

A stylized orange triangle with a black compass icon inside, located in the upper left corner of the cover.

复习指导

中学数学教学文摘

浙江人民出版社

中学数学教学文摘

复习指导

浙江师范学院数学系
《中学数学教学文摘》编辑组

浙江人民出版社

内 容 提 要

《复习指导》系《中学数学教学文摘》中的一册。内容围绕着如何上好中学数学复习课，编选有关代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何方面的单元复习、阶段复习、专题复习、分科复习、综合复习等文章资料，还附有若干小资料。读者对象以中学数学教师、师范院校数学专业学生为主，也可供高中学生阅读参考。

中学数学教学文摘 复习指导

*

浙江人民出版社出版

(杭州武林路196号)

浙江新华印刷厂印刷

(杭州环城北路天水桥堍)

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张10.5 插页1 字数238,000

1982年2月第 一 版

1982年2月第一次印刷

印数：1—35,000

统一书号：7103·1196

定 价：0.91 元

前 言

“他山之石，可以攻玉”。努力参加社会实践，取得直接经验，固然重要，虚心学习他人经验也同样不可忽视。编辑《中学数学教学文摘》，目的也是想为中学数学教师博采广纳提供一点有益的资料。

建国以来，教育事业在发展的道路上遭受过种种挫折，尤其是十年内乱，更横遭摧残。可是无数忠诚党的教育事业的教师，仍然孜孜不倦地刻苦钻研业务，披沙拣金，写下了无数理论联系实际、见地深刻的好文章。它们散见在各种报刊杂志上，至今还很少有人去注意搜集整理，使它为当前的教育服务。现今教师队伍中年轻教师和新教师大量增加，他们热情好学，进取性强，可常常苦于资料匮乏，时间不足，对于大量过去和现在发表的好文章，难以一一遍读。经过搜集、整理、浓缩以后再奉献给他们，无疑可以为他们节约很多时间和省却寻求资料的麻烦。如今经过努力，终于编成了《教师的基本功》《复习指导》《解题证题指导》等三册，随后还将编辑代数、三角、几何等分科教学的经验。这些都是数学教学中经常要遇到的问题，解决得好，对提高教学质量将会有所帮助。

丛书在编辑方法上，强调精选精编的原则，一般不收录全文，采取节选、摘编或综合改写等方式，选取其精华部分，按专题分类编辑，力求中心突出，言简意赅，尽量以有限的篇幅包含较丰富的内容。当然，限于水平，难免挂一漏万。

探索教育规律，提高教学质量，这是大家共同关心的问题。假如我们今天所做的能对它起到一点点促进的作用，那是我们莫大的快慰。

参加本书编选的有吴茹玉、商永建、刘焕岩、王岳庭等同志，并经朱玉同志审定。编选过程中得到本院图书馆和数学系资料室的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

编 者

1981年3月

目 录

复习课提要	【 1 】
复习经验交流	【 3 】
谈数学复习工作	【 3 】
如何编写复习提纲	【 17 】
训练基本技能 培养综合运用能力	【 24 】
数学中的知识归类	【 34 】
数学各科知识的综合复习	【 42 】
如何选择复习课的例题	【 46 】
运用例题进行系统复习	【 56 】
数学复习的几点作法	【 58 】
怎样抓毕业班的数学复习	【 62 】
“多角度”的复习方法	【 66 】
补差复习	【 67 】
分科复习例选	【 70 】
代数	【 70 】
如何进行代数总复习	【 70 】
代数复习管见	【 77 】
怎样巩固与提高学生的代数知识	【 90 】
如何复习韦达定理	【 97 】
因式分解的归类举例	【 103 】
数的概念	【 109 】
数与代数式复习纲要	【 112 】
绝对值	【 121 】
函数及其图象	【 126 】

怎样复习一元二次方程	【130】
方程及方程组 (图表)	【137】
方程的增根与失根 (图表)	【138】
幂与根	【140】
对数复习提纲	【146】
指数方程与对数方程 (图表)	【151】
复数的概念与运算	【154】
不等式的系统复习	【165】
数列	【179】
排列、组合与二项式定理	【183】
几何	【187】
平面几何总复习中习题的选择和组织	【187】
怎样提高几何复习的效率	【193】
通过典型范例复习平面几何	【202】
初中平面几何总复习	【213】
有关直角三角形的综合复习	【220】
平行四边形复习提纲	【229】
平面几何主要公理定理系统表 (图表)	【231】
关于立体几何总复习	【232】
空间平面和直线复习纲要	【236】
通过一个公式复习体积公式	【243】
几种多面体性质对照表 (图表)	【249】
多面体与旋转体的表面积和体积	【251】
直线和它的方程	【254】
曲线与方程	【258】
圆 抛物线 椭圆 双曲线	【263】
三角	【272】
三角总复习	【272】
怎样组织三角复习课	【279】

三角复习中例题的选择	【289】
通过例题复习三角函数定义及性质	【295】
怎样复习加法定理的有关公式	【298】
任意角三角函数的性质和基本图象(图表)	【300】
运用例题复习三角函数的周期与图象	【301】
任意角三角函数与复角三角函数	【305】
正弦、余弦、射影定理的内在联系	【309】
三角形的解法	【313】
三角恒等式的证法	【317】
三角方程(图表)	【320】
反三角函数	【322】

小 资 料

罗巴切夫斯基与非欧几何	【16】
自然科学十二大发现	【41】
代数译名的来历	【69】
模糊数学	【76】
计算机的“语言”	【102】
数学家陈建功	【111】
冯·诺伊曼和新颖的除法	【125】
刘徽、祖冲之与 π	【136】
菲耳兹国际数学奖	【145】
四元数	【153】
“方程”二字的来历	【201】
心算大师克莱因	【212】
梅文鼎	【230】
几何三大问题	【257】
柯西小传	【262】

“十、一、 $\times$ 、 $\div$ 、 $=$ ”的来历	【278】
欧勒	【288】
费尔马小传	【304】
国际数学奥林匹克简介	【308】
阿拉伯数字与角的关系	【312】
智力商是怎么回事	【319】

复习课提要

一、复习课的作用

系统组织复习是使学生牢固掌握所学知识的重要条件，也是巩固、提高所学知识的有效方法。复习课要达到下列几个要求：

(1) 要对旧教材系统整理，综合概括，突出其内在联系，使学生在复习中对已学教材获得系统的全面的认识。

(2) 使学生知道哪些知识必须掌握，从而检查自己在掌握知识上有哪些缺陷，以引起他们对常犯易犯错误的重视，并切实加以纠正。

(3) 继续发展学生的独立思考能力及逻辑思维能力。

(4) 使学生灵活地运用所学知识，进一步训练和培养分析问题、解决问题的技能技巧。

二、组织复习课要注意的几个问题

(1) 要注意与平时上课的区别，不能是旧教材的简单罗列与重复，要使学生的知识在复习中得到加深和巩固，并获得新的东西。

(2) 要克服只重视培养解题能力忽视概念复习的倾向，使二者有机结合，相辅相成。

(3) 注意各科的系统性，也要重视各种知识的综合应用。

(4) 针对学生知识缺陷进行复习，查漏补缺，在复习中使学生全面掌握所学知识。

三、复习课的形式

(1) 单元与阶段复习。 (2) 专题复习。

(3) 期末复习. (4) 分科复习.

(5) 综合复习. (6) 补差复习.

(7) 数学总复习.

四、复习课的方法

(1) 教师讲解. (2) 师生共同活动.

(3) 通过例题进行复习. (4) 运用图表进行复习.

(5) 拟订复习纲要.

复习经验交流



谈数学复习工作

一、围绕数学基础知识，系统疏通、反复巩固

如何把当前数学复习质量提高，必须正本清源，以系统、全面的观点，一步一个脚印地阐明梳理已学过的教材内容，现将具体做法概述于下。

1. 巩固地串联基础知识

围绕大纲，考虑把概念的应用、技能的训练渗透在范例里面，通过剖析，促使学生在掌握基础知识方面得以巩固与提高。绝对值、算术根的概念，虽属分段引进，复习中应阐明 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 的一致性；方程（组）与不等式的运算，直接联系着数学各科知识，要予以重视，伴随着函数出现的图象性质以及直观描述的方法，都有广泛的实际价值，及时揭示它们在解题中的相互作用，很有必要。

例如“证明二椭圆 $2x^2+3y^2+4x-6y=0$ 和 $2x^2+5y^2+4x-10y=0$ 有同一个中心，并求它们的公共点坐标”。建立解题的起点是配方： $2(x+1)^2+3(y-1)^2=5$ 和 $2(x+1)^2+5(y-1)^2=7$ ，紧接着分析是令 $x'=x+1$ ， $y'=y-1$ 化为 $2x'^2+3y'^2=5$ 和 $2x'^2+5y'^2=7$ ，新坐标系原点 $O'(-1,1)$ 即被确定，从而导致证明。至于探求二椭圆公共点坐标，只须求方程组

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+4x-6y=0 \\ 2x^2+5y^2+4x-10y=0 \end{cases}$$

的解，观察系数特征，消去 x ，可获全部解答。

类似的例子：“试就 k 值变化讨论曲线 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1$ 的形状，并证明它们必有共同焦点。”首先借助不等式组求 k 值的可能区间：(1) $k < 9$ ，(2) $9 < k < 25$ ，(3) $k > 25$ （不表示任何圆锥曲线）。显然 $9 < k < 25$ 时，是双曲线型，有必要指出的运算是 $c^2 = a^2 + b^2 = 25 - k + k - 9 = 16$ ，所以 $c = 4$ ，可知共同焦点 $F_1(-4, 0)$ 和 $F_2(4, 0)$ ，其余情形仿此论述。

又如“解不等式 $x^{\log_a x} > \frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$ 。”因为 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 有

$a^2 \cdot x^{\log_a x} > x^{\frac{9}{2}}$ ，(1) 当 $a > 1$ 时，不等式两边对数化（取 a 底），

$2\log_a a + \log_a^2 x > \frac{9}{2}\log_a x$ ，即

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \log_a^2 x - 9\log_a x + 4 \\ & = (2\log_a x - 1)(\log_a x - 4) > 0, \end{aligned}$$

所以 $\log_a x < \frac{1}{2}$ 和 $\log_a x > 4$ ，

故得 $0 < x < \sqrt{a}$ 和 $x > a^4$ ；

(2) 当 $0 < a < 1$ 时，就有

$$(2\log_a x - 1)(\log_a x - 4) < 0,$$

由此 $\frac{1}{2} < \log_a x < 4$ ，

所以 $a^4 < x < \sqrt{a}$ 。

这里几乎概括了全部对数及不等式的基本性质与运算法则。

2. 有机地延续与深化习题

精选典例，适当引伸，旁及概念。试举数例，可及其余。

(1) “已知直线的倾斜角 x 满足

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x},$$

试求此直线斜率”。由直线倾斜角 x 的确定区间 $0 \leq x < \pi$ ，验证两端的值均正，平方后出现

$$\sin^2 \frac{x}{2} = 2 - 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = 2 - 2|\cos x|,$$

联系倍角降幂公式，

有
$$\frac{1 - \cos x}{2} = 2 - 2|\cos x|,$$

分析 $\cos x$ 值的正负，解得

$$\cos x = 1 \text{ 和 } \cos x = -\frac{3}{5},$$

从而
$$\sin x = 0 \text{ 和 } \sin x = \frac{4}{5},$$

所以
$$k_1 = \operatorname{tg} x = 0, \quad k_2 = \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}.$$

然后写出，该直线倾斜角 x 。但这时如用反正切函数表示，稍有疏忽，写成 $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{4}{3}\right)$ ，便犯有“主值”概念的谬误。

正确的表示是 $x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$ 。如此逐步启发诱导，不仅带动了三角运算，而且有效地巩固直线方程的知识。

(2) 在复习定比分点公式
$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$$
 时，可考虑它为

含参数 λ 的方程, 结合消去法, 可验明其为直线且必过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$. 比如有题为 “ $A(-3, 2)$ 和 $B(6, 1)$ 两点所在直线被直线 $x+3y-6=0$ 截于 P 点, 求 $AP:PB$ 的值.” 那么最合理的解题方案应为: 设直线 AB 被直线 $x+3y-6=0$ 截于 P 点的参数方程是

$$\begin{cases} x = \frac{-3+6\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{2+\lambda}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (\lambda \text{ 为参数})$$

代入方程 $\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda} + 3 \cdot \frac{2+\lambda}{1+\lambda} - 6 = 0,$

求 λ .

(3) 建议将算术根概念, 穿插孕育在各个部分里进行复习巩固, 例如化简

$$P(x) = \sqrt{\sin^2 x - 16\sin^2 x \cos^2 x \cos^2 2x + \cos^2 x}$$

的过程, 充分体现算术根的重要作用; 进一步提出 “解方程 $P(x) = 2 \cdot \cos^2 x$ ”, 这就是原题的深化. 剖析 $|\cos 4x| = 2 \cdot \cos^2 x$ 有两种可能, 出现 $\cos 4x = 2 \cdot \cos^2 x$ 或 $-\cos 4x = 2 \cos^2 x$ 时, 通过三角运算, 归结为关于 $\cos 2x$ 的二次方程, 而整个求解过程涉及的三角代数知识极其广泛.

3. 揭示解题的逻辑联系

系统安排相同类型的题材, 循序渐进, 由浅入深, 借以引起巩固而明确的联想. 给出分式

$$\begin{aligned} & \frac{p}{(p-q)(p-r)} + \frac{q}{(q-p)(q-r)} \\ & + \frac{r}{(r-p)(r-q)}, \end{aligned}$$

启发学生识别分母因式属于 p, q, r 的轮换, 运用相反数概念, 改写成

$$\begin{aligned} & \frac{-p}{(p-q)(r-p)} + \frac{-q}{(p-q)(q-r)} \\ & + \frac{-r}{(r-p)(q-r)} \\ & = \frac{-p(q-r) - q(r-p) - r(p-q)}{(p-q)(q-r)(r-p)}, \end{aligned}$$

运算即可简化; 继而引进“求

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}} + \frac{1}{1+x^{q-r}+x^{q-p}} \\ & + \frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}} \end{aligned}$$

的值”。试将各分式分子、分母分别乘以 x^{-p} 、 x^{-q} 、 x^{-r} , 那么原式变为

$$\begin{aligned} & \frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}} + \frac{x^{-q}}{x^{-q}+x^{-r}+x^{-p}} \\ & + \frac{x^{-r}}{x^{-r}+x^{-p}+x^{-q}}, \end{aligned}$$

甚易导致分式值为 1.

如再提出“已知 $abc=1$,

证明 $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$ ”.

考虑到把中间分式的分子分母同乘以 a , 就有可能使前两项合并为 $\frac{a+ab}{ab+a+1}$, 然后有目的地和第三个分式相加. 掌握了这一

解题思路, 提出“化简

$$P(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4},$$

并求方程 $P(x) = -1$ 的实数根”让学生课堂练习，将会迎刃而解。常见的等比性质：如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ ，那么 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots$ ，其证明总是借助比值法，设 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k$ ，就有 $a = bk, c = dk, e = fk \dots$ 置换分子后即可进行约分。联系不等式的证明：

“已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ 均为正数，

且
$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < \dots < \frac{a_n}{b_n},$$

那么
$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} < \frac{a_n}{b_n}.$$

关键仍在于分别以 $k_1 \sum_{i=1}^n a_i$ 和 $k_n \sum_{i=1}^n a_i$ 代换分子所引起分数值

的变化进行论述，及时过渡到三角不等式 “已知 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$

$$\dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2},$$

求证
$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i} < \operatorname{tg} \alpha_n.$$

经验证明：切实按照思维规律，安排讲例，重点剖析，举一反三，提高学生的解题能力是可以预期的。

4. 综合概念、公式、法则为解题服务