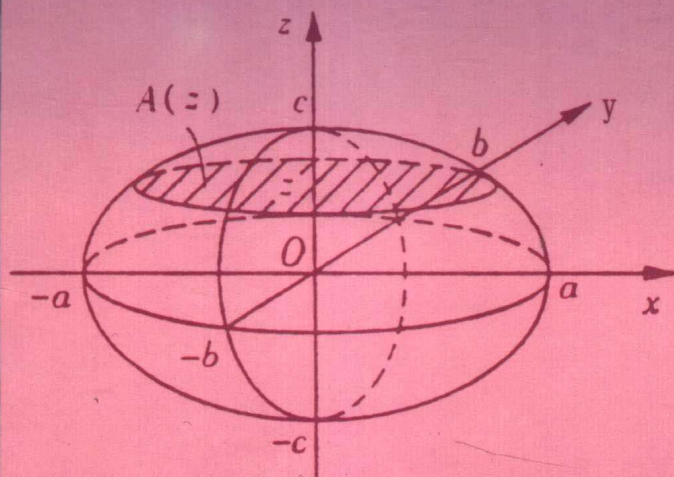


大学数学学习指导丛书

微积分

学习指导与例题、习题解析

欧贵兵 黄光谷 袁子厚 主编



Weijifen xuexi zhidao yu liti, xiti jiexi

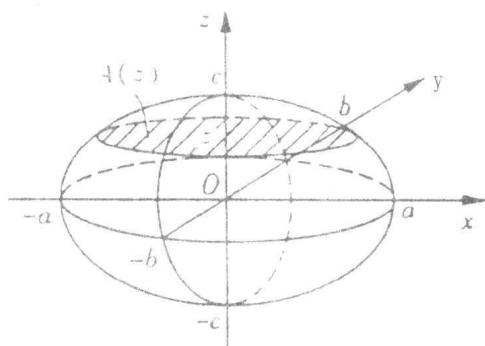
中山大学出版社

大学数学学习指导丛书

微积分

学习指导与例题、习题解析

欧贵兵 黄光谷 袁子厚 主编



Weijifen xuexizhidao yu liti xiti jiexi

中山大学出版社

· 广 州 ·

版权所有 翻印必究

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与例题、习题解析/欧贵兵,黄光谷,袁子厚主编. —广州:中山大学出版社,
2004. 9

(大学数学学习指导丛书)

ISBN 7-306-02365-9

I. 微… II. ①欧… ②黄… ③袁… III. 微积分—高等学校:技术学校—教学参考资料 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089981 号

选题策划:曾纪川

责任编辑:张礼凤 李美珍

封面设计:朱霄华

责任校对:蔡晓英

责任技编:黄少伟

出版发行:中山大学出版社

编辑部电话(020)84111996,84113349

发行部电话(020)84111998,84111160

地 址:广州市新港西路 135 号

邮 编:510275 传真:(020)84036565

印 刷 者:江门市新教彩印有限公司

经 销 者:广东新华发行集团

规 格:787mm×1092mm 1/16 22.75 印张 551 千字

版次印次:2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

定 价:36.50 元

本书如有印刷质量问题影响阅读,请与承印厂联系

内 容 简 介

本书是与《(高职高专)微积分》教材配套学习的辅导书,章、节目录与主教材同步一致,各节有内容介绍、学习指导、辅导答疑、例题增补、习题解析等栏目,各章末编写了复习(习作)课教材,含内容小结、释疑解难、题型归类、复习题及答案与提示等栏目. 书末附有“专升本”试题及解答,便于读者自我测试.

本书书写通俗易懂,紧扣教材,例题较多,便于自学. 可作为工理科、农林类高职高专、“专升本”及经济类本科生的学习辅导书.

前 言

本书是与《(高职高专)微积分》教材配套的自学辅导书,为了适合高职高专和经济类学生自学,本书尽可能地解答了学习微积分(或称高等数学)课中产生的疑难问题,说理详尽;举例较多,可作示范。

各节的内容介绍栏,简要地介绍了各节的主要内容,便于读者提纲挈领地熟悉相关知识,为阅读后几部分作知识准备。

学习指导栏包括了三个部分:一是教学要求,录自《教学基本要求》和“考研大纲”,使读者明确各节所学内容应掌握的层次和分寸,指导自学;二是重点、难点与关键,便于读者学习时突出重点、解决疑难、抓住关键,做到心中有数;三是学习注意,简明扼要地指出了学习中应注意的几个问题。这三部分都是指导读者自学的,是粗线条的,读者应仔细体会之。

辅导答疑栏提出并解答了该节容易产生的疑惑问题或易犯的错误,帮助读者总结正反两方面的经验或教训,在今后的学习中力求不犯或少犯同类错误,少走弯路。

例题增补栏补充了许多例题,使读者见多识广。俗话说,“登高望远”,“登了高山,才知平地”,只有登得高一些,才能看得远一些;才觉得做题如履平地。为了增加可读性,挑选的这些例题,有些是本科书上的题目,也有少量较简单的“考研”题或竞赛题。这是一些有代表性、很好的例题。读者不要畏惧,好在这些题都作了详尽的解答,运用所学知识,慢慢读来,加上思索和推敲,是可以读懂的,还可培养自己的阅读思考和解决问题的素质和能力。有主教材垫底,此辅导书适当拔高拓广,可以居高临下,触类旁通,势如破竹,就不怕微积分了。

习题解析栏选解了主教材中的大部分习题。读者应先思考和做这些习题,遇有困难,再去查看和参考这些题解。

为了书写本书方便和节省篇幅,对教材中一些比较容易和内容相近的节进行了适当的合并。因为是辅导书,为了突出主题,有些综合题可能用到稍后的知识,即便是初学者,查阅一下相关内容,是不难读懂的。

各章末安排了复习(习作)课内容,含内容小结、释疑解难、题型归类、复习题(含A、B两组题及答案与提示)等栏目,便于读者学完一章后,及时地总结和梳理,系统地掌握全章知识。

以上设计,反映了作者多年的教学和写作经验。

参加本书编写的人员有:欧贵兵、黄光谷、袁子厚、陈婕。

由于我们水平有限,加上时间很紧,书中会有缺点和错误,恳请读者批评指正,以便再版时修改。

编写此书,得到中山大学出版社、广州筠成书业有限公司和武汉科技学院数理系的指导和大力支持,特此表示衷心的感谢!

编 者

2004年8月

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)
第一节 函数	(1)
一、内容介绍	(1)
二、学习指导	(2)
三、辅导答疑	(3)
四、例题增补	(5)
五、习题解析	(7)
第二节 数列的极限	(11)
一、内容介绍	(11)
二、学习指导	(12)
三、辅导答疑	(12)
四、例题增补	(14)
五、习题解析	(15)
第三节 函数的极限	(16)
一、内容介绍	(16)
二、学习指导	(17)
三、辅导答疑	(18)
四、例题增补	(18)
五、习题解析	(20)
第四节 极限的运算法则和存在准则 两个重要极限	(21)
一、内容介绍	(21)
二、学习指导	(21)
三、辅导答疑	(22)
四、例题增补	(25)
五、习题解析	(27)
第五节 无穷小与无穷大	(29)
一、内容介绍	(29)
二、学习指导	(29)
三、辅导答疑	(29)
四、例题增补	(30)
五、习题解析	(32)
第六节 函数的连续性	(34)
一、内容介绍	(34)
二、学习指导	(35)
三、辅导答疑	(35)
四、例题增补	(37)
五、习题解析	(40)

复习一 求极限的方法	(43)
一、内容小结	(43)
二、释疑解难	(44)
三、题型归类	(45)
四、复习题一	(47)
第二章 一元函数微分学及其应用	(50)
第一节 导数的概念	(50)
一、内容介绍	(50)
二、学习指导	(51)
三、辅导答疑	(51)
四、例题增补	(53)
五、习题解析	(53)
第二节 导数运算法则	(55)
一、内容介绍	(55)
二、学习指导	(55)
三、辅导答疑	(56)
四、例题增补	(57)
五、习题解析	(58)
第三节 隐函数与参数方程确定的函数的导数	(60)
一、内容介绍	(60)
二、学习指导	(60)
三、辅导答疑	(61)
四、例题增补	(62)
五、习题解析	(63)
第四节 高阶导数	(65)
一、内容介绍	(65)
二、学习指导	(65)
三、辅导答疑	(66)
四、例题增补	(67)
五、习题解析	(68)
第五节 函数的微分及其应用	(69)
一、内容介绍	(69)
二、学习指导	(69)
三、辅导答疑	(70)
四、例题增补	(71)
五、习题解析	(72)
第六节 拉格朗日中值定理	(73)
一、内容介绍	(73)
二、学习指导	(74)

三、辅导答疑	(74)
四、例题增补	(76)
五、习题解析	(78)
第七节 洛必达法则	(79)
一、内容介绍	(79)
二、学习指导	(79)
三、辅导答疑	(80)
四、例题增补	(81)
五、习题解析	(83)
第八节 函数的单调性、极值及其应用	(85)
一、内容介绍	(85)
二、学习指导	(85)
三、辅导答疑	(85)
四、例题增补	(86)
五、习题解析	(89)
第九节 函数图形的凸凹性、拐点及函数图形的描绘	(91)
一、内容介绍	(91)
二、学习指导	(92)
三、辅导答疑	(92)
四、例题增补	(93)
五、习题解析	(94)
* 第十节 导数在经济分析中的应用	(96)
一、内容介绍	(96)
二、学习指导	(97)
三、辅导答疑	(97)
四、例题增补	(98)
五、习题解析	(99)
复习二 一元函数微分学及其应用	(101)
一、内容小结	(101)
二、释疑解难	(101)
三、题型归类	(103)
四、复习题二	(112)
第三章 一元函数积分学及其应用	(115)
第一节 原函数与不定积分的概念和性质	(115)
一、内容介绍	(115)
二、学习指导	(115)
三、辅导答疑	(115)
四、例题增补	(117)
五、习题解析	(118)

第二、三节 换元积分法	(119)
一、内容介绍	(119)
二、学习指导	(119)
三、辅导答疑	(120)
四、例题增补	(122)
五、习题解析	(126)
第四节 分部积分法	(128)
一、内容介绍	(128)
二、学习指导	(128)
三、辅导答疑	(129)
四、例题增补	(130)
五、习题解析	(134)
* 第五节 有理函数的积分 积分表的使用	(135)
一、内容介绍	(135)
二、学习指导	(135)
三、辅导答疑	(135)
四、例题增补	(137)
五、习题解析	(140)
第六、七节 定积分的概念、性质与基本公式	(141)
一、内容介绍	(141)
二、学习指导	(142)
三、辅导答疑	(143)
四、例题增补	(145)
五、习题解析	(152)
第八节 定积分的换元法与分部积分法	(153)
一、内容介绍	(153)
二、学习指导	(154)
三、辅导答疑	(154)
四、例题增补	(155)
五、习题解析	(160)
第九节 反常积分	(161)
一、内容介绍	(161)
二、学习指导	(162)
三、辅导答疑	(162)
四、例题增补	(163)
五、习题解析	(166)
第十、十一节 定积分的应用	(167)
一、内容介绍	(167)
二、学习指导	(168)
三、辅导答疑	(169)

四、例题增补	(170)
五、习题解析	(175)
复习三 一元函数积分学及其应用	(177)
I. 计算不定积分的方法	(177)
一、内容小结	(177)
二、释疑解难	(177)
三、题型归类	(179)
四、复习题三(I)	(181)
II. 定积分及其应用	(184)
一、内容小结	(184)
二、释疑解难	(184)
三、题型归类	(186)
四、复习题三(II)	(192)
第四章 常微分方程	(194)
第一、二节 微分方程的基本概念 一阶微分方程及其应用	(194)
一、内容介绍	(194)
二、学习指导	(194)
三、辅导答疑	(195)
四、例题增补	(196)
五、习题解析	(200)
第三、四节 可降阶的二阶微分方程 二阶常系数线性微分方程	(204)
一、内容介绍	(204)
二、学习指导	(204)
三、辅导答疑	(205)
四、例题增补	(206)
五、习题解析	(208)
* 第五节 差分方程	(212)
一、内容介绍	(212)
二、学习指导	(212)
三、辅导答疑	(212)
四、例题增补	(212)
五、习题解析	(214)
复习四 常微分方程的解法和应用	(215)
一、内容小结	(215)
二、释疑解难	(216)
三、题型归类	(217)
四、复习题四	(223)

第五章 无穷级数	(227)
第一、二节 数项级数及其审敛法	(227)
一、内容介绍	(227)
二、学习指导	(228)
三、辅导答疑	(229)
四、例题增补	(230)
五、习题解析	(234)
第三、四节 幂级数及其应用	(235)
一、内容介绍	(235)
二、学习指导	(237)
三、辅导答疑	(238)
四、例题增补	(239)
五、习题解析	(245)
复习五 无穷级数	(247)
一、内容小结	(247)
二、释疑解难	(248)
三、题型归类	(249)
四、复习题五	(258)
第六章 向量代数与空间解析几何	(260)
第一节 向量代数	(260)
一、内容介绍	(260)
二、学习指导	(261)
三、辅导答疑	(262)
四、例题增补	(263)
五、习题解析	(265)
第二、三节 平面与空间直线及其方程	(268)
一、内容介绍	(268)
二、学习指导	(269)
三、辅导答疑	(270)
四、例题增补	(271)
五、习题解析	(277)
第四节 曲面与空间曲线及其方程	(280)
一、内容介绍	(280)
二、学习指导	(280)
三、辅导答疑	(282)
四、例题增补	(283)
五、习题解析	(287)
复习六 向量代数与空间解析几何	(289)
一、内容小结	(289)

二、释疑解难	(290)
三、题型归类	(291)
四、复习题六	(294)
第七章 多元函数微积分	(297)
第一节 多元函数及其极限与连续	(297)
一、内容介绍	(297)
二、学习指导	(297)
三、辅导答疑	(298)
四、例题增补	(300)
五、习题解析	(301)
第二节 偏导数与全微分	(302)
一、内容介绍	(302)
二、学习指导	(303)
三、辅导答疑	(304)
四、例题增补	(306)
五、习题解析	(308)
第三节 多元复合函数与隐函数求导法	(309)
一、内容介绍	(309)
二、学习指导	(310)
三、辅导答疑	(310)
四、例题增补	(312)
五、习题解析	(315)
第四节 多元函数的极值及其应用	(317)
一、内容介绍	(317)
二、学习指导	(318)
三、辅导答疑	(318)
四、例题增补	(319)
五、习题解析	(323)
* 第五节 二重积分	(327)
一、内容介绍	(327)
二、学习指导	(327)
三、辅导答疑	(328)
四、例题增补	(329)
五、习题解析	(334)
复习七 多元函数微积分	(336)
一、内容小结	(336)
二、释疑解难	(337)
三、题型归类	(339)
四、复习题七	(342)

附录 I	二阶、三阶行列式简介	(344)
附录 I	武汉科技学院 2004 年“专升本”考试《微积分》试卷及参考答案	(346)
参考书目		(349)

第一章 函数 极限 连续

第一、二节 函 数

一、内容介绍

读者在中等学校已较多地学习了函数及其图像等知识. 第一、二节是扼要地复习有关函数的知识并作适当补充, 为学习后续内容打基础.

1. 函数概念

定义 1(用数集上的自变量与因变量之间的对应关系来定义, 略, 详见教材).

定义 1'(用点集与对应来定义) 设 D 是 x 轴(即一维空间 $\mathbf{R}$)上的一个点集. 如果对于每个点 P (即 x) $\in D$, 变量 y 按照一定的变化规则 f , 总有一个确定的值与它对应, 则称 y 是点 P (或变量 x)的(一元)函数, 记为

$$y=f(P), \quad \text{或} \quad x \xrightarrow{f} y, \quad y=f(x).$$

利用点函数 $f(P)$ 的概念, 很容易推广到二维、三维乃至 n 维空间中, 定义多元函数.

2. 函数的初等性质

指有界性、单调性、奇偶性、周期性等性质, 中学已学, 此略(详见教材).

3. 复合函数

简言之, 即函数的函数, 记为 $y=f[\varphi(x)]$. 还可推广至多次复合的情形. 今后在学习微积分时, 会经常遇到复合函数的微分与积分, 读者要分清复合的层次, 熟练掌握复合函数的分解与合成.

4. 反函数

定义 2(略, 见教材). 记为 $y=f^{-1}(x)$, 而称 $y=f(x)$ 为直接函数, 把“原函数”这一名词留给了第三章中不定积分(之一). 应注意: 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一坐标系里是重合的; 但 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在同一坐标系里关于直线 $y=x$ 成轴对称(一般而言是不一样的).

5. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数是读者在中学里已学的六类函数的统称. 这六类函数是常函数, 幂函数, 指数与对数函数, 三角函数与反三角函数.

初等函数也是一个统称, 它是指由上述基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤构成、并且可用一个数学式子表示的函数. 这些函数大多数已在初等数学中学过, 故名曰初等函数.

6. 双曲函数与反双曲函数

从双曲函数与反双曲函数的定义式(见教材)可以看出, 它们也是初等函数. 它们用于工程上, 以后会看到, 它们还有许多好的分析性质.

三角函数又叫做**圆函数**,是因为它们可以用单位圆中的相应线段(正弦线、余弦线等)表示的缘故.类似地,双曲函数也可用等轴双曲线中的相应线段表示,故名曰**双曲函数**.

7.* 常用经济类函数

经济学中经常与需求、供给、成本、收益、利润这些概念打交道.从相应的这些函数的定义式看(见教材),它们也是初等函数.读者结合生活常识,容易理解这些函数式.

8. 几个常用的分段函数

绝对值函数 $y=|x|$,符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$,取整函数 $y=[x]$,狄利克莱函数 $y=D(x)$ 等的表达式不能用一个解析式(数学式子)表达,因而常把它们划归于非初等函数的范畴.后面学习中常用到它们和其他分段函数,它们符合函数的定义,也是函数,读者应尽快地理解和熟悉它们.

9. 几个常用绝对值不等式

教材中列出的常用绝对值不等式和两个重要不等式($|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$),在今后推理论证中经常用到,读者应熟悉和记住它们.在初等数学中,用到等式和恒等变形较多;而在高等数学里,用不等式变形和推证较多,这也是一个难点所在,读者应尽快地习惯之.

10. 其他常用函数

有时,函数关系式 $y=f(x)$ 由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定,我们称之为**隐函数**.

依赖于参数的函数 $y=f(x,n)$,需指出 x 或 n 谁是自变量,谁是参数(视参变量如同常数 a, b, c 等),这样它们是一元函数.

整标函数 $y=f(n)$,即数列 $y=x_n$,这里自变量 n 取正整数($n \in \mathbf{N}^*$)或非负整数($n \in \mathbf{N}$),由于 n 是数列 $\{x_n\}$ 的下标,故名曰**整标函数**.

幂指函数 $y=[u(x)]^{v(x)}$ 既像幂函数 $y=u^a$ 又像指数函数 $y=a^{v(x)}$,故名曰**幂指函数**.但这里指数 $v(x)$ 与底数 $u(x)$ 不是常数,而是函数,所以它既不是幂函数,也不是指数函数,而专门称为**幂指函数**.幂指函数复杂一些,常化为复合指数函数研究之:

$$y=u^v=e^{v \ln u} \triangleq \exp(v \ln u) \quad (u>0).$$

这里符号 $\triangle$ 读作“记为”(或“定义为”), $\exp \varphi \triangleq e^\varphi$.

很明显,上述幂指函数和含参量的函数仍为初等函数.以后要学习的用积分、级数或微分方程的解表达的函数等,则属于所谓高等(超越)函数的范畴.

二、学习指导

1. 教学要求^①

- (1)理解函数的概念,掌握函数的表示方法.
- (2)了解函数的奇偶性、单调性、有界性和周期性.
- (3)理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
- (4)掌握基本初等函数的性质及其图形.
- (5)会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 重点、难点与关键

重点:正确理解函数与复合函数的概念,掌握基本初等函数的性质和图像,求函数的定义域和建立函数关系式.

难点:反函数概念,求实际问题中的函数关系式,复合函数的分解式.

^① 要区分下列要求中“理解”、“掌握”、“了解”、“会”等用词层次的不同.下同不注.

关键:由逆对应理解反函数的概念.

对于应用问题,首先要仔细审题(读题),理解题意,再恰当地设自变量与因变量,并利用几何的、物理的或其他公式,准确地找出题中等量关系,就可建立其函数关系式.

复合函数分解为用各成员函数表出,要由外到内,“层层剥皮”,即可得出.要注意不要漏掉了中间层次.例如,

$$y = e^{\cos^2 \ln(1+x^3)}$$

可分解为:

$$y = e^u, \quad u = v^2, \quad v = \cos w, \quad w = \ln s, \quad s = 1+t, \quad t = x^3.$$

求分段函数的复合函数(或反函数)时,要分段讨论,特别要注意不同范围内的自变量、各中间变量与因变量(即所求函数)之间的依赖(即对应)关系.

3. 学习注意

(1)读者从这两节开始,复习函数知识以后,就要学习高等数学了.与初等数学相比较,高等数学是建立在初等数学的基础上的,内容多而难,且进度快.为了适应这一变化,首先要复习好函数知识,打好基础.在今后的学习中,要提倡自学,实行教师指导下的教与自学双向教学,俗话说:“师傅引进门,修行在各人”,就是这个意思.老师讲课就是“师傅引进门”,学生自修与身体力行就在于各人了.读者要掌握这修与行的方法,在学习过程中,应抓好如下五个环节:

① 课前预习(前一天通读教材中下次课要讲的内容);

② 听讲(提倡四“动”:动耳听,动眼看黑板上的板书,动手记笔记,动脑思维(这最重要)并要超前思维——想到下一步该怎么办?);

③ 课后复习(弄清教材上的每一个细节,并看参考书和辅导书,加深理解本次课的内容);

④ 完成作业(要独立完成,可以讨论、询问或查阅,然后自己写出,切忌抄袭);

⑤ 及时小结(按章节总结所学内容,归纳方法,写出体会等).

只要坚持不懈地抓好这五个环节,是可以学好高等数学的,并可从中培养能力,提高素质.

(2)这两节是函数复习,大部分内容是读者在中学里已学过的,应根据教材复习和熟悉它们,为后续学习打好基础.少部分是新补充的,如邻域概念,各分段函数,双曲函数,经济类函数,等等,今后常用到它们,学生应重点学习和熟悉它们,并适当做习题加深印象.

三、辅导答疑

1. 什么样的函数存在(单值)反函数?

答 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W , 即 $f(D)=W$, 若对应规则 f 使 D 与 W 之间构成“一一对应”关系

$$D \leftrightarrow W,$$

即 $\forall x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 \neq x_2$, 则有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 那么 $y=f(x)$ 必存在单值反函数 $x=f^{-1}(y)$ 或 $y=f^{-1}(x)$, 事实上, 此时必存在着单值对应 $y \rightarrow x$ (否则矛盾).

2. 如果函数 $f(x)$ 在某有穷区间上的每一点都有定义(取有限的函数值), 能否由此推出该函数一定有界?

答 不能, 反例: $f(x)=1/x, x \in (0, 1)$. 显见当 x 充分接近于 0 时, $f(x)$ 可以取任意大的值, 即无界. 例如, 若要 $f(x) > 10000$, 只需取 $0 < x < 0.0001$.

3. 在复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义中, 要求内函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值集合非空, 且全部或部分包含在外函数 $y=f(u)$ 的定义域之中, 为什么要附加这些限制条件?

答 因为不是任何两个函数都能构成复合函数,只有当 $x \in D_1, D_1 \subset D$ 通过中间变量 $u = \varphi(x)$ 使 y 有确定的值与之对应时,才可以构成以 D_1 为定义域的复合函数. 而当

$$\varphi(D_1) = \emptyset \quad \text{或} \quad \varphi(D_1) \cap E = \emptyset$$

(E 为 $f(u)$ 的定义域), 这时不能通过 u 使 y 有确定的值与 $x \in D_1$ 相对应, 就不能构成复合函数. 例如,

$$\begin{cases} y = u^2; \\ u = \sqrt{-x^2} \quad (x \neq 0); \end{cases} \quad \begin{cases} y = \arcsin u \quad (|u| \leq 1); \\ u = x^2 + 2 \quad (x \in \mathbf{R}) \end{cases}$$

都不能构成(实值的)复合函数.

又如 $y = \ln u (u > 0), u = x - 1 (x \in \mathbf{R})$, 虽能构成复合函数

$$y = \ln(x - 1), \quad x \in (1, +\infty),$$

但其定义域 $D_1 = \{x | x \in (1, +\infty)\} \subset D = \{x | x \in \mathbf{R}\}$, 且 $D_1 \neq D$, 即复合函数的定义域变小了, 它比内、外函数的定义域都要小一些.

4. 证明下列绝对值不等式:

(1) $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (三角形不等式);

(2) $a < x < b \Rightarrow |x| < |a| + |b|$;

(3) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

证 只证(1)作为示范, 其余的可按 $x \geq 0$ 或 $x < 0$, 与 $|x| \geq (<) |y|$ 讨论证之, 留给读者完成.

因为

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad \text{①}$$

$$-|y| \leq y \leq |y|, \quad \text{②}$$

$$-|y| \leq -y \leq |y|, \quad \text{③}$$

①+②, ①+③, 得

$$-(|x| + |y|) \leq x \pm y \leq |x| + |y|,$$

所以

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|. \quad \text{④}$$

又

$$|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |-y|,$$

故

$$|x + y| \geq |x| - |y|. \quad \text{⑤}$$

在⑤中以 $-y$ 代替 y , 又得

$$|x - y| \geq |x| - |y|. \quad \text{⑥}$$

综合④、⑤和⑥, 便证得(1).

5. 为什么说: (1) 互为反函数的两个函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图像在同一坐标系中是重合的?

(2) 而 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像在同一坐标系中关于直线 $y = x$ 成轴对称(一般而言不一样)?

(3) 由(1)和(2), 能否认为 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 是同一个函数, 而 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 不是同一个函数呢?

答 (1) 由反函数定义, 函数与其反函数的关系为:

一个是由 $x(\in D) \rightarrow y(\in W = f(D))$;

另一个是由 $y(\in W) \rightarrow x(\in D)$.

这一对 x 与 y (或 y 与 x) 的数值, 在坐标系中都对应着同一个点 (x, y) , 把 (x, y) 理解为动点,