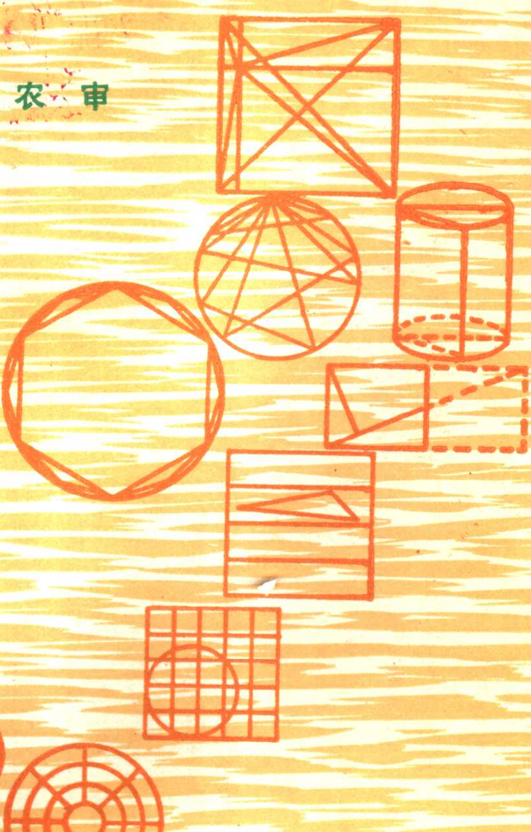
曾晓新 著 麦雨农 审



中学数学的思维与解题方法

科学技术文献出版社重庆分社

中学数学的思维与解题方法

曾晓新　　著

麦雨农　　审

科学技术文献出版社重庆分社

封面设计：陈正杰

中学数学的思维与解题方法

曾晓新 著 麦雨农 审

科学技术文献出版社重庆分社 出 版

重庆市市中区胜利路91号

新 华 书 店 重 庆 发 行 所 发 行

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂 印 刷

开本：787×1092毫米1/32 印张：10.5 字数：23万

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷

科技新书目：103—256 印数：29000

书号：13176·119 定价：1.60元

序

学习和工作都应当讲求方法。方法对头，效率就高，效果就好，就可能事半功倍；方法不对头，往往事倍功半，还可能“力尽关山未解围”。

近年来，国内陆续出版了好些属于或涉及数学方法论范畴的论著和译著。例如，《数学方法论选讲》(徐利治)、《怎样解题》和《数学的发现—对解题的理解、研究和讲授》(G. Polya)、《古今数学思想》(M.Kline)等等，都写得很好，极富教益，给习题解答满天飞的数学苗圃送来一阵阵清新的东风。可惜的是，数量还不够多，发行量也太少，供不应求，而专为高中程度的青少年编写的更寥若晨星。有鉴于此，曾晓新同志根据他多年来学习和工作的经验与体会，写出这一本小册子，献给爱好数学的青少年。

这本小册子的主要特点有：

1.着重在教育思想上的所谓“发现法”或“发明的艺术”，只选讲一些著者认为对青少年最富于启发性的传统方法和新兴方法，旨在让读者察一反三，触类旁通，以利才智的开拓。

2.举例限于高中程度青少年的知识水平和智力水平，但深度和广度稍有添加，意在温故知新，和开拓眼界、活跃思想。

3.论述详略得当。对于可拓性或可塑性的观点和思想方法，详论细析，讲深讲透；对于示范性的解证过程也采用“慢镜头”的手法来显示，以便借鉴。也就是，该详则详，可略就略，甚或“点到即止”，让读者自己动脑动手，进行“加

工”，以期帮助和促进读者培养发展自学与治学的能力和习惯。

4.每章附有数量适当、难度适中的习题，对于难度稍大的，还给出一定的提示，其用意也在于智力的开拓和自学能力的培养。

这本小册子虽然只是数学方法论的一个初步导引，但可以期望读者由此获得一定的裨益，并且提高对方法论这门极为重要的学科的兴趣。

麦雨农　1984年9月于桂林广西师范大学

前　言

在科学技术迅猛发展、人类知识日新月异的今天，各方面的专家都普遍认为：人们在学习上应该改变过去那种以学知识为主的传统做法，而把大部分时间和精力用于学习科学的思维规律和方法论上。

本书试图通过对一批典型数学问题解答过程的详细剖析，深入浅出地介绍一些数学上常用的思维方法与解题方法，为读者提供这方面比较通俗而又比较全面的基本材料。本书不追求高难度和复杂的技巧，不受正规解题格式的束缚，着重从方法论的角度分析解题的策略，并尽可能使读者看清解题过程中的思维活动。作者真诚地期望每个读者都能通过阅读本书而有所收获。

广西数学会理事长、广西师范大学数学系教授麦雨农先生，对本书的编写给予了极大的关心和帮助。麦教授在百忙中仔细地审阅了原稿，指导作者逐字逐句地推敲，很多地方还亲自动手做了修改。作者谨在此表示衷心的感谢。广西数学会秘书长、广西大学数学系袁绍唐老师、以及数学博士、中国科技大学数学系单墫老师，也对本书的编写提出了不少建设性的意见和建议，作者一并在此表示谢意。

曾晓新

1984年9月于桂林

目 录

第一篇

解题过程中的思维活动

第一章 概 述

为了掌握数学上常用的思维方法与解题方法，我们必须对解题过程中人们的思维活动有一个最粗浅的基本了解。现在，就请读者与作者一起来解决如下的两个数学问题，亲身体验一下解题过程中的思维活动。希望读者也积极地开动自已的脑筋，不要只是等着看作者分析的结果。

〔**例1**〕 设有同样多的A液与B液，分别装在甲、乙两个杯子中。把甲杯中一定量的A液注入乙杯的B液中，并混合均匀；然后再从乙杯中倒回相同量的混合液到甲杯中，与甲杯所剩下的A液混合均匀。此时测得甲杯中A液与B液的比为4:1，问乙杯中所含B液的百分比是多少？

看清了题目，懂得了它的意思之后，很自然地我们认为它属于我们比较熟悉的列方程解应用题中"浓度配比"类型的问题。由于我们多少有一点解"浓度配比"应用题的经验，知道解这类题的一般步骤，因而感到对这个问题的解决有了一定的把握。

即然要列方程解应用题，当然我们必须了解题目所给的条件中，已知是什么，未知是什么。

已知是什么呢？

(1)有两种不同的液体，A液与B液。

有两个不同的杯子，甲杯与乙杯；

A液与B液分别装在甲、乙两个杯中；

A液与B液的份量同样多。

这是问题的初始状态。其中最使我们感兴趣的是“同样多”这个条件。虽然我们并不知道这个“同样多”究竟是多少，我们还是把它做为一个重要的已知条件。因为，“同样多”在数学上意味着一个等量关系，往往可以根据它列出有关的代数式或者方程，还可以根据它用同一个字母来表示数量上相同而性质上不同的几个未知数。

(2)从甲杯中倒入了一定量的A液进入乙杯混合均匀。

又从乙杯倒回了相同量的混合液进入甲杯混合均匀。

这是问题发生变化的中间状态。其中的“一定量”与“相同量”之间又存在一个等量关系，也是值得我们特别注意的一个已知条件。

(3)最后，甲杯中A液与B液之比为4:1。

这是问题的终了状态。其中的4:1是确定题目所要求的未知数的最重要的数据。

未知是什么呢？

(1)我们只知道开始时甲、乙两杯中的A液与B液同样多，但并不知道究竟有多少。这“究竟有多少”是未知的，设为u升。

结合已知条件(1)，我们知道：开始时甲杯装着A液u升，乙杯装着B液u升。

(2)从甲杯倒入乙杯以及后来又从乙杯倒回甲杯的同样多的那一定量，我们也不知道到底多少，设为v升。

(3)题目本身所要求的未知数——终了时乙杯中所含B液

的百分比，设为x。这是我们应特别注意的未知数。

进一步的工作，就是要找出u、v、x之间以及它们与已知数 4:1 之间的关系，并将这些关系转译成相应的代数式或者方程。注意：u、v、x 虽然是未知数，但在列代数式或者方程的时候，应该暂时把它们当做已知数来看待，以减少由它们的不确定性所引起的困难和麻烦。

题目中各种量的变化是从甲杯中倒出v升A液进入装有B液的乙杯中开始的。我们的分析与转译工作也就从这里开始。此时，甲杯中还剩$u-v$升A液；乙杯由于倒进了v升A液，从原来的u升B液变成了$u+v$升混合液，其中B液所占的百分比为$\frac{u}{u+v}$。

再从乙杯倒回v升混合液入甲杯，甲杯就由所剩的$u-v$升A液变成了u升混合液，其中所含的B液全是从乙杯倒回甲杯的混合液中来的，容易算出其中B液的含量为$\frac{uv}{u+v}$；而甲杯中除了B液就是A液，故此时甲杯中A液的含量为$u-\frac{uv}{u+v}=\frac{u^2}{u+v}$。

于是，混合后甲杯中A液与B液之比为$\frac{u^2}{u+v}:\frac{uv}{u+v}=\frac{u}{v}$。又由已知条件(3)知这个比是4:1。由此可列出联系着两个未知数u与v的方程$\frac{u}{v}=\frac{4}{1}$，即$\frac{u}{v}=4$。

上述方程$\frac{u}{v}=4$中，我们真正要求的未知数x并未出现，

因而至少我们还需要一个含有x的方程。x是什么？x是混合终了时乙杯中B液所占的百分比。这个百分比由什么条件所决定呢？是由一开始从甲杯倒出一定量的A液进入乙杯的B液就确定下来了，虽然后来又从乙杯倒回了同样多的混合液入甲杯，但这并不影响乙杯中B液所占的百分比。上面我们已经知道当乙杯由u升B液倒入v升A液而成为$u+v$升混合液时，其中B液所占的百分比为$\frac{u}{u+v}$。由此，我们又得到联系着u、v、x三个未知数的第二个方程$\frac{u}{u+v}=x$。

题目所给的条件至此已全部用完，不可能再得到什么实质上的新方程了。因此我们把所得的两个方程并列成一个方程组

$$\begin{cases}\dfrac{u}{v}=4\\[2ex]\dfrac{u}{u+v}=x。\end{cases}$$

转译工作到此结束，再下一步的工作，也就是最后的工作，是要从所得的方程组把未知数解出来。

观察所得的方程组，这个方程组含有三个未知数u、v、x，却只有两个独立的方程，能保证我们将u、v、x全解出来吗？当然不可能。回过头去再寻找新方程？也不可能。那么，该怎么办？

两个独立的方程虽不足以解出三个未知数，但却能解出两个未知数。能不能使原方程组中的未知数减少一个呢？减少的当然不能是x，那么是u还是v？为什么我们想到要把u或v从方程组中去掉呢？因为u与v都不是我们所直接要求的未

知数。既然如此，何不把u与v合起来看做一个未知数呢？把u与v合起来看做一个未知数，原方程组中的三个未知数就减为两个，岂不可解了吗？怎样才能把u与v合起来看做一个未知数呢？继续观察所得方程组的特点，我们发现，最好是把第一个方程中的$\frac{u}{v}$看做是一个未知数。这样，只要把第二个方程略加变形成为

$$\frac{\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}+1}=x,$$

马上就可以把原方程组转化成只含两个未知数的方程组（令$\frac{u}{v}=w$）：

$$\begin{cases} w=4 \\ \dfrac{w}{w+1}=x。\end{cases}$$

由此方程组很快可以解得$x=\frac{4}{5}=80\%$。

即所求乙杯中B液所占的百分比为80%。

象本例这样，知道了其类型就可以比较有把握地知道其解题大致步骤的数学问题，称为常规问题。常规问题解题过程中思维活动的基本环节如图1.1所示。

（为了帮助我们分析问题，并促使问题的转化，在解题过程中我们引进了辅助未知数u、v、w。尽管u、v、w并不是题目本身所直接要求的未知数，但是它们对于沟通已知与

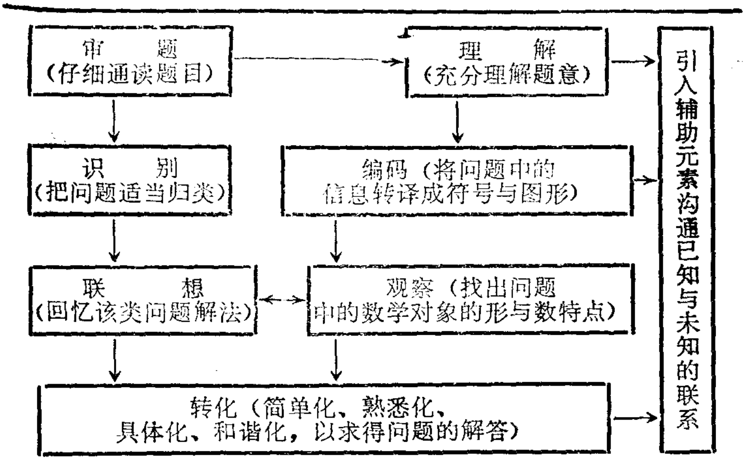


图1.1

未知之间的联系起了极为重要的作用。这种引进辅助元素的办法也是解题时所常采用的手段。）

常规问题虽然总可以按步就班地获得解答，但是这种按步就班的解题过程并不一定就是最优的。对于本例，完全可以找到一种无需列方程的简捷解法，是兴趣的读者不妨试试。

〔**例2**〕从m个不同的元素中，每次取出n个元素（不限于$n\leqslant m$），元素可以重复选取，且不管顺序地合成一组，叫做从m个元素中每次取出n个元素的可重复组合。组合数记为H_m^n。求用m和n来表达H_m^n的一般公式。

首先我们得弄清题目的意思(即审题)。审题后我们发现，就类型来说，它是一个要求某个表达式的求解题（识别），但我们不知道有什么固定的解题步骤可循。

眼下我们只知道要用m与n去表达H_m^n，但究竟怎样才能

求出H_m^n的表达式，我们一无所知，感到无从下手。象本例这样，虽然知道了问题的类型，却不知道具体解题步骤的数学问题，称为非常规问题。解决非常规问题，通常只能探索式地摸清解题途径。当然，我们所掌握的方法越多、经验越丰富，探索时的盲目性就越小。

由于我们对问题本身十分生疏，一下子要考虑从m个元素中每次取出n个元素的可重复组合就显得过于复杂和抽象。能不能先考虑一种简单而又具体的情形呢？比如说，从四个不同的元素中每次各取出一、二、三、…个元素的可重复组合。这对我们来说可能并不十分困难，就让我们来试试吧！

把四个不同的元素分别编号为1、2、3、4，就用它们的号数来分别代表这些元素。用小括号内填上数字来分别表示某个特定的组合，例如(13)代表从四个不同的元素中，取出1号与3号这两个元素所组成的一个组合。当然(13)与(31)应该看做是同一个组合。通过具体地选取和搭配，我们得到如下结果：

由(1)、(2)、(3)、(4)知$H_4^1=4$；

由(11)、(12)、(13)、(14)、(22)、(23)、(24)、(33)、(34)、(44)知$H_4^2=10$；

由(111)、(112)、(113)、(114)、(122)、(123)、(124)、(133)、(134)、(144)、(222)、(223)、(224)、(233)、(234)、(244)、(333)、(334)、(344)、(444)知$H_4^3=20$；

类似地可以得到$H_4^4=35$，$H_4^5=56$，…。由于组合情况太多，就不在此一一列举了。暂时先考虑到H_4^5为止。

从4、10、20、35、56这些数字来看，似乎还看不出有什么规律。我们很自然地要在记忆中搜寻与面临的问题相类似

的、有联系的问题，很快就会想到不重复组合。既然可重复组合与不重复组合都是组合，它们之间应该有某种相似与联系。稍加比较就可以看出：可重复组合包含了不重复组合，可以看做是在不重复组合的基础上产生的。不重复组合是我们所熟悉的、比可重复组合要简单的问题（从m个不同的元素中每次不重复地取出n个元素的组合数 $C_m^n=\dfrac{m!}{n!\ (m-n)!}$），能不能把可重复组合问题转化为不重复组合问题，从而求得问题的解答呢？让我们通过实例再来试试！

每次只取出一个元素时，无所谓重复与不重复，故$H_4^1=C_4^1$。

每次取出两个元素时，情况有所不同了，出现了(11)、(22)、(33)、(44)这四个具有重复元素的组合，其余的组合都是不重复的。要想把可重复组合问题转化为不重复组合问题，就得想办法把(11)、(22)、(33)、(44)这些重复元素的组合变成不重复元素的组合。怎么变呢？我们想，构成这些组合的元素之所以重复，是因为每个组合中重复的元素对我们来说完全是平等的、无差异的。比如(11)中两个元素都是1，(22)中两个元素都是2。要是能够造成它们之间的差异，把它们区别开来，也就无所谓重复了。比如(11)这个组合中的两个元素1，我们不把它们看做是同时取出的，而是有一个先后次序，先取出一个1，再取出一个1。先取出的1仍然称为1，而后取出来的1改称为2，这样(11)就变成了(12)，重复的元素也就不重复了。同样的，(22)这个组合中的两个元素2，前面一个2看做是先取出来的，仍称为2；后面一个2看做是后取出来的，改称为3；(22)就变成了(23)，也就不重复了。按这样考虑，我们得到如下变换

$$\begin{array}{cccc}(11) & (22) & (33) & (44)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ (12) & (23) & (34) & (45)\end{array}$$

容易看出，这个变换相当于把各元素原来的号码依次加上0和1。为了保持变换后总组合数不变，H_4^2中剩下的那些原来不含重复元素的组合，当然也应该进行同样的变换。H_4^2中的全体组合经变换后得到

(12)、(13)、(14)、(15)、(23)、(24)、(25)、(34)、(35)、(45)恰好是从5个元素中每次取出两个元素的不重复组合的全体，故$H_4^2=C_5^2$。

对H_4^3采用同样的思路(将可重复组合转化为不重复组合)和类似的方法（把原来每个组合中各元素的号码按从小到大的顺序排列，再依次加上0、1、2)，立即可以得到$H_4^3=C_6^3$。

现在我们终于看出一点规律来了：$H_4^2=C_5^2=C_{4+1}^2=C_{4+2-1}^2$，$H_4^3=C_6^3=C_{4+2}^3=C_{4+3-1}^3$，而$H_4^1=C_4^1$也可以看做是$H_4^1=C_{4+1-1}^1$。我们猜测，对于一般的$m$和$n$，应有$H_m^n=C_{m+n-1}^n$。经用$H_4^4=35=C_7^4$及$H_4^5=56=C_8^5$验证，我们更相信猜测$H_m^n=C_{m+n-1}^n$是对的。

余下的工作是如何证实以上猜测的正确。从这一步起，原来的求解题开始变成了求证题。

不妨用（H_m^n）表示从m个不同的元素中每次取出n个元素的可重复组合的全体所组成的集合；（C_{m+n-1}^n）表示从$m+n-1$个不同的元素中每次取出n个元素的不重复组合的全体所组成的集合。要证$H_m^n=C_{m+n-1}^n$，也就是要证集合（H_m^n）与（C_{m+n-1}^n）具有同样多的元素（注意：这里的“元素”实际上是一个个不同的组合）。要证明两个集合具有同样多的元素的最好的办法，是在两个集合之间建立起一一对应