21世纪高等学校教材

陈晓龙 施庆生 邓晓卫 编著

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等学校教材

概率论与数理统计

陈晓龙　施庆生　邓晓卫　编著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书包括事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等9章。

本书可作为高等学校工科、管理、财经及非数学类的理科专业的教材或参考用书，也可供工程技术人员或科技人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/陈晓龙，施庆生，邓晓卫编著.
—南京：东南大学出版社，2002.12
ISBN 7 81089-129-4

Ⅰ 概... Ⅱ.①陈...②施...③邓... Ⅲ ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第096258号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销 南京京新印刷厂印刷
开本：700mm×1000mm 1/16 印张：16.25 字数：319千字
2003年1月第1版 2003年1月第1次印刷
印数：1—4000 定价：20.00元

前 言

概率论与数理统计是高等学校理工科专业的必修课，同时也是工学和经济学硕士研究生入学考试数学科目的考试内容。

从学科分类看，概率论、数理统计都是近代数学的分支，它们在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用。概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，而数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究。虽然两者在方法上有着明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的。因此，本书在编排上，也大致分成两部分：第一部分为概率论，包括第1、2、3、4、5章，其中也掺杂一些数理统计的例子；第二部分为数理统计，包括第6、7、8、9章，所选例子大部分来自生产或生活实际，其中也有一小部分是有关概率论的内容。概率论与数理统计是一门应用广泛且实验性很强的随机数学学科，因此，在附录1提供了若干概率论与数理统计实验，读者如能亲临实际做几个实验练习，并进行数据分析，一定有助于加深对本课程研究对象和独特思维方式的理解。

本书在编写过程中，努力做到通俗易懂，简详得当，在选材和叙述上尽量做到联系实际，突出基本内容的掌握和基本方法的训练，注重数理统计的应用，所选用的例子不仅能加深对基本概念和基本方法的了解，同时也能提高读者学习的兴趣。为了帮助读者巩固所学知识，本书在习题的选择上也做了些努力，既有基本训练题，也有较为复杂的综合应用题，这些题目都是饶有趣味的，有的就能直接应用于实际，读者可酌量做一部分以开拓思路，加深理解。

书中有些内容加注了“*”号，作为选学内容，可供教师选用或尚有余力的学生课外阅读。

参加本书编写的有施庆生（绪论、第1、2章及附录1）、陈晓龙（第3、4、5、8、9章）、邓晓卫（第6、7章），最后由陈晓龙负责全书的统稿和定稿。金炳陶教授仔细审阅了本书，并提出了许多宝贵的意见。在编写过程中，还得到南京工业大学教务处、理学院的大力支持，在此一并致谢。

限于编者的水平，书中肯定存在错误和缺点，敬请读者批评指正。

编者

2002年于南京

目录

绪 论

对于想学习一门新知识的读者来说，总希望能对该门学科有一个大概的了解。为此，我们在讲述概率论与数理统计之前，首先对它的研究对象及其在自然科学、国民经济各领域中的应用，作一简要的介绍。

0.1 随机现象与随机试验

人们在社会实践和科学实验中，经常遇到两类不同的现象。一类是**确定性现象**，即在一定条件下，必然会发生某种结果或必然不会发生某种结果的现象。例如：自由落体在高处总是垂直落向地面；在标准大气压下，100℃的水会沸腾；一台被系统病毒感染破坏的电脑无法完成预定的程序等。所有这些现象均属确定性现象。它们表达了条件与结果之间的必然联系。确定性现象非常广泛，高等数学、线性代数等就是研究和描述这类现象的数学学科。

另一类是**随机现象**，即在给定条件下其结果是否发生是不可预言的。例如：向桌面上掷一枚硬币，落下后是正面向上，还是反面向上，事先是无法预言的；在某个股票交易日，开盘后其股票综合指数是多少点事先是无法预知的；某天某城市出生的男婴和女婴数各是多少事先是无法知道的等。所有这些现象均属随机现象。它们表达了条件和结果之间的非确定性联系。

为探索和研究随机现象的规律性，就需要进行一系列试验，包括各种各样的科学试验和对随机现象的种种观测。例如：掷一枚硬币，观察正面和反面出现的情况；测量若干个同类零件的长度；抛一颗骰子，观察朝上一面的点数等。它们具有如下共同的特点：

(1)试验在相同的条件下可重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，但每次试验的所有可能结果是已知的；

(3)试验完成之前不能确知哪个结果会发生。

通常把具备上述特点的试验称为**随机试验**。本书以后提到的试验均指随机试验。人们往往通过对随机试验的观测来研究随机现象。

0.2 随机现象的统计规律性

人们通过长期的反复观测和实践发现，随机现象在一次或几次试验中，表现出

一种不确定性，但在相同条件下进行大量重复试验或观测时，随机现象却呈现某种规律性。例如，掷一枚均匀的硬币一次，是正面向上还是反面向上是不能确定的，但若抛掷多次，正面和反面出现的次数比例总是接近于 1:1，而且抛掷次数愈多，愈接近这个比值。这种在大量重复的试验或观测中呈现出的固有规律性通常称为随机现象的**统计规律性**。

恩格斯指出："在表面上是偶然性起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"概率论与数理统计就是研究和发现随机现象统计规律性的数学学科。

0.3 概率论与数理统计的若干重要应用

当科学技术处在相对粗略阶段时，人们常常忽略随机现象。而随着科学技术的发展，在精确度要求越来越高的今天，人们已经无法忽视随机现象。由于自然界随机现象存在的广泛性，使得概率论与数理统计的方法正日甚一日地渗入到几乎一切自然科学、技术科学以及经济管理各领域中去。常见的问题有：

(1)在工农业生产和科学试验中，广泛存在着对产品质量的估计、检验、控制等问题，这些问题对企业管理者来说是非常重要的，它们都属于概率论与数理统计的应用范围。

(2)水文学中有许多随机现象，如一条河的年流量、最大洪峰，一个水库的实际年最大储水量等，这些问题的研究对大坝及水电站的建设都具有极其重要的意义。

(3)生物学、医学中有大量的随机现象，如疾病的传播和诊断，现代遗传学和基因工程等问题都要用概率论与数理统计的方法，并形成了"生物统计"和"医学统计"两个边缘学科。

(4)随着现代农业的发展及防灾减灾的需要，以往确定性的气象预报已不能适应目前经济的发展，这是因为气象问题也是随机的，代之而起的是"概率预报"和"统计预报"。统计预报在解决长期天气预报方面获得很大成功，并在地震预报中也找到了用武之地。

(5)结构设计中要考虑两个基本变量，即结构的荷载效应 S(作用在结构上的荷载产生的结构内力)，抗力 R(结构承受荷载和变形的能力)。以往都把 S 和 R 描述成确定性的变量，而用"定值设计理论" 进行结构设计，这样的设计可靠性较差。这是由于活荷载以及风压等都是随机的，故在现实中 S 和 R 不可能是确定性的，而是随机的。随着建筑业的发展，在结构设计中引入了概率论与数理统计的理论和方法，产生了概率设计理论，它使建筑结构设计更加精确和安全可靠。

此外，在自动控制、通讯、航海、航空、金融、保险等方面概率论与数理统计都有极其广泛的应用。

1 事件与概率

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机事件

为了探索随机现象的规律性必须进行大量的重复试验，我们把试验的每一种可能结果称为**随机事件**，简称**事件**。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。

例 1 1个口袋中装有形状完全相同的红球3个（编号为①,②,③）和白球2个（编号为④,⑤）。现考察任取3球（即一次取出3球）中所含红、白球的情况。

$$A_1=\{①,②,③\},\quad A_2=\{①,②,④\},\quad A_3=\{①,②,⑤\}$$
$$A_4=\{①,③,④\},\quad A_5=\{①,③,⑤\},\quad A_6=\{①,④,⑤\}$$
$$A_7=\{②,③,④\},\quad A_8=\{②,③,⑤\},\quad A_9=\{②,④,⑤\}$$
$$A_{10}=\{③,④,⑤\}$$
$$B=\{\text{恰有 2 个红球}\},\quad C=\{\text{至少有 2 个红球}\},\quad D=\{\text{球的号码}\leqslant 4\}$$
$$E=\{\text{至少有 1 个红球}\},\quad F=\{\text{恰有 3 个白球}\}$$

显然上面所列举的种种情况都是试验的可能结果，它们都是事件。但事件 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$ 与事件 B,C,D,E,F 等是不同的。A_1 到 A_{10} 这10个事件都是试验的直接结果，这样的事件称为**基本事件**。而事件 B,C,D,E,F 等都不是试验的直接结果。如事件 D 是由 A_1,A_2,A_4,A_7 等基本事件组合成的，可记作 $D=\{A_1,A_2,A_4,A_7\}$，事件 D 的发生等价于基本事件 A_1,A_2,A_4,A_7 中恰有1个发生。像 D 这样由2个或2个以上基本事件组合而成的事件称为**复合事件**。

同样，$B=\{A_2,A_3,A_4,A_5,A_7,A_8\}$，$C=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_7,A_8\}$，$E=\{A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$ 等都是复合事件。

另外，我们注意到事件 F 不包含任何试验结果，即在所给条件下，事件 F 是不可能发生的。这样的事件称为**不可能事件**，记作 $\varnothing$，即 $F=\varnothing$。而事件 E 则由所有基本事件组合而成，在给定条件下，每进行一次试验它都必然发生。这样的事件称为**必然事件**，记作 Ω，即 $E=\Omega$。

必然事件与不可能事件显然都是确定性的，它们不是随机事件。但为了便于讨论，把它们作为随机事件的极端情形予以统一处理。

例 2　将一枚均匀硬币掷 3 次，观察正面出现的次数。

因为 $B_i=\{$正面出现 i 次$\}(i=0,1,2,3)$ 等都是基本事件，有 $C=\{$正面出现偶数次$\}=\{B_0,B_2\}$，$D=\{$正面出现奇数次$\}=\{B_1,B_3\}$ 等都是复合事件。而 $E=\{$正面出现次数 $\leqslant 3\}$，$F=\{$正面出现次数 $>3\}$ 则分别为必然事件和不可能事件，即 $E=\Omega$，$F=\varnothing$。

1.1.2　样本空间与事件的集合表示

为了研究事件间的关系及运算，用集合来表示事件是方便的。为此先给出样本空间的概念。

一个试验中的直接结果称为**样本点**，由全体样本点构成的集合称作**样本空间**。由于在给定条件下，试验的所有结果是已知的，因而样本点及相应的样本空间也是明确的。

有了样本点及样本空间的概念后，随机事件和基本事件就可以用集合表示了。随机事件可看作是样本点构成的集合，是样本空间的子集；而基本事件是仅由样本点构成的单点集；样本空间是由全体样本点（基本事件）构成的集合，作为事件来看，它在一次试验中是必定要发生的，即为必然事件，所以样本空间亦记为 Ω，它相当于集合论中的全集；不可能事件不包含任何基本事件，因而不包含任何样本点，相当于集合论中的空集。

在例 1 中，样本点有 10 个，即 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$，样本空间 $\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_{10}\}$。

在例 2 中，样本空间 $\Omega=\{B_0,B_1,B_2,B_3\}$。

例 3　将一枚均匀硬币掷 3 次，观察正面和反面出现的情况。则基本事件有

$$A_1=\{正,正,正\},\quad A_2=\{正,正,反\},\quad A_3=\{正,反,正\}$$
$$A_4=\{反,正,正\},\quad A_5=\{正,反,反\},\quad A_6=\{反,正,反\}$$
$$A_7=\{反,反,正\},\quad A_8=\{反,反,反\}$$

因此样本空间 $\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_8\}$。

显然例 2、例 3 的样本空间有差异，从而发现样本空间的元素（样本点）是由试验的目的所确定的。如例 2、例 3 试验的条件是相同的，都是将一枚硬币掷 3 次，但由于试验的目的不同，其样本空间也不同。

上述样本空间都是有限的，从而较简单。当然，样本空间有时也比较复杂。

例 4　记录某寻呼台单位时间内接到的寻呼次数。

由于在具体试验中很难给出一个寻呼次数的上限，故可认为接到寻呼的可能次数是无限的，于是试验中的基本事件为

$$A_i=\{单位时间接到寻呼次数为 i 次\}\quad (i=0,1,2,\cdots)$$

而样本空间为 $\Omega=\{A_1,A_2,\cdots\}$。此处 Ω 包含无限可列个基本事件。

例 5 记录某厂生产的电视机的寿命。

基本事件为 $A_t = \{t | 0 < t < +\infty\}$，样本空间为 $\Omega = \{A_t | 0 < t < +\infty\}$。此处 Ω 包含无限不可列个基本事件。

将事件表示成由样本点组成的集合，就可以将事件间的关系及运算归结为集合间的关系及运算，这样我们就可以运用集合论的有关理论和方法来研究事件了。

1.1.3 事件的关系及运算

在某个问题的研究中，我们讨论的往往不只是一个事件，而是有许多事件，它们各有特点，彼此之间又有一定的联系。为了用较简单的事件表示较复杂的事件，下面讨论事件之间的几种主要关系以及作用于事件上的运算。

1.包含关系

如果事件 A 发生导致事件 B 发生，则称 B 包含 A 或称 A 包含在 B 中，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。B 包含 A 意即属于 A 的基本事件一定也属于 B（如图 1－1 所示）。

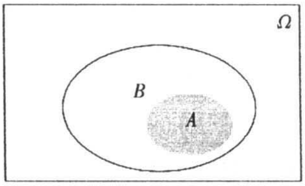

图 1－1

显然，对任一事件 A，有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$。

2.相等关系

如果 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$。在概率论中，彼此相等的事件可以互相替换。事实上，它们所含基本事件完全相同。

3.事件的和（事件的并）

“事件 A 与 B 至少有一个发生（A 或 B）”是一个事件，称为 A 与 B 的和，记为 $A \cup B$（或 $A + B$）。和事件 $A \cup B$ 是由 A 与 B 中的所有基本事件构成的（如图 1－2 所示）。

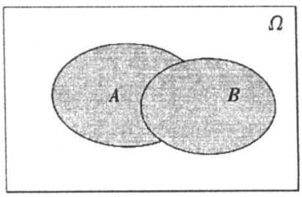

图 1－2

对任一事件 A，有

$$A \cup A = A, \quad A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup \varnothing = A$$

事件和的概念可推广到任意有限个或可列无限多个事件和的情形，如可列无限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生所构成的事件，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$。

4. 事件的积（事件的交）

"事件 A 与 B 同时发生（A 且 B）"是一个事件，称为 A 与 B 的积，记为 AB（或 $A \cap B$）。事件的积 AB 是由 A，B 中公共的基本事件所构成（如图 1 - 3 所示）。

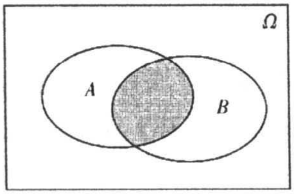

图 1 - 3

对任一事件 A，有

$$AA = A, \quad A\Omega = A, \quad A\varnothing = \varnothing$$

事件积的概念同样可推广到任意有限个或可列无限多个事件的情形。如 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生的事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$。

5. 事件的差

"事件 A 发生而 B 不发生"是一个事件，称为 A 与 B 的差，记为 $A - B$（或 $A\bar{B}$）。差 $A - B$ 由属于 A 但不属于 B 的基本事件所构成（如图 1 - 4 所示）。

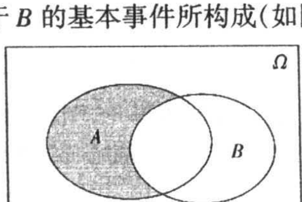

图 1 - 4

6. 互斥事件

如果事件 A 和 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 是互斥事件或称 A 与

B 是互不相容事件，两事件不互斥称为相容。互斥事件没有公共的基本事件（如图 1－5 所示）。

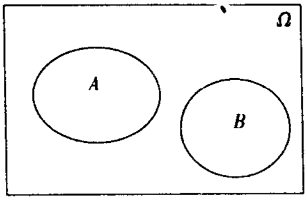

图 1－5

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互斥，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的。可用下式表示：

$$A_iA_j = \varnothing \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

7. **对立事件**

若事件 A 与 B 互斥，又 A 与 B 必发生其一，即 $AB = \varnothing, A \cup B = \Omega$，则称 B 是 A 的对立事件（逆事件），或称 A 是 B 的对立事件。通常 A 的对立事件（逆事件）记为 $\bar{A}$，即 $B = \bar{A}$。从而 $A\bar{A} = \varnothing, A \cup \bar{A} = \Omega$。互为对立的两事件没有公共的基本事件，且它们所含的基本事件充满样本空间（如图 1－6 所示）。

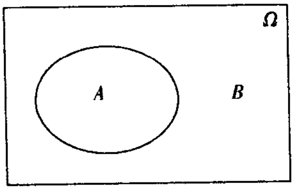

图 1－6

8. **互斥完备事件组**

若 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组。又若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个互斥完备事件组，即事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足

(1) $A_iA_j = \varnothing \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$。

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$。

此时亦称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成样本空间 Ω 的一个有限划分（如图 1－7 所示）。

若 $A_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是一组可列无限多个事件，且满足

(1) $A_iA_j = \varnothing \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots)$。

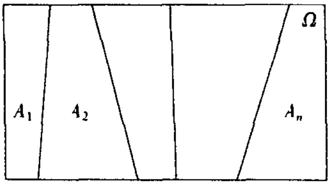

图 1－7

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$。

则称 $A_1, A_2, \cdots$ 是 Ω 的一个可列无限划分。

容易证明，事件的运算满足如下的运算律：

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA \tag{1.1}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A(BC) = (AB)C \tag{1.2}$$

$$A(B \cup C) = AB \cup AC \tag{1.3}$$

$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C) \tag{1.4}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \tag{1.5}$$

此外还有

$$AB \subset A \subset A \cup B, \quad AB \subset B \subset A \cup B \tag{1.6}$$

若 $A \supset B$，则

$$AB = B, \quad A \cup B = A \tag{1.7}$$

例 6　求证：(1) $A = AB \cup A\bar{B}$；(2) $A \cup B = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$。

证　(1) $A = A\Omega = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$；

(2) $A \cup B = A\Omega \cup B\Omega = A(B \cup \bar{B}) \cup B(A \cup \bar{A}) = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB$。

显然(1)右端是两个互斥事件的和，这表明任一事件均可“分解”为两个互斥事件的和；(2)则把事件 $A \cup B$“分解”为两两互斥的 3 个事件的和(如图 1－8 所示)。这种把 1 个事件“分解”成若干两两互斥事件和的过程，称为事件的互斥分解。

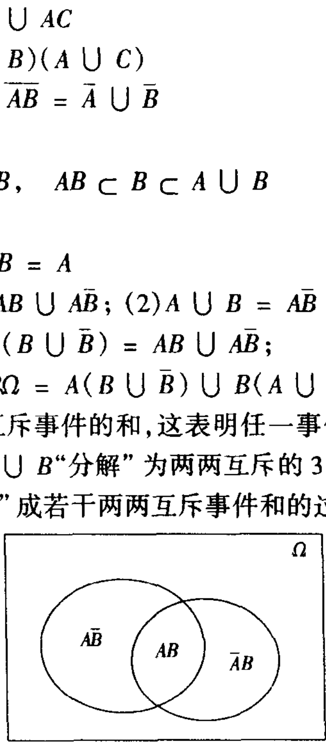

图 1－8

类似地，可证 $A \cup B = A \cup \bar{A}B$ 或 $A \cup B = A\bar{B} \cup B$。由此可见，同一事件的互斥分解式是不唯一的。

例 7　为打击走私活动，海关对进港船只任抽 3 只进行检查。设

$$A_i = \{抽查的第\ i\ 只船为走私船\} \quad (i = 1,2,3)$$

试用 A_1, A_2, A_3 来表示以下各事件：

(1) 第 1 只船为走私船；　(2) 只有 1 只走私船；

(3) 至少有 1 只走私船；　(4) 3 只船都不是走私船；

(5) 3 只船都是走私船；　(6) 至多 2 只走私船。

解　(1) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 或 $A_1 - A_2 - A_3$；　(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；　(4) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；

(5) $A_1A_2A_3$；　(6) $\overline{A_1A_2A_3}$。

1.2　事件的概率

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生，具有偶然性。但在大量重复试验中，发生可能性的大小是客观存在的，有些事件发生的可能性大些，有些则小些。在实践中，人们常常希望知道某些事件发生的可能性究竟有多大。例如，在三峡建大坝，就要知道三峡地区长江年最高水位超历史记录这一事件发生的可能性有多大，以便合理地设计坝高；又如知道某寻呼台 24 小时内各个时段接到寻呼次数的情况，人们就可以合理的配置设备和安排寻呼人员等。我们将刻画事件 A 发生可能性大小的数量指标称作事件 A 发生的**概率**，并用 $P(A)$ 表示。

对于给定的事件 A，客观上都存在概率 $P(A)$，怎样才能获得 $P(A)$ 的数值呢？在现实生活中，人们常常利用频率获知事件发生的可能性大小。为此，我们首先引入频率的概念，进而给出表征事件概率的各种定义。

1.2.1　概率的统计定义

定义 1　在相同的条件下，重复进行的 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f(A)$。

由定义，易见频率具有下述性质：

(1) $0 \leqslant f(A) \leqslant 1$；

(2) $f(\varnothing) = 0, f(\Omega) = 1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥，则

$$f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小反映 A 发生的频繁程度。若 A 发生的可能性较大，那么相应的频率也较大，反之，则较小。从这个意义上说，频率在一定程度上刻画了事件发生的可能性大小，那么，能否把频率

作为事件概率的数量刻画呢?先看下例。

例 1　我们用计算机模拟掷硬币的试验,考察正面和反面出现的情况。具体做法是,首先由计算机产生(0,1)区间内的随机数 R,若 $0 < R < 0.5$,则认为是正面朝上,否则反面朝上。模拟掷币10次,100次,1 000次,10 000次,各做6遍得下表。其中 n 表示试验次数,n_A 表示正面朝上的次数,$f(A)$ 表示正面朝上的频率。

次数 序号	$n=10$		$n=100$		$n=1\,000$		$n=10\,000$	
	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$	n_A	$f(A)$
1	3	0.3	57	0.57	484	0.484	5 022	0.502 2
2	2	0.2	52	0.52	514	0.514	5 040	0.504 0
3	6	0.6	47	0.47	514	0.514	4 971	0.497 1
4	8	0.8	46	0.46	500	0.500	5 081	0.508 1
5	6	0.6	51	0.51	522	0.522	4 977	0.497 7
6	3	0.3	55	0.55	485	0.485	5 057	0.505 7

试验表明:(1) 频率具有随机波动性,对于同样的试验次数 n,所得的 $f(A)$ 不尽相同;(2) 试验次数少时,频率 $f(A)$ 随机波动的幅度较大,但随着试验次数的增加,频率 $f(A)$ 的波动性逐渐趋弱而呈现出稳定性,大致上在 0.5 附近作微小摆动并逐渐稳定于 0.5。

上例表明,频率 $f(A)$ 随试验次数 n 的改变而改变,因此用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的。但当 n 逐渐增大时,频率 $f(A)$ 逐渐稳定于某个常数,这种"频率的稳定性"是不以人的意志为转移的,它揭示了隐藏在随机现象中的统计规律性。由此我们给出概率的统计定义。

定义 2　在相同条件下重复作 n 次试验,当 n 充分大时,事件 A 的频率 $f(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动,且一般地说来,随着试验次数 n 的增多,这种摆动的幅度越来越小,则称事件 A 有概率,常数 p 就是事件 A 发生的概率。即

$$P(A) = p \tag{2.1}$$

这样给出的概率称为统计概率。如在例 1 中,设 $A=\{正面朝上\}$,则 $P(A)=0.5$。

既然统计概率是频率的稳定值,则不难推出概率也应有如下 3 个基本性质:

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(2) $P(\emptyset)=0, P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

需要指出的是,概率的统计定义的重要性不仅在于它提供了一种定义概率的

方法，更重要的是提供了一种估计概率的方法。由于频率具有稳定性，在实际工作中，往往把大量试验中得到的频率，作为概率的近似值，如人口的抽样调查，产品的质量检验等工作中就是这样做的。另外，它同时也为检验理论是否正确提供了一种判别的方法。这类问题属于数理统计学的一个重要分支 —— 假设检验，将在本书第 8 章讨论。

概率的统计定义是在大量重复试验的基础上，汇总统计资料而给出的，它反映了概率的统计性质。但在实际中很难得到事件的准确概率，也不便于计算。为此，下面介绍概率的另一个定义 —— 概率的古典定义，根据它可以方便地计算出一大类问题的概率。

1.2.2 概率的古典定义

在某些试验中，试验的所有基本事件总数是有限的，并且每个基本事件发生的可能性是相同的。如在例 1 的掷硬币试验中，我们关心的是"正面朝上"或"反面朝上"的两个基本事件。由于硬币的匀称性，我们没理由认为"正面朝上"的可能性比"反面朝上"的可能性更大或更小，故认为它们出现的可能性是相同的，就是说它们具有等可能性。

这样的情况在实际问题中还有很多。为此，我们引进概率的古典定义。

定义 3 若试验满足

(1) 试验的所有可能结果只有有限个；

(2) 每个基本事件在试验中具有等可能性。

则称该试验模型为古典概型，而满足(1)、(2) 的事件组称为等概事件组。

若等概事件组中基本事件的总数(即样本空间包含的基本事件数) 为 n，事件 A 包含其中的 m 个，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{2.2}$$

这就是说，在古典概型下，任一事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件个数(有利于 }A\text{ 的基本事件个数)}}{\text{样本空间包含基本事件总数}}$$

由式(2.2) 给出的概率称为**古典概率**。

按照这个定义，在 1.1 节的例 1，有

$$P(D)=\frac{4}{10}=0.4,\quad P(B)=\frac{6}{10}=0.6$$

但我们不能直接套用式(2.2) 计算 1.1 节例 2 中的事件 C、D 的概率。因其样本空间中的各基本事件不是等可能的。

例 2(摸球问题) 袋中 10 个球，其中 3 个红的，7 个白的，现从中抽取 3 球，每次任取 1 球，试就下列情况下分别求所得 3 球都是白球的概率。