面向21世纪课程教材学习辅导书

大学基础物理学

第二版

学习指导与习题解答

丁孺牛　罗贤清　王海婴　张文杰　李科敏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材学习辅导书

大学基础物理学

（第二版）

学习指导与习题解答

丁孺牛　罗贤清　王海婴　张文杰　李科敏

高等教育出版社

内容简介

本书是配合华中农业大学王海婴教授主编的面向21世纪教材——《大学基础物理学》(第二版)的学习辅导书。全书的内容按照主教材的章、节、目编排，每章包含基本要求、内容提要、典型例题和习题解答四个部分，为学生学习课程内容，复习和巩固课堂知识提供详细而明确的指导，对于学生学习大学物理有非常好的实用性。

本书适合于选用《大学基础物理学》(第二版)的学校选作教学辅导书，也可供其他读者使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学基础物理学(第二版)学习指导与习题解答/丁孺牛等.—北京:高等教育出版社,2005.11
ISBN 7-04-017804-4

Ⅰ.大...　Ⅱ.丁...　Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第118611号

策划编辑　庞永江　**责任编辑**　庞永江　**封面设计**　于文燕　**责任绘图**　朱　静
版式设计　马静如　**责任校对**　金　辉　**责任印制**　宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年11月第1版
印　　张	15.25	**印　　次**	2005年11月第1次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	19.40元

物料号　17804-00

前　言

本书是为配合全国高等学校教学研究中心所组织的“21世纪中国高等学校农林、医药类专业数理化基础课的创新与实践”课题的研究成果之一，王海婴教授主编的《大学基础物理学》(第二版)编著的学习指导与习题解答.

“大学基础物理学”是生命科学、农、林、工等专业本科学生必修的一门重要基础课，它不仅为后续众多专业课和未来所从事的专业工作提供相关的理论和实践的基础，而且也是学生学习当代前沿科技知识入门的引导，同时它还是对学生进行人文、科学素质教育，培养学生综合能力的一门十分重要的课程.

21世纪我国成功的大学基础物理教学，倡导在课堂教学改革的基础上更多强调学生独立自学，自行组织实验，完成习题演练；课外辅导充分运用多媒体、网络课件等形式构成讲、学、练、演习成一体化的立体教学模式，使学生得以生动活泼地学习物理科学，牢固地掌握各种物理知识.

本书的编写出版正是为了适应21世纪新颖的教学模式的需要，为学生自学、自练、自查提供一个可借鉴的蓝本.

本书的内容按原教材的章、目、编排，每一章都包含以下四个部分.

1. 基本要求　精练地叙述本章对学生提出的必须牢固掌握的基本要求，重点突出，力求加深印象.
2. 内容提要　概述本章的主要内容，包括重要概念、定理、定律、扩展及其应用.
3. 典型例题　展示具有代表性的实例，通过解题，着重告知学生问题的分析方法和解题的思路.
4. 习题解答　提供《大学基础物理学》全书习题的详细解答. 作为引导学生自学、自查的重要参考资料，目的在于提高学生综合分析问题的能力和学习独立思考命题的方法.

本书第一、二、十九章由湖南理工学院李科敏编写；第三至第八章由北京林业大学张文杰编写；第九、十、十四、十五章由华中农业大学丁孺牛编写；第十一至第十三章，第十七章由华中农业大学罗贤清编写；前言及第十六、十八章由华中农业大学王海婴编写，并对第一、二章和第十九章等作了修改；全书由丁孺牛

统稿和校定.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正.

作者

2004年9月

郑重声明

目　　录

第一章　牛顿力学概述

一、基本要求

1. 了解描述运动的三个必要条件:参考系(坐标系)、恰当的物理模型(质点)、初始条件.

2. 掌握用矢量描述运动的方法,即掌握 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的矢量定义式及其在直角坐标系、自然坐标系的表示式.

3. 掌握质点作圆周运动时线量与角量的描述方法.

4. 掌握用微积分处理运动学中的两类问题.

5. 理解相对运动的有关概念和基本计算方法.

6. 掌握牛顿运动定律的内容和适用范围,能用牛顿运动定律解决受力作用下的物体运动问题.

7. 了解在自然界常见的几种力.

二、内容提要

1. 位置矢量　坐标原点指向质点所在位置的有向线段,通常用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在直角坐标系 $Oxyz$ 中

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中,质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 通常是质点运动路程 s 的函数,即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$$

2. 位移　质点的初始位置指向终止位置的有向线段,也就是位置矢量的增量,用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示,即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

在直角坐标系 $Oxyz$ 中

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

位移是矢量,只与质点的始末位置有关,与质点运动的轨迹等因素无关.

3. 速度$\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t$$

式中 $\boldsymbol{e}_t$ 是沿质点运动轨迹的切线方向上的单位矢量.

位移矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度$\boldsymbol{v}$是描述质点运动的状态参量.

4. 加速度 $\boldsymbol{a}$　加速度是描述质点速度变化率的物理量,其定义为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 是沿质点运动轨迹的法线方向的单位矢量,$\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$、$\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$ 分别表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 在轨道切线方向、法线方向的分量,分别称为切向加速度、法向加速度,ρ 是轨道的曲率半径,$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$是质点的速率.

5. 运动方程　质点位置随时间变化的关系式:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

在直角坐标系中有

$$x=x(t)\quad y=y(t)\quad z=z(t)$$

在极坐标系中有

$$r=r(t)\qquad \phi=\phi(t)$$

6. 圆周运动的角量描述

运动学方程(角位置)

$$\theta=\theta(t)$$

角位移

$$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$$

角速度

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

线量与角量的关系为

$$v=r\omega,\quad a_\tau=r\alpha,\quad a_n=r\omega^2$$

7. 运动学中的两类问题

第一类问题:已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$或 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$,求质点运动的速度$\boldsymbol{v}(t)$,加速度 $\boldsymbol{a}(t)$,这类问题主要采用求导数的方法解决.

第二类问题:已知 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$)和 $\boldsymbol{r}_0$(或 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$),$\boldsymbol{v}_0$(或$\boldsymbol{v}_0=v_{0x}\boldsymbol{i}+v_{0y}\boldsymbol{j}+v_{0z}\boldsymbol{k}$),求质点的运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,这类问题主要用积分的办法处理.

8. 相对运动

“绝对量”是相对静系(即相对地面静止的坐标系)而言的物理量(包括“绝对位置矢量”、“绝对位移”、“绝对速度”、“绝对加速度”).

“相对量”是相对动系(该坐标系相对地面是运动的)而言的物理量(包括“相对位置矢量”、“相对位移”、“相对速度”、“相对加速度”).

“牵连量”是动系相对静系而言的物理量,它表示的是两个坐标系之间的关系(“牵连量”包括“牵连位置矢量”、“牵连位移”、“牵连速度”、“牵连加速度”).

对于同类物理量,有:“相对矢量+牵连矢量=绝对矢量”,即

$$\boldsymbol{r}_{\text{绝对}}=\boldsymbol{r}_{\text{相对}}+\boldsymbol{r}_{\text{牵连}}\qquad\Delta\boldsymbol{r}_{\text{绝对}}=\Delta\boldsymbol{r}_{\text{相对}}+\Delta\boldsymbol{r}_{\text{牵连}}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{绝对}}=\boldsymbol{v}_{\text{相对}}+\boldsymbol{v}_{\text{牵连}}\qquad\boldsymbol{a}_{\text{绝对}}=\boldsymbol{a}_{\text{相对}}+\boldsymbol{a}_{\text{牵连}}$$

值得注意的是:上述变换关系只在低速(即 v 远小于光速 c)条件下才成立.此外,如果动系相对静系有转动,上述式子中的加速度变换关系也不成立.也就是说,上述变换式在低速、平动问题中是成立的,由于常见的问题大都属于这种情况,所以,上述变换式很有使用价值.

9. 牛顿运动定律

第一定律:任何物体在不受外力作用时总保持原来的静止状态或匀速直线运动状态.也就是说,物体的运动不需要力来维持,任何物体都有惯性,力是改变物体运动的原因.或者说,力是使物体产生加速度的原因.

第二定律:运动的变化和所加的外力成正比,并且发生在该力所沿的直线上.牛顿第二定律定量地确定了受力物体的加速度和其质量及合外力的关系:

$$F = \sum_i F_i = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

在系统质量不变时,有

$$F = \sum F_i = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中,有

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z$$

在自然坐标系中,有

$$F_t = ma_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

牛顿第一、第二定律仅对惯性系成立,对非惯性系则不成立.

牛顿第三定律:两物体间的相互作用力总是相等的,且指向相反的方向,即

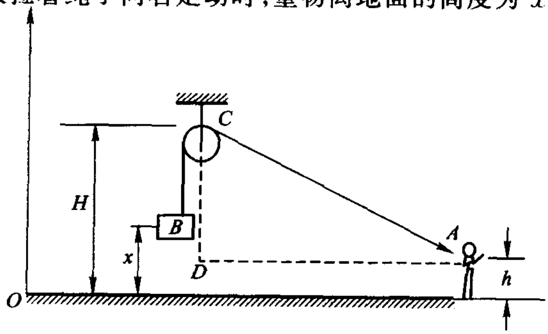
$$F_{12} = -F_{21}$$

用牛顿定律解题的思路:选择研究的物体,分析受力情况(画出受力分析图),选择适当的坐标系,列方程(一般用分量式)求解,进行必要的讨论.

三、典型例题

例 1-1 如例 1-1 图所示,跨过一定滑轮 C 的绳子,某一端挂有重物 B,另一端 A 被人拉着沿水平方向向右作匀速运动,其速度为 $v_0 = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,$A$ 点离地面的高度保持为 $h = 1.5$ m.运动开始时,重物 B 在滑轮 C 的正下方的地面上,绳子 AC 在竖直位置,且 BC 被拉直.滑轮离地面的高度为 $H = 10$ m,滑轮半径可以忽略不计.求:(1) 重物上升的运动方程;(2) 重物 B 在 t 时刻的速度、加速度以及到达滑轮处所需的时间.

解:(1) 设人拉着绳子向右走动时,重物离地面的高度为 x,此时 AC 和 AD



例 1-1 图

的长度都是变量，而且有 $AD=v_0t$；在 $t=0$ 时，AC 与 DC 重合，故有 $CD=H-h$，绳长 $L=H+(H-h)$，经过 t 时间后，有 $AC=L-(H-x)=(H-h)+x$；在△ADC 中，因 $AC^2=AD^2+CD^2$，于是有

$$(H-h+x)^2=(H-h)^2+v_0^2t^2$$

得重物上升的运动方程为

$$x=\sqrt{t^2+8.5^2}-8.5\quad(\text{式中各量均采用 SI 单位}).$$

(2) 要求的速度 v、加速度 a 可通过对运动方程 $x=x(t)$ 求导得到，即有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{\sqrt{t^2+8.5^2}}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{t^2+8.5^2}}-\frac{t^2}{\sqrt{(t^2+8.5^2)^3}}$$

当重物 B 到达 C 点处，$x=H=10$ m，代入运动方程得

$$10=\sqrt{t^2+8.5^2}-8.5$$

重物到达滑轮处所需时间为

$$t=16.4\text{ s}$$

例 1－2　如例 1－2 图所示，劲度系数为 k 的弹簧一端系一质量为 m 的物体，该物体在 $t=0$ 时位于平衡点 $x=0$ 处，其速度为 $v_0>0$. 此后，物体 m 在水平面内运动，不计物体受到的摩擦力和空气阻力时，试求物体 m 的运动速度 v 与时间 t 的关系式.

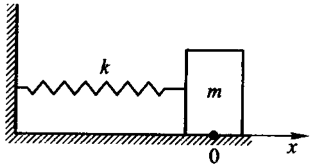
解：在水平方向上物体 m 受到的合外力 $F=-kx$，在水平方向上对物体 m 运用牛顿第二定律得

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x=a(x)$$

而　$$a(x)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot v$$

则有　$$v\mathrm{d}v=a(x)\mathrm{d}x=-\frac{k}{m}x\mathrm{d}x$$

对两边积分得　$$\frac{1}{2}v^2=-\frac{k}{2m}x^2+c_1$$



例 1－2 图

利用初始条件，当 $x=0$ 时，$v=v_0$，得 $c_1=\frac{1}{2}v_0^2$

于是得　$$v^2=-\frac{kx^2}{m}+v_0^2$$

即　$$v=\sqrt{v_0^2+\frac{k}{m}x^2}=v(x)$$

而
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(x)$$

则有
$$\frac{\mathrm{d}x}{v(x)}=\mathrm{d}t$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2\ \frac{k}{m}x^2}}=\mathrm{d}t$$

两边积分得
$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}x\right)=t+c_2$$

利用初始条件,当 $t=0$ 时,$x=0$,得 $c_2=0$

则有
$$\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\left(\frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}x\right)=t$$

即
$$x=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

上式是弹簧振子的振动方程,它是谐振动的一种基本表达式,今后经常要用到.

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,可得
$$v=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

即
$$v=v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

例 1-3 某质量为 m 的物体沿半径为 R 的圆形轨道做角加速度为 α 的转动,且 $\alpha=-k\omega$,k 是常数,ω 是物体绕轨道中心的角速度,已知 $t=0$ 时,物体的角速度 $\omega_0>0$,试求 t 时刻物体加速度的大小.

解:由 $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-k\omega$,则有
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-k\cdot\mathrm{d}t$$

两边积分得
$$\omega=c\cdot\mathrm{e}^{-kt}$$

利用初始条件,当 $t=0$ 时,$\omega=\omega_0$,得 $c=\omega_0$,于是得
$$\omega=\omega_0\mathrm{e}^{-kt}$$

则
$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-k\omega_0\mathrm{e}^{-kt}$$

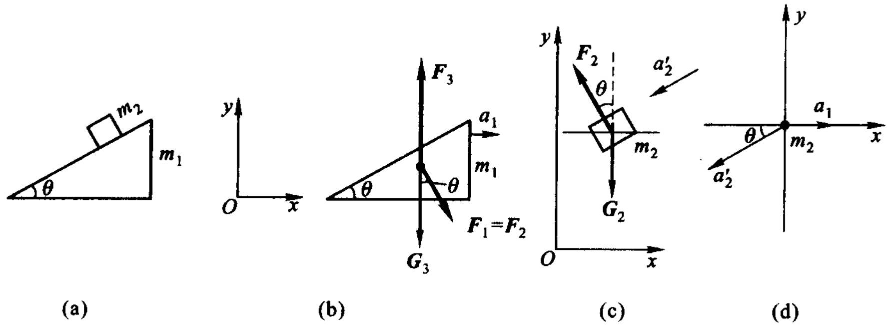
在 t 时刻物体的切向加速度 a_t、法向加速度 a_n 分别为

$$a_t = R\alpha = -k\omega_0 R e^{-kt}$$
$$a_n = R\omega^2 = \omega_0^2 R e^{-2kt}$$

物体在 t 时刻的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \omega_0 R e^{-kt}\sqrt{k^2 + \omega_0^2 e^{-2kt}}$$

例 1－4　如例 1－4 图(a)所示，质量为 m_2 的物体放在质量为 m_1、倾角为 θ 的劈形斜面上，不计摩擦力及空气阻力，当 m_2 从斜面上滑下时，求(1) m_2 相对劈形斜面的加速度；(2) m_2 相对地面的加速度.



例 1－4 图

解：隔离 m_1 和 m_2，分别画出它们的受力图，并在地面上建立坐标系 Oxy，如例 1－4(b)和(c)所示. 当 m_2 沿劈形斜面下滑时，由于不计各种摩擦力和空气的阻力，m_1 会向右加速运动，所以 m_2 既沿斜面加速向下滑动，又随 m_1 一起向右作加速运动. 设 m_1 相对地面向右的加速度为 a_1，m_2 相对 m_1 的加速度为 a_2'(方向沿斜面向下)，如例 1－4 图(d)所示. 于是由相对运动的加速度变换关系可得 m_2 相对地面的绝对加速度 a_2：

$$\boldsymbol{a}_2 = (a_1 - a_2'\cos\theta)\boldsymbol{i} + (-a_2'\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{1}$$

即物体 m_2 相对地面的加速度 $\boldsymbol{a}_2$ 在 x、y 轴上的分量 a_{2x}、a_{2y} 分别是

$$a_{2x} = a_1 - a_2'\cos\theta \tag{2}$$

$$a_{2y} = -a_2'\sin\theta \tag{3}$$

对 m_1 在 x 轴方向上应用牛顿第二定律可得

$$F_1\sin\theta = m_1 a_1 \tag{4}$$

对 m_2 分别在 x、y 轴方向上应用牛顿第二定律可得

$$-F_2\sin\theta = m_2 a_{2x} = m_2(a_1 - a_2'\cos\theta) \tag{5}$$

$$F_2\cos\theta - m_2 g = m_2 a_{2y} = -m_2 a_2'\sin\theta \tag{6}$$

由牛顿第三定律可知　$$F_1 = F_2 \tag{7}$$

由(4)、(5)、(6)、(7)式求得

$$a_1=\frac{m_2 g\sin\theta\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \tag{8}$$

$$a_2'=\frac{(m_1+m_2)g\sin\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta} \tag{9}$$

式中 a_1 是劈形斜面相对地面的加速度，a_2' 是 m_2 相对劈形斜面的加速度，把(8)、(9)式代入(1)式即可得 m_2 相对地面的加速度 a_2 为

$$\boldsymbol{a}_2=-\frac{m_1 g\sin\theta\cos\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}\boldsymbol{i}-\frac{(m_1+m_2)g\sin\theta}{m_1+m_2\sin^2\theta}\boldsymbol{j}$$

注意：对 m_2 在 x、y 轴分别应用牛顿第二定律时，必须采用惯性系，即所用到的加速度 a_{2x} 和 a_{2y} 和一定要相对惯性系(即地面)而言的加速度. 常见的错误是将 a_2' 在 x、y 轴上的分量 a_{2x}'、a_{2y}' 作为 a_{2x}、a_{2y}，这种错误的根源在于把 m_2 相对劈形斜面(这是个非惯性系！)的加速度 a_2' 和 m_2 相对地面(惯性系)的加速度 a_2 混为一谈.

四、习题解答

1.1　试说明下列各组物理量的含义和区别：

(1) Δr 和 $|\Delta\boldsymbol{r}|$　(2) $\Delta|\boldsymbol{r}|$ 和 Δs　(3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 和 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　(4) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ 和 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

答：(1) Δr 表示质点位置矢量长度的增量；$|\Delta\boldsymbol{r}|$ 表示质点位移的大小.

(2) $\Delta|\boldsymbol{r}|$ 表示质点位置矢量长度的增量；Δs 表示质点运动路程的增量.

(3) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 表示质点速度的大小；$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 表示质点位置矢量的长度的变化率.

(4) $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$ 表示质点加速度的大小；$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 表示质点速率的变化率.

1.2　一质点在 Oxy 平面上运动，运动方程为 $x=3t+5$，$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$，式中各量均采用 SI 单位. (1) 以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表示式；(2) 求出 $t=1$ s 和 $t=2$ s 时质点的位置矢量；(3) 计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均速度；(4) 求出质点的速度矢量表示式，计算 $t=4$ s 时质点的速度；(5) 计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度.

解：(1) $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}$

(2) 将 $t=1$ s 和 $t=2$ s 分别代入上式可得质点相应的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}(1)=8\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}(2)=11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$

(3) $$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\boldsymbol{r}(4)-\boldsymbol{r}(0)}{4-0}=\frac{1}{4}[(17\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j})-(5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})]=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$$

(4) $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{v}(4)=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$$

(5) $$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}(4)-\boldsymbol{v}(0)}{4-0}=\frac{1}{4}[(3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})-(3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})]=1\boldsymbol{j}$$

1.3　某质点沿半径为 $R=1$ m 的圆周运动，质点移动的路程 s 与时间 t 的关系是：$s=t+t^3$，s、t 均采用 SI 单位.(1) 求该质点在任一时刻 t 的速度、切向加速度、法向加速度；(2) 求该质点在 t 时刻的角速度、角加速度；(3) $t=1$ s 时该质点的加速度的大小是多少？

解：以下各量均采用 SI 单位：

(1) 速度为 $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1+3t^2$$

切向加速度 $$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t^2$$

法向加速度 $$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(1+3t^2)^2}{1}=9t^4+6t^2+1$$

(2) 角速度 $$\omega=\frac{v}{R}=(1+3t^2)$$

角加速度 $$\alpha=\frac{a_t}{R}=6t^2$$

(3) $t=1$ s时质点的加速度

切向加速度　$a_t=6t^2=6\times1^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

法向加速度　$a_n=9t^4+6t^2+1=(9\times1^4+6\times1^2+1)\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=16\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为　$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{6^2+16^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=17.1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

1.4　某飞轮半径 $R=0.4$ m，自静止开始转动，其角加速度为 $\alpha=0.2\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$，求 $t=2$ s时飞轮边缘上各点的速度、法向加速度、切向加速度和加速度的大小.

解：质点的角速度为　$\omega=\omega_0+\alpha t$

质点的线速度为　$v=\omega R=\omega_0 R+\alpha Rt$

于是，在 $t=2$ s 时，轮边缘的速度为

$$v(2)=(0\times0.4+0.2\times0.4\times2)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=0.16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{0.16^2}{0.4}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=0.064\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

切向加速度为

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega_0 R+\alpha Rt)=\alpha R=0.2\times0.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=0.08\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

所求的加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{0.064^2+0.08^2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\approx0.08\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

1.5 一电子在某电场中的运动方程为(电子在 Oxy 平面内运动)$x=2t$,$y=19-2t^2$.式中各量均采用 SI 单位.(1) 试求电子的轨迹方程;(2) 求出电子在任一时刻 t 的速度和加速度.

解:(1) 从 $x=2t$,可得 $t=\frac{x}{2}$,代入 $y=19-2t^2$ 中,得电子的轨迹方程为

$$y=19-\frac{x^2}{2}$$

(2) 电子在任一时刻的速度$\boldsymbol{v}$,它在两坐标轴上的分量分别是

在 x 轴上 $$v_x=\frac{dx}{dt}=2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

在 y 轴上 $$v_y=\frac{dy}{dt}=-4t\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

则电子在任一时刻 t 的速度为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

电子在任一时刻的加速度为 $\boldsymbol{a}$,它在两坐标轴上的分量分别是

在 x 轴上 $$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0$$

在 y 轴上 $$a_y=\frac{dv_y}{dt}=-4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

故电子在任一时刻 t 的加速度$\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=-4\boldsymbol{j}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

1.6 某质点沿 x 轴运动,其加速度 a 与时间t 的关系为:$a=6t$,a、t 均采用 SI 单位,已知 $t=0$ s 时该质点从坐标原点由静止开始运动,试求:(1) 质点的速度 v 与时间t 的关系式;(2) 质点的位移 x 与时间t 的关系;(3) $t=1$ s 时,该质点的速度、位移各是多少?

解:(1) 由于 $a=a(t)=\frac{dv}{dt}$,则有:

$$v=\int a(t)dt=\int 6t\,dt=3t^2+c_1$$

利用初始条件:当 $t=0$ 时,$v=0$,得 $c_1=0$

则质点的速度 v 与时间t 的关系式为 $v=3t^2$