复习指导

中学数学教学文摘

浙江人民出版社

中学数学教学文摘

复习指导

浙江师范学院数学系
《中学数学教学文摘》编辑组

浙江人民出版社

内 容 提 要

《复习指导》系《中学数学教学文摘》中的一册。内容围绕着如何上好中学数学复习课，编选有关代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何方面的单元复习、阶段复习、专题复习、分科复习、综合复习等文章资料，还附有若干小资料。读者对象以中学数学教师、师范院校数学专业学生为主，也可供高中学生阅读参考。

中学数学教学文摘
复习指导
*
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥堍）
浙江省新华书店发行
开本787×1092 1/32 印张10.5 插页1 字数238,000
1982年2月第一版
1982年2月第一次印刷
印数：1—35,000
统一书号：7103·1196
定 价：0.91 元

前　言

“他山之石，可以攻玉”。努力参加社会实践，取得直接经验，固然重要，虚心学习他人经验也同样不可忽视。编辑《中学数学教学文摘》，目的也是想为中学数学教师博采广纳提供一点有益的资料。

建国以来，教育事业在发展的道路上遭受过种种挫折，尤其是十年内乱，更横遭摧残。可是无数忠诚党的教育事业的教师，仍然孜孜不倦地刻苦钻研业务，披沙拣金，写下了无数理论联系实际、见地深刻的好文章。它们散见在各种报刊杂志上，至今还很少有人去注意搜集整理，使它为当前的教育服务。现今教师队伍中年轻教师和新教师大量增加，他们热情好学，进取性强，可常常苦于资料匮乏，时间不足，对于大量过去和现在发表的好文章，难以一一遍读。经过搜集、整理、浓缩以后再奉献给他们，无疑可以为他们节约很多时间和省却寻求资料的麻烦。如今经过努力，终于编成了《教师的基本功》《复习指导》《解题证题指导》等三册，随后还将编辑代数、三角、几何等分科教学的经验。这些都是数学教学中经常要遇到的问题，解决得好，对提高教学质量将会有所帮助。

丛书在编辑方法上，强调精选精编的原则，一般不收录全文，采取节选、摘编或综合改写等方式，选取其精华部分，按专题分类编辑，力求中心突出，言简意赅，尽量以有限的篇幅包含较丰富的内容。当然，限于水平，难免挂一漏万。

探索教育规律，提高教学质量，这是大家共同关心的问题。假如我们今天所做的能对它起到一点点促进的作用，那是我们莫大的快慰。

参加本书编选的有吴茹玉、商永建、刘焕岩、王岳庭等同志，并经朱玉同志审定。编选过程中得到本院图书馆和数学系资料室的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

编　者

1981年3月

目　　录

小 资 料

复习课提要

一、复习课的作用

系统组织复习是使学生牢固掌握所学知识的重要条件，也是巩固、提高所学知识的有效方法.复习课要达到下列几个要求:

(1) 要对旧教材系统整理，综合概括，突出其内在联系，使学生在复习中对已学教材获得系统的全面的认识.

(2) 使学生知道哪些知识必须掌握，从而检查自己在掌握知识上有哪些缺陷，以引起他们对常犯易犯错误的重视，并切实加以纠正.

(3) 继续发展学生的独立思考能力及逻辑思维能力.

(4) 使学生灵活地运用所学知识，进一步训练和培养分析问题、解决问题的技能技巧.

二、组织复习课要注意的几个问题

(1) 要注意与平时上课的区别，不能是旧教材的简单罗列与重复，要使学生的知识在复习中得到加深和巩固，并获得新的东西.

(2) 要克服只重视培养解题能力忽视概念复习的倾向，使二者有机结合，相辅相成.

(3) 注意各科的系统性，也要重视各种知识的综合应用.

(4) 针对学生知识缺陷进行复习，查漏补缺，在复习中使学生全面掌握所学知识.

三、复习课的形式

(1) 单元与阶段复习.　(2) 专题复习.

(3) 期末复习. (4) 分科复习.

(5) 综合复习. (6) 补差复习.

(7) 数学总复习.

四、复习课的方法

(1) 教师讲解. (2) 师生共同活动.

(3) 通过例题进行复习. (4) 运用图表进行复习.

(5) 拟订复习纲要.

复习经验交流

谈数学复习工作

一、围绕数学基础知识，系统疏通、反复巩固

如何把当前数学复习质量提高，必须正本清源，以系统、全面的观点，一步一个脚印地阐明梳理已学过的教材内容，现将具体做法概述于下.

1. 巩固地串联基础知识

围绕大纲，考虑把概念的应用、技能的训练渗透在范例里面，通过剖析，促使学生在掌握基础知识方面得以巩固与提高. 绝对值、算术根的概念，虽属分段引进，复习中应阐明 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 的一致性；方程（组）与不等式的运算，直接联系着数学各科知识，要予以重视，伴随着函数出现的图象性质以及直观描述的方法，都有广泛的实际价值，及时揭示它们在解题中的相互作用，很有必要.

例如“证明二椭圆 $2x^2+3y^2+4x-6y=0$ 和 $2x^2+5y^2+4x-10y=0$ 有同一个中心，并求它们的公共点坐标”. 建立解题的起点是配方：$2(x+1)^2+3(y-1)^2=5$ 和 $2(x+1)^2+5(y-1)^2=7$，紧接着分析是令 $x'=x+1$，$y'=y-1$ 化为 $2x'^2+3y'^2=5$ 和 $2x'^2+5y'^2=7$，新坐标系原点 $O'(-1,1)$ 即被确定，从而导致证明. 至于探求二椭圆公共点坐标，只须求方程组

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+4x-6y=0 \\ 2x^2+5y^2+4x-10y=0 \end{cases}$$

的解，观察系数特征，消去 x，可获全部解答.

类似的例子："试就 k 值变化讨论曲线 $\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 的形状，并证明它们必有共同焦点．"首先借助不等式组求 k 值的可能区间：(1) $k<9$，(2) $9<k<25$，(3) $k>25$（不表示任何圆锥曲线）．显然 $9<k<25$ 时，是双曲线型，有必要指出的运算是 $c^2=a^2+b^2=25-k+k-9=16$，所以 $c=4$，可知共同焦点 $F_1(-4,0)$ 和 $F_2(4,0)$，其余情形仿此论述.

又如"解不等式 $x^{\log_a x}>\frac{x^{\frac{9}{2}}}{a^2}$."因为 $a>0$ 且 $a\neq1$ 有 $a^2\cdot x^{\log_a x}>x^{\frac{9}{2}}$，(1) 当 $a>1$ 时，不等式两边对数化(取 a 底)：$2\log_a a+\log^2_a x>\frac{9}{2}\log_a x$，即

$$\begin{aligned}&2\cdot\log^2_a x-9\log_a x+4\\ =&(2\log_a x-1)(\log_a x-4)>0,\end{aligned}$$

所以 $\log_a x<\frac{1}{2}$ 和 $\log_a x>4$,

故得 $0<x<\sqrt{a}$ 和 $x>a^4$;

(2) 当 $0<a<1$ 时，就有

$$(2\log_a x-1)(\log_a x-4)<0,$$

由此 $\frac{1}{2}<\log_a x<4$,

所以 $a^4<x<\sqrt{a}$.

这里几乎概括了全部对数及不等式的基本性质与运算法则.

2.有机地延续与深化习题

精选典例，适当引伸，旁及概念．试举数例，可及其余．

（1）“已知直线的倾斜角 x 满足

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x},$$

试求此直线斜率”．由直线倾斜角 x 的确定区间 $0\leqslant x<\pi$，验证两端的值均正，平方后出现

$$\sin^2\frac{x}{2}=2-2\sqrt{1-\sin^2 x}=2-2|\cos x|,$$

联系倍角降幂公式，

有
$$\frac{1-\cos x}{2}=2-2|\cos x|,$$

分析 $\cos x$ 值的正负，解得

$$\cos x=1 \text{ 和 } \cos x=-\frac{3}{5},$$

从而
$$\sin x=0 \text{ 和 } \sin x=\frac{4}{5},$$

所以
$$k_1=\operatorname{tg} x=0,\ k_2=\operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}.$$

然后写出，该直线倾斜角 x．但这时如用反正切函数表示，稍有疏忽，写成 $x=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{4}{3}\right)$，便犯有“主值”概念的谬误．正确的表示是 $x=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$．如此逐步启发诱导，不仅带动了三角运算，而且有效地巩固直线方程的知识．

（2）在复习定比分点公式 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$ 时，可考虑它为

含参数 λ 的方程，结合消去法，可验明其为直线且必过点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$. 比如有题为“$A(-3,2)$ 和 $B(6,1)$两点所在直线被直线 $x+3y-6=0$ 截于P点，求 $AP:PB$ 的值.”那么最合理的解题方案应为：设直线 AB 被直线 $x+3y-6=0$ 截于P点的参数方程是

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3+6\lambda}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{2+\lambda}{1+\lambda}, \end{cases} \qquad (\lambda \text{ 为参数})$$

代入方程 $$\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda}+3\cdot\frac{2+\lambda}{1+\lambda}-6=0,$$

求 λ.

(3) 建议将算术根概念，穿插孕育在各个部分里进行复习巩固，例如化简

$$P(x)=\sqrt{\sin^2 x-16\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x+\cos^2 x}$$

的过程，充分体现算术根的重要作用；进一步提出“解方程 $P(x)=2\cdot\cos^2 x$”，这就是原题的深化.剖析 $|\cos 4x|=2\cdot\cos^2 x$ 有两种可能，出现 $\cos 4x=2\cdot\cos^2 x$ 或 $-\cos 4x=2\cos^2 x$ 时，通过三角运算，归结为关于 $\cos 2x$ 的二次方程，而整个求解过程涉及的三角代数知识极其广泛.

3.揭示解题的逻辑联系

系统安排相同类型的题材，循序渐进，由浅入深，借以引起巩固而明确的联想. 给出分式

$$\frac{p}{(p-q)(p-r)}+\frac{q}{(q-p)(q-r)}+\frac{r}{(r-p)(r-q)},$$

启发学生识别分母因式属于 p、q、r 的轮换，运用相反数概念，改写成

$$\frac{-p}{(p-q)(r-p)}+\frac{-q}{(p-q)(q-r)}$$

$$+\frac{-r}{(r-p)(q-r)}$$

$$=\frac{-p(q-r)-q(r-p)-r(p-q)}{(p-q)(q-r)(r-p)},$$

运算即可简化；继而引进“求

$$\frac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}}+\frac{1}{1+x^{q-r}+x^{q-p}}$$

$$+\frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}}$$

的值”．试将各分式分子、分母分别乘以 x^{-p}、x^{-q}、x^{-r}，那么原式变为

$$\frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}+\frac{x^{-q}}{x^{-q}+x^{-r}+x^{-p}}$$

$$+\frac{x^{-r}}{x^{-r}+x^{-p}+x^{-q}},$$

甚易导致分式值为1．

如再提出“已知 $abc=1$,

证明 $$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}=1\text{”}.$$

考虑到把中间分式的分子分母同乘以 a，就有可能使前两项合并为$\frac{a+ab}{ab+a+1}$,然后有目的地和第三个分式相加．掌握了这一解题思路，提出“化简

$$P(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4},$$

并求方程 $P(x)=-1$ 的实数根”让学生课堂练习，将会迎刃而解．常见的等比性质：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，那么$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\cdots$，其证明总是借助比值法，设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$，就有 $a=bk$，$c=dk, e=fk\cdots$置换分子后即可进行约分．联系不等式的证明：

“已知 $a_1, a_2, a_3, \cdots b_1, b_2, b_3, \cdots$均为正数，

且 $$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}<\cdots\frac{a_n}{b_n},$$

那么 $$\frac{a_1}{b_1}<\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}<\frac{a_n}{b_n}\text{”}.$$

关键仍在于分别以 $k_1\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 和 $k_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 代换分子所引起分数值的变化进行论述；及时过渡到三角不等式“已知 $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3\cdots<\alpha_n<\frac{\pi}{2}$，

求证 $$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i}<\operatorname{tg}\alpha_n\text{”}.$$

经验证明：切实按照思维规律，安排讲例，重点剖析，举一反三，提高学生的解题能力是可以预期的．

4．综合概念、公式、法则为解题服务