ZhXShX

中学数学丛书

成应璟

代数与三角在几何中的应用

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

湖北教育出版社

ZHONGXUE SHUXUE CONGSHU

中学数学丛书

代数与三角在几何中的应用

成 应 璟

湖 北 教 育 出 版 社

代数与三角在几何中的应用

成应璟

*

湖北省教育出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北省天门县印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　6.5印张　1插页　142,000字

1986年5月第1版　1986年5月第1次印刷

印数：1—5,500

统一书号：7306·228　定价：1.00元

编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识。这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》。根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》。我们认为，这个工作是很有意义的。于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及数学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划。

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深。编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和数学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师。编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有所得。

《中学数学丛书》共计三十四册，多数小册子内容是和

教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的。丛书中每本小册子既相对独立又互相联系。同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用。学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读。同时，对教师教学亦有一定的参考作用。

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好。同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见。

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

目　录

导 言

欧几里德的公理体系在中学平面几何教学中，长期以来一直居于统治地位。一谈到平面几何题，人们很自然地想到公理、定义和定理，想到严密的逻辑推理。这些当然是必需的、重要的基础知识和基本训练，但是除开这些以外，以代数方法为主体的计算和恒等变形，特别是具体的数量关系的计算，在解几何题的过程中究竟居于何种地位？对此，传统的平面几何教学确实是讨论得比较少的。比如，在相似形的教学中，虽然涉及到比例变形，但重视的却是某些几何量的恒等变形，从一些几何量的比例式变到另一个比例式，真正用具体的数字来计算，还是比较少的。

又如，几何作图中有专门的代数解析法，但那里的落脚点也不在于代数计算，而在于把某些线段表为已知线段的第四比例项或比例中项……，然后归结为几何的尺规作图。

然而，应该看到，几何、代数在教学体系上的严格划分，毕竟是人为的。因为数学本来就是研究“现实世界空间形式及其数量关系”的科学，研究的对象本来就是形与数的统一体。合之双美、离之两伤，从形数结合的角度来考虑中学数学的教学，特别是用以考虑中学的几何教学，的确是非常必要的。只要在教学中切实把握住这一环，不论是从掌握基础知识来看，还是从培养学习能力来看，都将大有裨益。

这里，还应该指出，用代数方法研究几何问题正好是中

国古代数学的特点之一。以著名的勾股定理为例，在欧洲，最早的证法是几何原本中的面积证法。其大致证明过程如下：

如图0—1，$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$ABEF$、$BCGH$和$CAMN$均为正方形，过C作$CT\perp EF$于T，联结AH、CE。

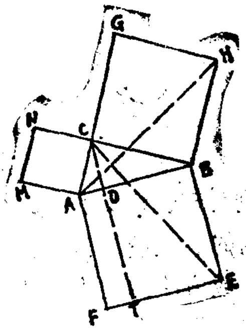


图 0-1

易证ΔABH的面积

$$S_{\Delta ABH}=\frac{1}{2}S_{BCGH}.$$

又 $$S_{\Delta BGE}=\frac{1}{2}S_{BDTE}.$$

但 $\Delta_{ABH}\cong\Delta EBC$.

$\therefore$ $S_{BCGH}=S_{BDTE}$.

同理 $S_{CAMN}=S_{ADTF}$.

$\therefore$ $S_{CAMN}+S_{BCGH}=S_{ADTF}+S_{BDTE}=S_{ABEF}$.

即 $AC^2+BC^2=AB^2$.

而中国古代数学中关于勾股定理的最早证法是东汉时代赵君卿的弦图，其证明过程大致如下：

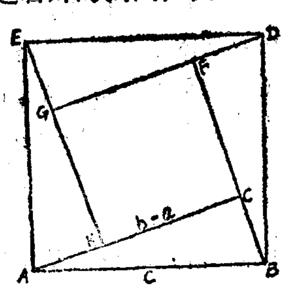


图 0-2

如图0—2，以直角三角形ABC的斜边AB为边向上作正方形$ABDE$，过E、D顺次作

$EH\perp AC$于H，

$DF\perp EH$于G，

并延长BC与DG交于F，由此易得

$$c^2=4\cdot\frac{1}{2}a\cdot b+(b-a)^2=a^2+b^2.$$

对比这两种证法，可以看出单一的几何法与代数几何综

合法的差异所在，前者主要在于着眼于图形的位置关系，即令研究数量关系是通过位置关系来把握数量关系，如上面那样由等底等高来证明三角形的面积等于矩形面积的一半。而后者则在于把几何元素的位置关系用数量反映出来，然后通过计算来寻求所需的结论。如上面把直角三角形的直角这一几何条件转化为数量关系：斜边上正方形面积等于四个直角三角形面积与小正方形面积之和。由于把论证过程归结为计算过程，因此，代数法解几何题从构思上往往比较简捷明快，具有一定的方便之处。据英国学者李约瑟氏的研究，认为西欧使用代数法处理几何题，始于十二世纪的斐波拉契，比中国晚了近一千年。

在遥远的古代，代数法解几何题对中国数学家研究几何曾经有力地显示其作用。那末在拥有笛卡尔坐标和平面三角等先进工具的今天，在综合应用所学知识上下工夫，无疑将会获得更大的收益。

下面，我们将通过几个简单的例题来介绍代数法解几何题的基本途径。

例1 在锐角$\triangle ABC$中，以BC为直径作圆O。过A作圆O的切线AT。在AB上取$AE=AT$。过E作$EF\perp AB$而与AC的延长线交于F。求证：$\triangle ABC$的面积$=\triangle AEF$的面积。

证明： 联结CG，易知$CG\perp AB$。于是由$\triangle AGC\backsim\triangle AEF$（为什么？）

有 $\quad AG:AE=CG:FE$。 ①

但由圆幂定理，知

$AT^2=AG\cdot AB$

即 $\quad AG=\dfrac{AT^2}{AB}=\dfrac{AE^2}{AB}$ ②

以②代入①

$$\frac{AE^2}{AB}:AE=CG:FE$$

化简得 $AE\cdot EF=AB\cdot CG$

$\therefore$ $\triangle ABC$的面积 $=\triangle AEF$ 的面积

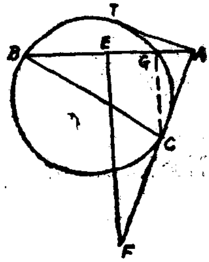


图 0-3

说明 本题看来用到代数之处不多，但是它的证题思路却反映了代数法的基本特征。

这里，第一个特点是把三角形的面积用线段之积表示出来，这就指明了用计算方法研究几何元素间的可能性。事实上，正是由于看到了

$$\triangle AEF\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF,$$

才想到怎样用线段表示$\triangle ABC$的面积。这样才促使我们想到引入辅助线CG。

其次，正由于确定了以代数计算为主体的证题法才使得我们在考虑AE和AB的关系时，联想到圆幂定理：$AT^2=AG\cdot AB$。不然的话，为什么不想到切线的其它性质呢？

把位置关系设法用数量关系反映出来，这就是代数法的最基本的特征。

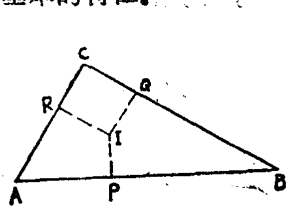


图 0-4

例2 直角$\triangle ABC$的内切圆I切斜边AB于点P，试证直角三角形的面积 $\triangle_{ABC}=AP\cdot BP$

证明： 设圆I在BC、CA边上的切点顺次为Q、R。为方便计，设三个角A、B和C所对边顺次为

a、b、c；而AP、BQ和CR顺次为x、y和z。

由切线性质，易知

$AR=AP=X$，$BP=BQ=Y$，$CQ=CR=Z$。

因此有

$$\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ z+x=b \end{cases}$$

解之得 $x=s-a$ $y=s-b$。这里 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

因此 $AP\cdot BP$

$=(s-a)(s-b)$

$=\frac{1}{4}(b+c-a)(c+a-b)$

$=\frac{1}{4}[c^2-(a-b)^2]$

$=\frac{1}{4}[c^2-a^2+2ab-b^2]$

注意到 $\triangle ABC$中，C为直角，因此有$c^2=a^2+b^2$。代入即得

$$AP\cdot BP=\frac{1}{2}ab=\Delta_{ABC}。$$

说明 （1）用a、b、c和A、B、C表示$\triangle ABC$的三边和三角，是代数法解几何题时常用的方法。本书中如无特别说明，以后都用这种表示法而不另作解释。

（2） 例 2 指明了代数法解几何题的一个重要途径：通过建立方程组来寻找有关几何元素的数量关系。另外，这里所得到的方程组的一组解答 $x=s-a$，$y=s-b$，$z=s-c$ 也是值得注意的。这个数量关系对任意三角形均成立。而且

如果注意到内心I的几何特征：三内角平分线的交点，立即可以得到平面三角的一组重要公式：

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a},\quad tg\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b},\quad tg\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

这里，r为内切圆的半径。

（3）例2也具体反映了在几何论证中用代数变形的优越性。因为，如果不从上述途径入手，本题的证明将是比较困难的。

例3 在以AB为直径的半圆中，半径$CO\perp AB$于O。以CO为直径作圆P。过A作圆P的切线AT并延长之与半圆交于D。若已知$AB=5$，试求弦BD之长

解： 联结TP、AP，并将AP延长与BD交于Q

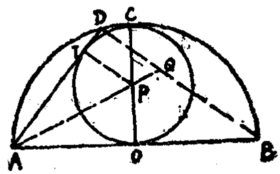


图 0-5

由切线性质易知

$AT=AO$，AQ平分$\angle DAB$。

于是$TP=OP=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}AT$。

又 $\angle ATP=\angle ADQ=90°$，$\angle TAP$公共，

则$\Delta ATP\backsim\Delta ADQ$。

从而 $\frac{DQ}{AD}=\frac{TP}{AT}=\frac{1}{2}$。

又在ΔABD中，AQ是内角平分线，

则 $\frac{BQ}{AB}=\frac{DQ}{AD}=\frac{1}{2}$。

因此 $\frac{BQ+DQ}{AB+AD}=\frac{BD}{AB+AD}=\frac{1}{2}$。

$$5+AD=2BD \qquad ①$$

又 $$AD^2+BD^2=AB^2=25 \qquad ②$$

联立①、②解之得　$BD=4$。

说明　例3用的同样是布列方程的思想。题中正是通过解方程组来求BD的。但这里更值得注意的是其中几何与代数知识的相互作用。正由于这种作用的存在，才使得我们有可能通过探求有关线段间的关系来建立方程组，这就是位置关系到数量关系的具体转换，是解几何题的重要的基本功。

例4　已知梯形$ABCD$的上底$AB=m$，下底$CD=n$。平行于底的两线段PQ、P_1Q_1顺次与腰AD交于P、P_1，与另一腰BC交于Q、Q_1。它们把原梯形分为等积的三部分。试求PQ、P_1Q_1之长。

解：　延长DA、CB交于D，（图0—6）。根据相似形的判定定理和性质定理易知。

$\Delta TAB\backsim\Delta TPQ\backsim\Delta TP_1Q_1\backsim\Delta TDC$；

而 $$\frac{S_{\Delta TAB}}{AB^2}=\frac{S_{\Delta TPQ}}{PQ^2}$$

$$=\frac{S_{\Delta TP_1Q_1}}{P_1Q_1^2}=\frac{S_{\Delta TDC}}{DC^2}.$$

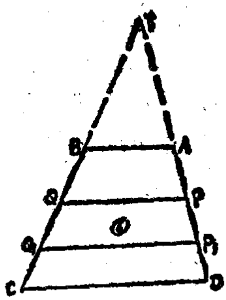


图 0-6

这里，$S_{\Delta TAB}$，$S_{\Delta TPQ}$，$S_{\Delta TP_1Q_1}$和$S_{\Delta TDC}$分别表示下标所示图形的面积。

于是由等比定理可得

$$\frac{S_{\Delta TPQ}-S_{\Delta TAB}}{PQ^2-AB^2}$$

$$=\frac{S_{\Delta TP_1Q_1}-S_{\Delta TPQ}}{P_1Q_1^2-PQ^2}$$

$$=\frac{S_{\Delta TDC}-S_{\Delta TP_1Q_1}}{DC^2-P_1Q_1^2}.$$

即 $$\frac{S_{ABQP}}{PQ^2-m^2}=\frac{S_{PQQ_1P_1}}{P_1Q_1^2-PQ^2}=\frac{S_{P_1Q_1CD}}{n^2-P_1Q_1^2}.$$

注意到　PQ、P_1Q_1分原梯形为等积的三部分，则

$S_{ABQP}=S_{PQQ_1P_1}=S_{P_1Q_1CD}$。于是有

$PQ^2-m^2=P_1Q_1{}^2-PQ^2=n^2-P_1Q_1{}^2$。

整理得方程组

$$\begin{cases}2PQ^2-P_1Q_1^2=m^2\\2P_1Q_1{}^2-PQ^2=n^2\end{cases}$$

解之取正值得　$PQ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2m^2+n^2}$，

$$P_1Q_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{m^2+2n^2}。$$

说明（1）。例4从几何的角度来看，反映了梯形问题的一类解法，即延长梯形两腰得到一些相似三角形。对于某些与平行两底的线段有关的问题，这是一类常用的方法。而在这样做的时候，往往牵涉到比例变形的应用，特别是有关等比定理的应用。这一部分知识应该属于中学代数的范围，但由于与相似形联系较多，现行大纲把它们放在几何中一道讲授。又由于课时等原因的限制，讨论是不够充分的。例如对于等比定理，书上一般都只讲到

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}。\qquad ①$$

但从应用的方便来看，似乎应该讲到

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}\qquad ②$$

这里，$k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n\neq0$。

因为有了②式，就可以更清楚地看到，不仅有：若干个前项之和与对应的后项之和之比等于任一个单比．而且还有：其中某些单比可以乘上k倍，还可相减（k取负值）．这

样，在应用上就方便灵活得多。例4中也就正是这样用的。事实上，题中从延长两腰得到一系列相似形开始，就正是为应用等比定理创造条件。而题中之所以敢于引入辅助未知数$S_{\triangle TAB}$，也还是由于考虑到应用等比定理可以消去它。希望读者从这些地方体会有关的基本训练。

（2） 例4还有它更一般的意义。即在题设的几何元素的数量关系找到之后，要充分注意综合应用。不仅要注意比例变形，还要注意极值、韦达定理、判别式等等。这一点我们将通过例5进一步予以揭示。

例5 如图0—7，O是AB上一点，OC、OD、OE是AB同侧的三射线，且$\angle AOC<\angle AOD<\angle AOE$。点$P$在$OA$上，且$OP=a$。过$P$作$PQ\parallel OE$交$OC$于$Q$；过$Q$作$QR\parallel AB$交$OD$于$R$；过$R$作$RS\parallel CO$交$OE$于$S$；过$S$作$ST\parallel DO$交$OB$于$T$求证$t\leqslant\frac{1}{4}a$。

证明： 延长QR与OE交于M。为方便计，设$MR=x$，$MS=y$，$OS=Z$。

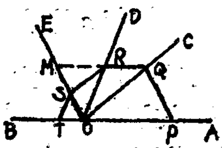


图 0-7

注意到$OPQM$是平行四边形，

$\therefore MQ=OP=a$。

由于 $RS\parallel QO$，则$\triangle MSR\backsim\triangle MOQ$，从而有$MR:MS=MQ:MO$，

即 $x:y=a:(y+z)$

则
$$y=\frac{x(y+z)}{a} \quad ①$$

又 $ST\parallel RO$，$OT\parallel RM$，由此易证：

$$\triangle OTS\backsim\triangle MRO,$$

类似地有 $t:z=x:(y+z)$

则 $$z=\frac{t(y+z)}{x}$$ ②

①+②，得

$$y+z=\frac{x(y+z)}{a}+\frac{t(y+z)}{x}$$

∵ $y+z\neq0$，则有

$$1=\frac{x}{a}+\frac{t}{x}$$

即 $$x^2-ax+at=0$$ ③

注意到 x必为实数，故有

$$\Delta=a^2-4\cdot1\cdot(at)=a(a-4t)\geqslant0$$

而a为线段之长，故$a>0$。因此有

$$a-4t\geqslant0$$

∴ $t\leqslant\frac{1}{4}a$。

说明 这是一道国外的数学竞赛题，解法似乎颇为别致，但仔细一想，思路还是很清楚的。因为题断要求的是$t\leqslant\frac{a}{4}$，是t与a的数量关系，因此证题过程当然得想方设法寻找a、t之间的关系式。又由于a、t之间不存在直接的数量，于是从建立方程组的观点出发，加设未知数x、y、z，建立方程组。从而走上从这个方程组中消去其它未知数来寻找a，t的关系的途径。在反复代入消元之后，得到的方程③，仍然含有其它的元x，又没有其他的关系式可借以消去x，这才促使我们观察方程③的特点，作出应用判别式的抉择。

上面五个例题，解法各不相同，但它们从不同的侧面反映了几何题的代数解法的基本特征，这些特征概括起来就是：

1. 设法探求题设中有关元素的数量关系；

2. 将上述关系归结为函数式、方程或不等式；

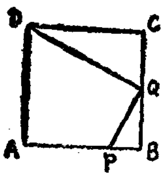
3. 综合应用有关的恒等变换的知识以简化所得关系，找出题断中有关元素的数量关系。通过最后所得的关系论证题断成立。

这就是一个将位置关系转化为数量关系，以恒等变形来加速逻辑推理的过程。尽管计算的工具可能逐步增加，三角法、坐标法、向量法各有各的特点，但它们的基本思路是一致的。至于各种新工具的新特征，我们将在下面各节中分别加以介绍。

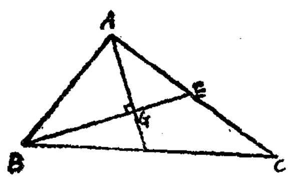
练 习 一

1. 正方形 $ABCD$ 中，P、Q分别在AB和BC上，而且$AP=3BP$，$BQ=CQ$。求证 $DQ=2PQ$。

2. 设矩形的对角线为 $305cm$，面积$37128cm^2$，求它的周长。



（第1题）



（第3题）

3. 三角形的两边为$2a$及$2b$，且这两边上的中线互相垂直。求第三边。

4. 是否存在这样的三角形？它的三高分别为2、3和4。

5. 直角三角形中两直角边之比为3：2，斜边上的高分斜边为两部分，这两部分之差为$2cm$。求斜边之长。