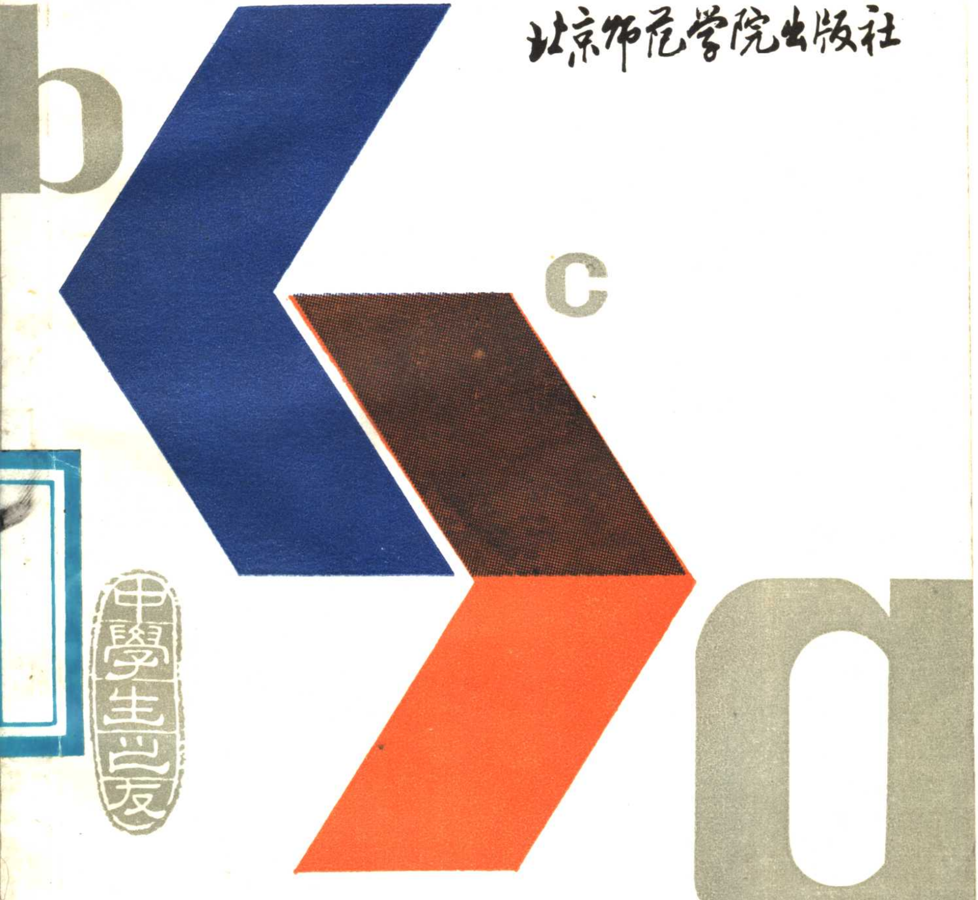
不等式证法

闻厚贵　编著

北京师范学院出版社



《中学生之友》丛书之四

不等式证法

闻厚贵　编著

北京师范学院出版社

1987年·北京

不 等 式 证 法

闻厚贵 编著

北京师范学院出版社出版
(北京阜成门外花园村)
新华书店首都发行所发行
北京昌平兴华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4.5 字数：91千
1987年9月北京第1版 1987年9月北京第1次印刷
印数：00,001—20,000册
ISBN 7—81014—084—1／G·82
统一书号：7427·135 定价：1.10元

序

不等式的证明问题，就其方法而言，没有定法可套，有较大的灵活性和技巧性；就其知识范围而言，涉及到代数、三角、几何等各个初等数学领域，有较强的综合性和多样性．同时许多重要的不等式（如平均值不等式、柯西不等式等）还有高等数学的背景．因此，不等式证明历来是中学、特别是高中数学教学的一个重点和难点．

近几年来，在各种考试和数学竞赛中，出现了许多证明不等式的妙题，各种数学书刊也不时发表这些试题的巧证，从而增加了人们对不等式证明方法的研究兴趣．

然而，目前中学数学课本中关于不等式证明部分的内容较少，所介绍的证法也很简单，远不能满足中学数学教师和中学生在教与学这两方面的各自需要．闻厚贵同志所编的《不等式证法》一书，正可以适应这种需要和要求．

本书将不等式的各种证明方法整理归类，每类举出典型例题，每例又给以思路分析，使读者有章可循，可以逐步由浅入深，了解和掌握不等式证明的方法和技巧．每种方法之后，还附以若干练习题，以供读者思考训练之用．该书内容充实，方法齐备，题量适中，详略得当，我相信，该书的出版，一定会成为中学数学教师的益友，成为广大中学生第二课堂上的良师．

胡炳生

一九八七年五月于安徽师范大学

目　　录

一、比较法

对所证不等式进行求差或求商，将得到的结果分别与 0 或 1 比较，从而得到所证的不等式成立．这种证明不等式的方法称之为比较法．

比较法是证明不等式最基本的方法．它可以分为两类：

1. 差比较法

欲证 $A>B$，只要证 $A-B>0$ 即可；

欲证 $A<B$，只要证 $A-B<0$ 即可．

此法证明不等式的基本步骤是：求差$\longrightarrow$变形$\longrightarrow$判断．其关键是第二步——变形．常用的变形方法有通分，配方，因式分解等．

例1. 已知 a、b、x、$y\in R^+$，且存在不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$x>y$．求证：$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$．

〔证法分析〕 不等式两边皆为分式，作差后，可采用通分的办法变形．

证明： 因为 $\frac{x}{x+a}-\frac{y}{y+b}=\frac{bx-ay}{(x+a)(y+b)}$，由条件

$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 可得

$$b>a,$$

又 $$x>y,$$

所以 $$xb>ay.$$

于是 $$\frac{bx-ay}{(x+a)(y+b)}>0,$$

故得： $$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}.$$

例2. 求证：$2+\sin x+\cos x\geqslant\dfrac{2}{2-\sin x-\cos x}$.

〔证法分析〕 对不等式两边观察，分析，易知$(2+\sin x+\cos x)(2-\sin x-\cos x)=3-\sin 2x$. 因此，作差后经过通分变形得：$\dfrac{1-\sin 2x}{2-\sin x-\cos x}$. 根据三角函数的有界性知上式为非负数.

证明： 因为 $$(2+\sin x+\cos x)-\frac{2}{2-\sin x-\cos x}$$

$$=\frac{1-\sin 2x}{2-\sin x-\cos x},$$

由于 $|\sin 2x|\leqslant 1$， $|\sin x|\leqslant 1$， $|\cos x|\leqslant 1$，

又 $$2-\sin x-\cos x\neq 0.$$

因此，不存在这样的x，使得 $|\sin x|=1$，$|\cos x|=1$ 同时成立.

所以 $$\frac{1-\sin 2x}{2-\sin x-\cos x}\geqslant 0.$$

故 $$2+\sin x+\cos x\geqslant\frac{2}{2-\sin x-\cos x}.$$

注：本例在变形后，有效地利用了三角函数的有界性. 这一点在证明含有三角函数的不等式中应用较广.

例3. 已知a、b、$c\in R^{+}$，且a、b、c成等比数列. 求证：$a^2+b^2+c^2>(a-b+c)^2$.

〔证法分析〕 作差、展开、合并易得：$2(ab+bc-ca)$. 根据a、b、c成等比数列，可设$b=aq$，$c=aq^2$. 所以，原不等式的证明转化为不等式$2a^2(q^3-q^2+q)>0$的证明.

证明： 根据条件可设$b=aq$，$c=aq^2$（q为公比，$q>0$）.

因为 $$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)-(a-b+c)^2\\&=2(ab+bc-ca)\\&=2(a^2q+a^2q^3-a^2q^2)\\&=2a^2q(q^2-q+1),\end{aligned}$$

而 $$q^2-q+1=\left(q-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

又 $$a>0,\qquad q>0,$$

所以 $$2a^2q(q^2-q+1)>0.$$

故 $$a^2+b^2+c^2>(a-b+c)^2.$$

注：证明中用到了配方法确定q^2-q+1的符号，这一点是为确定二次三项式的符号而经常采用的办法.

例4. 已知$f(\alpha)=1+\alpha+\sin\alpha$，且$\alpha_1\in(0,\pi)$，$\alpha_2\in(0,\pi)$，$\alpha_1\neq\alpha_2$. 求证：$f\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)>\dfrac{1}{2}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)]$.

〔证法分析〕 将$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$，$\alpha_1$，$\alpha_2$分别代入函数$f(\alpha)$，根据所证不等式整理得：$\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}>\dfrac{1}{2}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$，利用三角函数的有界性及诱导公式容易得证.

证明：因为 $f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)-\frac{1}{2}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)]$

$$=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{1}{2}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)$$

$$=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

$$=\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right),$$

由于 $\alpha_1\in(0,\pi)$，$\alpha_2\in(0,\pi)$，

所以 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\in(0,\pi)$.

又 $\alpha_1\neq\alpha_2$

所以 $-1<\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}<1$,

可得 $1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}>0$.

又 $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}>0$,

因此 $\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)>0$,

故 $f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(\alpha_1)+f(\alpha_2)]$.

通过以上几例可以看出，若不等式两边含有相同的项，或者作差后具有：(i)能进行因式分解；(ii)能用配方法（对

二次三项式）判断其符号的可能，可先考虑使用差比较法。

2．**商比较法**

若 $B>0$，欲证 $A>B$，只要证 $\frac{A}{B}>1$；

若 $B>0$，欲证 $A<B$，只要证 $\frac{A}{B}<1$．

此法证明不等式的基本步骤是：求商⟶变形⟶判断，其关键是第二步——变形．

例1． 已知 a、b、$c\in R^{+}$，且 $a\neq b\neq c$．求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$．

〔证法分析〕 所证不等式的两边为指数式，作商后根据指数的运算法则可得：$a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-c-a}\cdot c^{2c-a-b}$．为了得到不等式的另一边为1，根据条件可设 $a>b>c>0$（也可设 $b>c>a>0$）．从而得：$2a-b-c>0$，$2c-a-b<0$，利用这三个不等式对作商后的式子变形即可得证．

证明： 根据条件，不妨设 $a>b>c>0$，

因而
$$2a-b-c>0,$$
$$a+b-2c>0.$$

于是
$$\begin{aligned}&\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}\\&=a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-c-a}\cdot c^{2c-a-b}\\&>b^{2a-b-c}\cdot b^{2b-c-a}\cdot c^{2c-a-b}\\&=b^{a+b-2c}\cdot c^{2c-a-b}\\&>c^{a+b-2c}\cdot c^{2c-a-b}\\&=c^{0}\\&=1,\end{aligned}$$

故 $$a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}.$$

例2. 已知 $0<\alpha<\pi$，求证：$2\sin 2\alpha\leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

〔证法分析〕 所证不等式的左边是倍角的正弦，右边是半角的余切．我们通常采取的方法是将不同角的三角函数转化为相同角的三角函数．于是，我们可想到以下两个诱导公式(i) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，(ii) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

证明： 因为
$$\begin{aligned}\frac{2\sin 2\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}&=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}\\&=4\cos\alpha(1-\cos\alpha)\\&=4\cos\alpha-4\cos^2\alpha\\&=1-(4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1)\\&=1-(2\cos\alpha-1)^2\\&\leqslant 1,\end{aligned}$$

又 $$0<\alpha<\pi,$$

所以 $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>0,$$

即 $$2\sin 2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

例3. 已知 x、$y\in R^+$，且 $x\neq y$．求证：$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^{x+y}>x^y y^x$.

〔证法分析〕 所证不等式的两边皆为指数式，而左边

的底数为一多项式：$x+y$．作商后为了应用指数的运算法则，可用不等式 $a+b>2\sqrt{ab}$ （a，$b\in R^+$，$a\neq b$）同向代换，从而将 $x+y$ 转化为 $x\cdot y$．

证明： 因为 $\dfrac{(x+y)^{x+y}}{2^{x+y}x^y y^x}$

$$>\frac{(2\sqrt{xy})^{x+y}}{2^{x+y}x^y y^x}\quad (x\neq y)$$

$$=\frac{x^{\frac{x+y}{2}}\cdot y^{\frac{x+y}{2}}}{x^y\cdot y^x}$$

$$=x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}.$$

当 $x>y$ 时，$x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}>y^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}=1$；

当 $x<y$ 时，$x^{\frac{x-y}{2}}\cdot y^{\frac{y-x}{2}}>x^{\frac{x-y}{2}}\cdot x^{\frac{y-x}{2}}=1$．

所以 $$\frac{(x+y)^{x+y}}{2^{x+y}x^y\cdot y^x}>1,$$

故 $$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}>x^y\cdot y^x.$$

例4． 已知 a、b、$c\in R$，且 $a>0$，$a^n-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n=0$，$n\in N$，$a<(bc)^{\frac{1}{2}}$．求证：$a<b<c$．

〔证法分析〕 根据条件得 $ac>0$，$bc>0$．由于 $a>0$，易得 a、b、$c\in R^+$，我们将等式 $a^n-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n=0$ 变形得：$c^{\frac{n}{2}}=\dfrac{a^n+b^n}{2a^{\frac{n}{2}}}$ （1） 若(1)式右边的分母能化为

$2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$，则可用不等式：$a^n+b^n\geqslant 2\sqrt{a^n\cdot b^n}$ 将其变形。于是用 $b^{\frac{n}{2}}$ 去除以(1)式两边得：$\dfrac{c^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}=\dfrac{a^n+b^n}{2(ab)^{\frac{n}{2}}}\geqslant$ $\dfrac{2(ab)^{\frac{n}{2}}}{2(ab)^{\frac{n}{2}}}=1$，所以 $c\geqslant b$. 进一步可推得 $c>b$，同理可得 $a<b$.

证明：因为 $a^n-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n=0$，

所以 $$c^{\frac{n}{2}}=\frac{a^n+b^n}{2a^{\frac{n}{2}}},$$

于是 $$\frac{c^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}=\frac{a^n+b^n}{2(ab)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\geqslant\frac{2(ab)^{\frac{n}{2}}}{2(ab)^{\frac{n}{2}}}$$

$$=1,$$

所以 $$c^{\frac{n}{2}}\geqslant b^{\frac{n}{2}}.$$

即 $$c\geqslant b.$$

根据条件易推得 $a\neq b\neq c$（若不然，$a=b=c$ 与 $a<(bc)^{\frac{1}{2}}$ 相矛盾．例如，将$b=c$代入$a^n-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n=0$中，得$a=b$，显然与$a<(bc)^{\frac{1}{2}}$相矛盾）．所以

$$c>b \tag{2}$$

又将条件 $a<(bc)^{\frac{1}{2}}$ 代入 $a^n-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n=0$，得：

$$(bc)^{\frac{n}{2}}-2(ac)^{\frac{n}{2}}+b^n>0,$$

所以
$$b^n>\frac{2(ac)^{\frac{n}{2}}}{c^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}}$$

于是
$$\frac{b^{\frac{n}{2}}}{a^{\frac{n}{2}}}>\frac{2c^{\frac{n}{2}}}{c^{\frac{n}{2}}+b^{\frac{n}{2}}}$$

$$>\frac{2c^{\frac{n}{2}}}{c^{\frac{n}{2}}+c^{\frac{n}{2}}}$$

$$=1,$$

所以
$$b^{\frac{n}{2}}>a^{\frac{n}{2}},$$

即
$$b>a \tag{3}$$

由(2)，(3) 两式可得

$$a<b<c.$$

通过前面几例可以看到，例1，例3在变形中的共同点是：将不同的幂的底数转化成相同的底，其目的是为了更好地运用指数的运算法则．而例4是通过将分子（或分母）完全变形成分母（或分子），从而使其比值为1．一般来说，不等式两边是指数形式或能使分子、分母变形得到相同结果的不等式，用商比较法较为容易．对于例2这类题目，由于三角函数间的内在联系，用商比较法来证亦显得简单．

练 习 题 一

1. 若 $a>b>0$，$c>d>0$．求证：$ac>bd$.

2. 已知a、$b\in R$，求证：$a^2+b^2\geqslant 2\cdot(2a-b)-5$.

3. 已知 a、b、$c\in R$，求证：$(a+b+c)\cdot(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$.

4. 已知 a、b、$c\in R^+$，求证：$a^a b^b c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

5. 试比较 $\left|\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right|$ 和 $\left|\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right|$ 的大小，并指出何时取等号.

6. 已知 $a\in(-1,+\infty)$，$b\in(-1,+\infty)$．求证：$(a+1)^{a+1}\cdot(b+1)^{b+1}\geqslant(a+1)^{b+1}\cdot(b+1)^{a+1}$.

7. 设 α、β、γ 是锐角三角形的三内角，且 $\alpha>\beta>\gamma$．求证：$\sin 2\alpha<\sin 2\beta<\sin 2\gamma$.

8. 已知数列 a_1，a_2，……，a_n，…的各项均为正数，且 $f(n)=n\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right]$．求证：$f(n)\geqslant f(n-1)$，并求等号成立的条件.

9. 已知不等式中的字母皆为正实数．求证：

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}.$$

10. x_1，x_2，…，x_n 是n个实数，它们的算术平均数为$\overline{x}$．若 $a\neq\overline{x}$，求证：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2<\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$

二、综 合 法

利用已知条件或已被证明过的基本不等式作为基础，再运用不等式的性质逐步推求必要条件，直到所要证的不等式成立．这种证明不等式的方法称之为综合法．

此法证明不等式的基本思想是：由因导果，顺流而下．

下面三组基本不等式是灵活应用综合法证明不等式的基础，必须熟练掌握．

1．**代数不等式**

(1) $a^2\geqslant 0$ 或$(a-b)^2\geqslant 0$，a、$b\in R$ 当$a=0$ 或 $a=b$时取等号．

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$，a、$b\in R$．当 $a=b$ 时，取等号．

(3) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$，$a$、$b\in R$，且 a、b 同号．当 $a=b$ 时取等号．

(4) $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$a$、$b\in R^+$．当 $a=b$ 时，取等号．

(5) $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，$a$、$b\in R^+$．当 $a=b$ 时，取等号．此不等式推广后的一般式为：$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$，其中$a_i\in R^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$．