Mathematical Analysis

数学分析 (第2册)

北京大学数学科学学院
谭小江　彭立中　编著

4

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学分析

（第 2 册）

北京大学数学科学学院

谭小江　彭立中　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析．第2册/谭小江，彭立中编著．—北京：
高等教育出版社，2005.11
ISBN 7-04-017747-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①谭…②彭… Ⅲ.数学分析-高
等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第119155号

策划编辑 徐　可　**责任编辑** 宋瑞才　**封面设计** 王凌波
责任绘图 黄建英　**版式设计** 王　莹　**责任校对** 杨凤玲
责任印制 杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京东君印刷有限公司		

开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	2005年12月第1版
印　　张	7.875	**印　　次**	2005年12月第1次印刷
字　　数	220 000	**定　　价**	11.40元

物料号　17747-00

目　　录

第一章　实数理论

在极限理论的讨论中，我们曾假定了实数满足确界原理：实数中任意非空有上界的集合必有上确界. 在这章里，我们将从公理的角度以及利用我们构造的实数模型，给出确界原理. 另外作为极限理论的补充，我们还将讨论开覆盖定理和 Cauchy 准则.

§1.1　实数公理与实数模型

上一册中我们学习了一元微积分的理论，证明了各种各样的定理. 仔细分析这些定理，不难看出定理可以分为两类. 一类是利用定义直接证明的定理. 例如利用极限定义我们得到极限的线性性，保序性和夹逼定理等；利用微分的定义我们得到微分满足 Leibniz 法则，链法则等. 但另外一些定理的证明仅用定义就不够了. 例如单调有界收敛定理，微分中值定理，连续函数的 Riemann 可积性等等. 这些定理必须依赖于我们讨论的空间——实数空间的性质才能得到. 例如我们是利用闭区间上连续函数一致连续定理证明了连续函数的可积性；利用闭区间上连续函数的最大最小值定理证明了微分中值定理，并进而得到 L'Hospital 法则以及微分的其他应用；利用连续函数的介值定理得到了指数函数、对数函数的连续性并推出了相关的求导公式. 而连续函数这些性质的证明必须利用区间套原理、Bolzano 定理等实数的性质. 因此追根溯源，我们可以说微积分的理论是建立在实数空间的性质上的. 我们是从实数的确界原理出发得到微积分的其他定理的. 要建立严格的微积分理论，我们需要重新回到实数空间，给确界原理一个合理的说明.

怎样给出实数的确界原理呢？有两种方法，一种是公理化方法，另一种是具体构造出一个实数空间的模型. 我们先从公理化方法开始. 我

们知道数学是一门推理的学科.所谓推理,是利用一些已知的结论通过合理的逻辑推导和计算得到一些新的结论的过程.但如果每一个结论都是建立在其他结论的逻辑推理的基础上,则当我们不断从后一个结论讨论前一个结论的来源时,我们只能是或者无穷无尽地寻找下去,或者产生循环推理.显然这两种情形都是不可取的.因此从推理的角度来看,我们必须有一个出发点,即我们必须以一些合理的假设为基础,在这些基础之上进行推理.这些假设作为我们认可的基本事实就是数学中经常用到的公理.需要说明的是公理并不是简单的事实罗列,而是以一种空间的形式来表述的.通常的表示形式是我们有一个集合,集合上有某些基本关系,这些关系满足一些基本事实(公理),从而形成一个公理空间或者公理系统.一个公理系统需要满足公理的独立性,其中任何一个假设不能是其他假设的逻辑推论;公理的相容性,假设之间互相不能推出矛盾;公理的完全性,推理过程中不再需要其他的假设.回到微积分,我们的问题是微积分是在哪些基本事实的基础上建立起来的.如我们在上面的讨论,我们知道微积分的许多定理是利用实数的一些性质证明的,因此我们需要将关于实数的一些基本性质作为公理.

实数公理 实数空间是一个集合 $\mathbf{R}$,在其上有三个基本关系

加法关系 $+:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.任意两个实数 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$,通过加法 $+:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 确定唯一的一个实数 $c=a+b\in\mathbf{R}$.

乘法关系 $\times:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.任意两个实数 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$,通过乘法 $\times:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 确定唯一的一个实数 $c=a\times b\in\mathbf{R}$(简记为 $c=ab$).

序关系 任意两个实数之间有序(大小)的关系,且对于任意的 $a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$,在 $a=b,a<b,b<a$ 三个关系中成立且仅成立其中一个.

这三个关系满足下面公理:

加法,乘法公理

1) 交换律 $a+b=b+a,ab=ba$.

2) 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c),(ab)c=a(bc)$.

3) 加法与乘法的分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

4) 逆元素 存在两个不同元素 0 和 1,使得 $\forall a\in\mathbf{R},0+a=a,1a=a$.并且 $\forall a\in\mathbf{R},\exists -a\in\mathbf{R}$, s.t. $a+(-a)=0$,而对于任意 $a\in\mathbf{R},a$

$\neq 0$, $\exists a^{-1}\in\mathbf{R}$, s.t. $a(a^{-1})=1$.

序公理

1) 序的传递性　如果 $a<b$, $b<c$,则 $a<c$.

2) 序与加法的关系　如果 $a<b$,则 $\forall c\in R$, $a+c<b+c$.

3) 序与乘法的关系　如果 $a<b$,则 $\forall c\in R$, $c>0$, $ac<bc$.

确界原理　实数中任意非空有上界的集合必有上确界.

在上面实数的公理系统中,我们不需要知道实数具体是由什么样的元素组成,加法,乘法和序是怎么定义的.我们所借助的仅是利用实数满足的这些性质来进行推理.微积分的其他不是由定义直接推出的定理都应该从这些假设得到.特别地在这里,确界原理是作为一个基本假设给出的.

相对于公理系统的另一方法是具体构造出实数空间的模型.所谓实数空间的模型与公理不同,我们需要利用集合和集合运算的一些方法将实数的集合具体地构造出来,并在这个具体构造的集合上面对其元素定义出加法,乘法和序这些基本关系,然后进一步验证所有实数空间的公理在这个具体构造的集合和实际定义的关系中都是成立的.构造实数空间的模型有多种方法,模型的具体形式在今后的推理中一般不会用到,但作为讨论实数公理系统的合理性以及作为数学中各种各样公理系统的模型的基础,实数模型仍然是十分重要的.下面我们将利用 Dedekind 的方法构造一个实数空间的模型.

*§1.2　从自然数到有理数

首先我们需要构造一个集合,利用集合中的元素来表示实数.实数是利用有理数定义的,有理数又是在自然数的基础上定义的,那么自然数如何定义呢?

设 A, B 是两个给定的集合,如果存在一个从 A 到 B 的映射 f,它是 1-1 的,又是满的,我们说集合 A 与 B 具有相同的势,或者说两个集合中所包含的元素个数相同.将有相同势的集合看作一类,我们将集合按其所含元素多少得到了一个分类,同一类中的集合称为相互等价,它

们有共同的势.我们首先承认空集 $\varnothing$ 是存在的,并用 0 表示空集 $\varnothing$ 的势.考虑一个集合 $\{\varnothing\}$,其中空集是它唯一的元素.凡与集合 $\{\varnothing\}$ 等价的集合都有相同的势,我们记 $\{\varnothing\}$ 的势为 1.再考虑集合

$$\{\varnothing,\{\varnothing\}\},$$

其中空集 $\varnothing$ 和集合 $\{\varnothing\}$ 是它的元素,它与势为 1 的 $\{\varnothing\}$ 是不等价的,我们把它的势记为 2.同样的,以 3 表示集合

$$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

的势,其中 $\varnothing$,$\{\varnothing\}$ 和 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 是它的元素.一般地如果有了 n 之后,我们以 n 表示势为 n 的集合,则可以归纳地定义 n 的后继 $\{n,\{n\}\}$,其由集合 n 中的元素加上元素 $\{n\}$ 组成,其势记为 $n+1$.这样我们就得到了自然数

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

$\mathbf{N}$ 中的元素表示有限集合的势.利用集合的并,可在 $\mathbf{N}$ 上定义加法:设 A 是势为 n 的集合,B 是势为 m 的集合.设 A,B 中所含元素互不相同,定义 $n+m$ 为集合 $A\cup B$ 的势.显然,加法满足结合律,交换律.利用加法,可在 $\mathbf{N}$ 中定义乘法为 $2m=m+m$;$3m=m+m+m$;$\cdots$,依此类推.同理,利用集合的包含关系,我们可以在自然数中定义序(大小)关系.如果集合 A 与集合 B 的一个子集 1-1 对应,但与 B 不 1-1 对应,则称 A 的势小于 B 的势.特别地,由上面自然数的定义,我们有

$$0<1<2<\cdots<n<n+1<\cdots.$$

这样我们就从空集出发,定义出自然数 $\mathbf{N}$.这是一个比较抽象的定义,比如说 2,它不指两个人,也不指两个物,而是指集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 所代表的势.这个集合有两个不同的元素 $\{\varnothing\}$ 和 $\varnothing$.凡是与它等价的集合,都与它有相同的势,于是两个人,两个物……都具有相同的势,按我们的理论,用 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 作为它们的代表.

怎样利用自然数 $\mathbf{N}$ 构造出整数和有理数呢?下面我们对此仅做一些简单的说明.令

$$\mathbf{Z}=\mathbf{N}\cup\{-n\mid n\in N\},$$

$-n$ 看作一个由 n 定义的符号.不难将 $\mathbf{N}$ 中加法,乘法和序推广到 $\mathbf{Z}$

上,例如$\forall n\in\mathbf{N}$,定义 $n>0$, $-n<0$, $0+n=n$, $0+(-n)=-n$ 等,这里就不详细讨论了.利用此我们定义了整数.

令 $\mathbf{Q}^*=\left\{\frac{p}{q}\mid p,q\in Z,q\neq 0\right\}$,如果对 $\mathbf{Q}^*$ 中两个元素$\frac{p_1}{q_1}$,$\frac{p_2}{q_2}$,存在$r\in\mathbf{Z}$,使得 $rp_1=p_2$, $rq_1=q_2$,则认为这两个元素相等.将相互相等的元素看作同一类,以每一类作为一个元素构成的集合记为 $\mathbf{Q}$,仍以$\frac{p}{q}$表示 $\mathbf{Q}$ 中的元素,可以将 $\mathbf{Z}$ 中的加法,乘法和序推广到 $\mathbf{Q}$ 上,并验证其满足上节中关于加法,乘法和序的公理.这样我们就得到了有理数.

特别地,有理数对于序这一关系满足:任意两个有理数 $a<b$,则存在有理数 c,s.t. $a<c<b$,例如令 $c=\frac{a+b}{2}$.这一性质称为有理数的稠密性.这样我们完成了有理数集 $\mathbf{Q}$ 的定义.

在 2500 年前,Pythagoras 学派认为一切线段都由原子组成,而原子有一个固定长度,比如假定单位线段由 q 个原子组成,被测量的线段由 p 个原子组成,则线段之长为:$\frac{p}{q}$,即有理数可以度量一切线段的长度.但 Pythagoras 学派的弟子 Hippasus 发现当正五角形的边长为 1 时,对角线的长度不能用有理数表示,Hippasus 因此受到迫害.后来发现有很多线段的长度不能用有理数表示,比如简单地取正方形边长为 1,由勾股定理,它的对角线长度的平方应为 2,我们记对角线长为$\sqrt{2}$,如果它是有理数,就应该有

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n},\quad (m,n)=1,\quad n\neq 0.$$

两边平方,得 $2n^2=m^2$,因为 m,n 都是整数,表明 m^2 中含因子 2,即 m 中含因子 2,设 $m=2p$,则 $n^2=2p^2$,同样推理表明 n 中也含因子 2,与$(m,n)=1$ 矛盾,所以$\sqrt{2}$不是有理数.这表明只有有理数是不够的,必须引入新的数,即无理数,才能度量所有线段的长度.

§1.3 实数的定义与实数性质

在有理数的基础上构造实数集合有不同的方法,这里我们利用较

为直观的 Dedekind 分割. 从几何上看, 有理数 $\mathbf{Q}$ 不足以度量所有线段的长度, 因而在实轴上没有填满, 还有很多"孔隙". Dedekind 分割就是在数轴上割一刀, 把现有的有理数 $\mathbf{Q}$ 分成两部分, 每一种分法代表数轴的一个点, 所有这样的分法就构成了实数集合.

定义 有理数的一个 Dedekind 分割 $(A|B)$ 是将有理数全体组成的集合分成 A, B 两类, 使满足以下性质:

1) A 与 B 都至少包含一个有理数(不空);

2) 任一有理数, 或属于 A, 或属于 B(不漏);

3) A 中任一数 a 均小于 B 中任一数 b, 即 $a\in A, b\in B \Rightarrow a<b$(不乱);

4) A 中没有最大的数, 即 $\forall a\in A, \exists a'\in A$, 使 $a<a'$.

A 称为分割 $(A|B)$ 的**下类**, B 称为分割 $(A|B)$ 的**上类**.

定义中 4) 不同于 1)—3), 它是非实质性的, 只是为了推理的方便. 在定义中 4) 我们用到了有理数的稠密性(即两个有理数之间必有一有理数), 如 A 有最大数, 将此数放入 B, 则它是 B 的最小数, 这时 A 就无最大数; 否则, 根据有理数的稠密性, A 的最大数与 B 的最小数之间必有一有理数, 这个有理数就被漏掉了, 这与分割的定义矛盾.

例 1 令 $A=\{x\,|\,x<1, x\in\mathbf{Q}\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant 1, x\in\mathbf{Q}\}$.

容易看出 A, B 构成有理数的一个分割, 这时上类 B 有最小数 1.

例 2 令

$$A=\{x\,|\,x\leqslant 0 \text{ 或 } x>0 \text{ 且 } x^2<2, x\in\mathbf{Q}\};$$

$$B=\{x\,|\,x>0 \text{ 且 } x^2>2, x\in\mathbf{Q}\}.$$

显然 A、B 不空、不乱, 因为不存在有理数其平方等于 2, 所以不漏. 下面证 A 无最大数.

设 $a\geqslant 0, a^2<2$, 要证存在有理数 $r>0$, 使 $(a+r)^2<2$. 即要证 $a^2+2ar+r^2<2$, 或 $2ar+r^2<2-a^2$, 即 $r\leqslant 1$ 并且 $r<\dfrac{2-a^2}{2a+1}$. 所以取有理数 r 满足 $0<r<\min\left\{1, \dfrac{2-a^2}{2a+1}\right\}$ 时, 就有 $(a+r)^2<2$, 故 A 中存在有理数 $a+r>a$. 当 $a<0$ 时, 属于 A 的有理数 0 大于 a, 这就证明

了 A 无最大数. 因此 $(A|B)$ 是有理数的一个分割.

这个分割中,上类 B 无最小数. 事实上,设 $b\in B$,即 $b>0$ 且 $b^2>2$,要证存在有理数 $r>0$,使 $b-r>0$,且 $(b-r)^2>2$,即 $b^2-2br+r^2>2$. 要使上式成立,只要,$r<\dfrac{b^2-2}{2b}$. 由于 $\dfrac{b^2-2}{2b}>0$,根据有理数的稠密性,知存在有理数 r 使得 $0<r<\dfrac{b^2-2}{2b}$,又由 $\dfrac{b^2-2}{2b}<b$,推知 $r<b$,对这样的 r,满足 $b-r>0$,$(b-r)^2>2$,这就证明了,在 B 中找到了比 b 更小的有理数 $b-r$,所以 B 无最小数.

由上面两例我们得到,有理数的 Dedekind 分割可以分为两类,第一类是上类 B 有最小数,我们称这类分割为有理分割. 显然,任一有理分割与其上类的最小有理数对应,反之任一有理数 b,总可确定一有理分割:

$$A=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{Q}\};B=\{x\mid x\geqslant b,x\in\mathbf{Q}\}.$$

这样,有理数可以与有理分割建立一一对应. 第二类是上类 B 无最小数,我们称这类分割为无理分割. 我们用无理分割来填充数轴上的"孔隙".

定义 有理数的任一无理分割称为**无理数**.

有理数和无理数统称为**实数**. 其全体表示为 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R}=\{\text{所有有理数的 Dedekind 分割}\}.$$

这样我们就具体构造出了表示实数的集合. 下面我们需要在这个集合上定义三个基本关系:加法,乘法和序,并验证这些基本关系满足实数公理中的结合律,交换律等. 我们还要验证实数对这些基本关系满足确界原理.

下面我们用 $x,y,z,\cdots$ 表示实数,即表示有理数的分割,用 $a,b,c,\cdots$ 表示有理数. 为了书写方便,用 A_x 表示实数 x 的下类,B_x 表示实数 x 的上类,B_x^0 表示 B_x 去掉最小数的集合. 我们首先在 $\mathbf{R}$ 中定义序关系.

定义 设有实数 x,y,

1) 若集合 $A_x=A_y$,则称 $x=y$;

2) 若集合 $A_x \neq A_y$，但 $A_x \subset A_y$，则称 x 小于 y，或 y 大于 x，记作 $x<y$ 或 $y>x$.

引理 1 $\forall x,y \in \mathbf{R}, x=y, x<y, y<x$ 中有且仅有一个成立.

证明 若下类 $A_x=A_y$，由定义知 $x=y$，其他两式不成立；若 $A_x \neq A_y$，但 $A_x \subset A_y$，则 $x<y$，其他两式不成立；若 A_x 不包含在 A_y 中，必有 $a' \in A_x$，而 $a' \notin A_y$，由此得 $a' \in B_y$，这时必有 $A_y \subset A_x$，即 $y<x$. □

当 x,y 为有理分割时，这一定义与把 x,y 看成有理数时的相等和大小关系是一致的. 与有理数 0 对应的有理分割仍记为 0，若 $x>0$，称 x 为正实数；若 $x<0$，称 x 为负实数.

设实数 $x<y$，由定义存在有理数 q_1，使 $q_1 \in A_y, q_1 \notin A_x$. 再由 A_y 无最大数，所以存在有理数 q_2, q_3，使

$$q_1<q_2<q_3, \quad q_i \in A_y, \quad q_i \notin A_x \quad (i=2,3).$$

有理数 q_2 产生的有理分割记作 z，容易看出 $x<z<y$，即有理数在实数集中是稠密的.

为了定义加法，我们需要下面引理.

引理 2 设 x,y 为实数，令

$$A=\{a_1+a_2 \mid a_1 \in A_x, a_2 \in A_y\}, B=\mathbf{Q}-A,$$

则 $(A \mid B)$ 是有理数的分割.

证明 A,B 满足分割不漏的条件是显然的，集合 A 无最大元素也是明显的. 只要证满足分割的不空和不乱条件即可.

先证 A,B 不空. A 不空是显然的，证 B 不空. 因集合 B_x, B_y 不空，$\exists b_1 \in B_x, b_2 \in B_y$，只要证 $b_1+b_2 \in B$.

假设不然，即 $b_1+b_2 \in A$，由 A 的定义，$\exists a_1 \in A_x, a_2 \in A_y$，使 $b_1+b_2=a_1+a_2$，而由分割 x,y 不乱条件得 $a_1<b_1, a_2<b_2$，即得 $a_1+a_2<b_1+b_2$. 故矛盾，所以 $b_1+b_2 \in B$.

再证不乱. 设 $a \in A, b \in B$，要证 $a<b$.

假设不然，$a \geqslant b$，由 A 的定义，$\exists a_1 \in A_x, a_2 \in A_y$，使得 $a=a_1+a_2 \geqslant b$，因此 $a_2 \geqslant b-a_1$，由分割 y 的不乱，得 $b-a_1 \in A_y$，于是 $b=$

$a_1+(b-a_1)\in A$,故矛盾.所以 $a<b$.故,$(A|B)$是有理数的分割.□

定义 在引理2条件下,称实数$(A|B)$为实数 x 与 y 的和,记作 $x+y$.

当 x,y 为有理分割时,其和也为有理分割,且和的定义与把 x、y 看成有理数时和的定义是一致的.

对于实数的乘法关系,下面我们只叙述定义,而略去证明.

负数的定义 给定实数 x,令

$$A=\{a\mid -a\in B_x^0\},B=\mathbf{Q}-A,$$

则$(A|B)$是有理数的分割,我们称$(A|B)$为实数 x 的负数,记作 $-x$.

由负数定义,容易证明下面性质:

1) 若 $x<0$,则有 $-x>0$;

2) 若 $x=y$,则 $-x=-y$;

3) $-(-x)=x$;

4) $-(x+y)=(-x)+(-y)$.

为了定义乘法,我们先定义实数 x 的绝对值为

$$|x|=\begin{cases}x, & 当\ x>0,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -x, & 当\ x<0.\end{cases}$$

乘法的定义 设有实数 $x>0,y>0$,令

$$A=\{a_1\cdot a_2\mid 0<a_1\in A_x,0<a_2\in A_y\}\cup\{a\mid a\leqslant 0,a\in\mathbf{Q}\},\quad B=\mathbf{Q}-A.$$

则$(A|B)$是有理数的分割,我们称实数$(A|B)$是实数 x 与 y 的积,记作 $x\cdot y$.

对于一般的情形,我们定义:

$$x\cdot y=\begin{cases}|x|\cdot|y|, & (x,y\ 同号),\\ -(|x|\cdot|y|), & (x,y\ 异号),\\ 0, & (x=0\ 或\ y=0).\end{cases}$$

显然,有$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

倒数的定义 设 $x>0$,令

$$A=\left\{a\,\middle|\,\frac{1}{a}\in B_x^0\right\}\cup\{a\mid a\leqslant 0,a\in\mathbf{Q}\},B=\mathbf{Q}-A.$$

则$(A|B)$是有理数的分割，我们称实数$(A|B)$是实数 x 的倒数，记作 x^{-1}或$\frac{1}{x}$.

当 $x<0$ 时，定义 $x^{-1}=-|x|^{-1}$，或$\frac{1}{x}=-\frac{1}{|x|}$.

下面我们来验证实数在定义了基本关系序，加法和乘法后满足实数公理的条件.我们从加法和乘法开始.

定理 1 实数是域.

证明 要证集合 $\mathbf{R}$ 是域，即要验证上面定义的加法和乘法运算满足下列性质：

1) 交换律 $\forall x,y\in\mathbf{R},\quad x+y=y+x,\quad x\cdot y=y\cdot x$;

2) 结合律 $\forall x,y,z\in\mathbf{R},\quad (x+y)+z=x+(y+z)$, $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$;

3) $\forall x\in\mathbf{R},\quad x+0=x,\quad x\cdot 1=x$;

4) $\forall x\in\mathbf{R},\quad x+(-x)=0,\quad x\cdot x^{-1}=1\quad(x\neq 0)$;

5) 分配律 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.

其中，记号 1 表示由有理数 1 所确定的有理分割.

下面仅以 4)中的加法为例，给出证明的示范.

证明 $x+(-x)=0$ 的困难在于每一个负有理数，能否看成集合 A_x 中的元素，与集合 A_{-x}中的元素相加而得，或能否看成集合 A_x 中的元素，减去集合 B_x^0 中的元素而得，为此我们需要下面引理.

引理 3 给定实数 x，$\forall$ 有理数 $\varepsilon>0$，则 $\exists\, a\in A_x, b\in B_x^0$，使 $b-a=\varepsilon$.

证明 由分割的不空性，$\exists\, a_0\in A_x, b_0\in B_x$，根据有理数的定义不难看出，$\exists$ 自然数 n，使得 $n\varepsilon>b_0-a_0$，考察数：

$$a_0,\quad a_0+\varepsilon,\quad a_0+2\varepsilon,\cdots,a_0+n\varepsilon(>b_0).$$

在这有限个数中，总存在一个位于 x 下类中最大的数，记作

$$a=a_0+k\varepsilon\in A_x\quad(k<n).$$

若 $b=a_0+(k+1)\varepsilon$ 不是上类的最小数，a,b 即为所求.若 b 是上类的最小数，取

$$a=a_0+\left(k+\frac{1}{2}\right)\varepsilon,\quad b=a_0+\left(k+\frac{3}{2}\right)\varepsilon$$

即可. □

下面证 $x+(-x)=0$,即要证 $A_{x+(-x)}=A_0$.

设 $a\in A_{x+(-x)}$,即 $a=a_1+a_2,a_1\in A_x,a_2\in A_{-x}$.由负数定义知 $-a_2\in B_x^0\subset B_x$,所以 $-a_2>a_1$,得 $a_1+a_2=a<0$,即 $a\in A_0$,因此 $A_{x+(-x)}\subset A_0$.

反之,若 $a\in A_0$,有 $-a>0$,根据引理 3,存在 $a_1\in A_x,b_1\in B_x^0$,且 $b_1-a_1=-a$,由负数定义,$-b_1\in A_{-x}$,再由加法定义,知

$$a=a_1-b_1=a_1+(-b_1)\in A_{x+(-x)},$$

因此 $A_0\subset A_{x+(-x)}$.

合起来得 $A_0=A_{x+(-x)}$,即 $0=x+(-x)$.

下面我们来验证序关系对实数也是成立的.

定理 2 序关系满足

1) $\forall x,y\in\mathbf{R}$,下列三式有且仅有一个成立:$x=y,x<y,y<x$;

2) 若 $x<y,y<z$,则 $x<z$(传递性);

3) 若 $x<y,z\in\mathbf{R}$,则 $x+z<y+z$;

4) 若 $x<y,z>0$,则 $x\cdot z<y\cdot z$.

证明 1) 已在引理 1 中证明.

2) 由条件得 $A_x\subset A_y,A_x\neq A_y;A_y\subset A_z,A_y\neq A_z$,因此 $A_x\subset A_z$,$A_x\neq A_z$,即 $x<z$.

3) 由 $x<y$,推出 $\exists c$,使 $c\in A_y$,而 $c\notin A_x$,因而 $c\in B_x$.由 A_y 无最大数,推出 $\exists c'$,使 $c<c'\in A_y$.令 $c'-c=\varepsilon>0$.由引理 3,$\exists a\in A_z,b\in B_z$,且 $b-a=\varepsilon=c'-c$.于是 $c'+a\in A_{y+z},b+c=a+c'\in B_{x+z}$,所以 $x+z<y+z$.

4) 因 $y+(-x)>0$,根据分割的乘法定义,知 $z\cdot[y+(-x)]>0$,由分配律 $z\cdot y+z\cdot(-x)>0$,利用 $x+(-x)=0$,可得 $z\cdot(-x)=-(z\cdot x)$,所以 $z\cdot y+[-(z\cdot x)]>0$,即得 $x\cdot z<y\cdot z$. □

最后,我们来验证实数满足确界原理.