明确的认识与判定, 即给定一个标准之后, 希望能知道某个元素, 对模糊集合的明确归属问题. 为此我们需要知道模糊集合与经典集合之间的相互转化关系. 这就是本节将要介绍的分解定理与表现定理.

1.4.1 模糊集合的截集

截集概念在模糊集合与经典集合的互相转化中起着重要的桥梁作用, 在解决实际问题中也经常用到. 为了引入截集的概念, 我们先考察一个实例.

例 1.4.1 考虑某油田对所属的 6 个单位进行安全生产情况年度考核, 这 6 个单位分别记为 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, 设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$. 现对每个单位按百分制评分, 再将分数除以 100 折合成隶属度, 设它们的成绩为

$$u_1: 94 \text{ 分}, \quad u_2: 96 \text{ 分}, \quad u_3: 83 \text{ 分},$$

$$u_4: 100 \text{ 分}, \quad u_5: 85 \text{ 分}, \quad u_6: 78 \text{ 分},$$

则得论域 U 上的“成绩”这一模糊集 A 为

$$A = (0.94, 0.96, 0.83, 1, 0.85, 0.78).$$

现在要了解这 6 个单位中哪些是“安全生产成绩优秀”(90 分以上), 哪些是“安全生产成绩良好”(80 分以上), 哪些是“安全生产成绩合格”(60 分以上). 考核方法如下:

当 $A(u) \geq 0.9$ 时, u 为“安全生产成绩优秀”的单位, 用 $A_{0.9}$ 来表示这些单位所构成的集合, 则

$$A_{0.9} = \{u | A(u) \geq 0.9\} = \{u_1, u_2, u_4\},$$

这是一个经典集合.

类似地, 用 $A_{0.8}$ 和 $A_{0.6}$ 分别表示“安全生产成绩良好”和“安全生产成绩合格”