工农业余中等学校初中课本

# 数学题解

沈阳市工农教育教学研究室编

（三）



辽宁科学技术出版社

# 说　明

本书是按照教育部编写的《工农业余中等学校初中课本》的习题（人民教育出版社1980年版）编写的习题解答。这套书包括《数学题解》三本，《物理题解》一本，《化学题解》一本，共五本。主要供业余学校学员和广大在职青年阅读，也可供全日制初中学生和教师参考。

为了适合工农读者学习，本书力求通俗易懂，解题比较详细，便于自学。一般一道题列出一种常见解法，少数题列出几种解法。

编写这套习题解答的目的，是为了帮助读者掌握解题的分析方法和思考途径，提高运算技巧，加深对基础知识的理解。希望读者应先独立解题，如果不经认真思考，单纯依赖题解，是不利于提高解题能力和掌握基础知识的。

本书编写工作由李官治同志主持，《数学题解》由吴承棣、李贺文、郭全祥、于长盈、高光奇、周有溶等同志编审；《物理题解》由杜谦、廖正德、周恒才等同志编审；《化学题解》由李世贤、朱锡杰、陆颂高等同志编审。在编写过程中，得到有关单位领导和同志们的大力支持，在此，谨致谢意。

沈阳市工农教育教学研究室

一九八一年三月

# 目　　录

# 第十三章　简单的二元二次方程组

## 习题13·1〔第5页〕*

1．已知方程组

$$\begin{cases} x=7-y, & (\text{I}) \\ x^2+y^2=25. & (\text{II}) \end{cases}$$

在下列各组$x$和$y$的值里，哪些是方程（Ⅰ）的解？哪些是方程（Ⅱ）的解？哪些是方程组的解？

$$\begin{cases} x=2, \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4, \\ y=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3, \\ y=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

解：把　$x=2$，　$y=5$　代入方程（Ⅰ），　可知

$\begin{cases} x=2, \\ y=5, \end{cases}$ 适合方程（Ⅰ）．因此，$\begin{cases} x=2, \\ y=5, \end{cases}$ 是方程（Ⅰ）的解．

用同样的方法，可知

---

* 全书习题后括号里的页数为原课本页数。

$$\begin{cases}x=3,\\ y=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,\\ y=3;\end{cases}\quad 及\ \begin{cases}x=5,\\ y=2.\end{cases}$$

都是方程（Ⅰ）的解.

把 $x=3$, $y=4$代入方程（Ⅱ），可知 $\begin{cases}x=3,\\ y=4,\end{cases}$ 适合方程（Ⅱ）. 因此, $\begin{cases}x=3,\\ y=4,\end{cases}$ 是方程（Ⅱ）的解.

用同样的方法可知

$$\begin{cases}x=-4,\\ y=-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=4,\\ y=3;\end{cases}\quad 及\ \begin{cases}x=-3,\\ y=-4.\end{cases}$$

都是方程（Ⅱ）的解.

因为 $\begin{cases}x=3,\\ y=4;\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$ 是方程（Ⅰ）和方程（Ⅱ）的公共解, 所以

$$\begin{cases}x=3,\\ y=4;\end{cases}\quad 及\ \begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$$

是方程组的解.

2. 解下列各方程组:

（1）$\begin{cases}x^2+xy+y^2+x+5y=0, & （Ⅰ）\\ x+2y=0; & （Ⅱ）\end{cases}$

解: 由（Ⅱ）式得 $x=-2y$ （Ⅲ）

将（Ⅲ）代入（Ⅰ）得

$$(-2y)^2+(-2y)\cdot y+y^2+(-2y)+5y=0.$$

上式经整理, 得 $y(y+1)=0$ （Ⅳ）

解方程(Ⅳ)得 $y_1=0$, $y_2=-1$.

将 $y_1=0$ 代入(Ⅲ)得 $x_1=0$.

将 $y_2=-1$ 代入(Ⅲ)得 $x_2=2$.

因此，原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

(2) $\begin{cases}y=2-3x, & (Ⅰ)\\ x^2+2xy+3y^2-3x+1=0; & (Ⅱ)\end{cases}$

解：把(Ⅰ)式代入(Ⅱ)式得

$$x^2+2x(2-3x)+3(2-3x)^2-3x+1=0.$$

此式经整理，得 $22x^2-35x+13=0$ (Ⅲ)

解方程(Ⅲ)得 $x_1=1$, $x_2=\frac{13}{22}$.

将 $x_1=1$ 代入(Ⅰ)得

$$y_1=2-3\times1=-1.$$

将 $x_2=\frac{13}{22}$代入(Ⅰ)得

$$y_2=2-3\times\frac{13}{22}=\frac{5}{22}.$$

原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\frac{13}{22},\\ y_2=\frac{5}{22}.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(x-1)(y-1)=2, & (Ⅰ)\\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1; & (Ⅱ)\end{cases}$

解：用12去乘（Ⅱ）式两端，得

$$2x+3y=12.$$

由此解出 $y=4-\frac{2}{3}x$ （Ⅲ）

将（Ⅲ）式代入（Ⅰ）式

$$(x-1)\left(4-\frac{2}{3}x-1\right)=2.$$

经整理，得 $2x^2-11x+15=0$．解此方程得 $x_1=3$，$x_2=\frac{5}{2}$.

将 $x_1=3$ 代入（Ⅲ）式，得 $y_1=4-\frac{2}{3}\times 3=2$。

将 $x_2=\frac{5}{2}$ 代入（Ⅲ）式，得 $y_2=4-\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{7}{3}$.

原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{5}{2},\\ y_2=\frac{7}{3}.\end{cases}$

（4） $\begin{cases}\frac{x-y}{2}=\frac{x+y}{5}, & (\text{Ⅰ})\\ 2(y+3)=(3x-y)(3y-x). & (\text{Ⅱ})\end{cases}$

解：以10去乘（Ⅰ）式两端，得

$$5(x-y)=2(x+y).$$

去括号，整理后，得 $x=\frac{7}{3}y$. （Ⅲ）

把（Ⅲ）式代入（Ⅱ）式，得

$$2(y+3)=\left(3\times\frac{7}{3}y-y\right)\left(3y-\frac{7}{3}y\right)$$

去括号，整理后，得

$$2y^2-y-3=0$$

解此二次方程得 $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-1$.

将 $y_1=\frac{3}{2}$代入(Ⅱ)式，得

$$x_1=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7}{2}.$$

将 $y_2=-1$代入(Ⅱ)式，得

$$x_2=\frac{7}{3}\cdot(-1)=-\frac{7}{3}.$$

原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=\frac{7}{2},\\ y_1=\frac{3}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\frac{7}{3},\\ y_2=-1.\end{cases}$

3. 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1, & (\text{Ⅰ})\\ 2x+3y=-10; & (\text{Ⅱ})\end{cases}$

解：以$xy$去乘(Ⅰ)式两端，整理后，得

$$xy-2y+3x=0.$$

解方程组 $\begin{cases}xy-2y+3x=0, & (\text{Ⅲ})\\ 2x+3y=-10. & (\text{Ⅳ})\end{cases}$

由(Ⅳ)式得 $x=-\frac{3}{2}y-5$ (Ⅴ)

将(Ⅴ)式代入(Ⅲ)式，得

$$\left(-\frac{3}{2}y-5\right)y-2y+3\left(-\frac{3}{2}y-5\right)=0,$$

即 $3y^2+23y+30=0.$

解此二次方程得 $y_1=-\frac{5}{3}$，$y_2=-6$.

将$y_1=-\frac{5}{3}$代入（Ⅴ）式，

得$x_1=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-5=-\frac{5}{2}$.

将 $y_2=-6$代入（Ⅴ）式，得$x_2=-\frac{3}{2}(-6)-5=4$.

把两组解 $\begin{cases}x_1=-\frac{5}{2},\\ y_1=-\frac{5}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=-6,\end{cases}$ 代入 $xy$，得到的值都不是零，所以它们都是原方程组的解。

（2）$\begin{cases}\frac{2x-5}{x-2}+\frac{2y-3}{y-1}=2, & (\mathrm{I})\\ 3x-4y=1; & (\mathrm{II})\end{cases}$

**解**：以 $(x-2)(y-1)$ 去乘（Ⅰ）式两端，整理后，得

$$2xy-5y-3x=-7.$$

解方程组 $\begin{cases}2xy-5y-3x=-7, & (\mathrm{III})\\ 3x-4y=1. & (\mathrm{IV})\end{cases}$

由（Ⅳ）式得 $x=\frac{4y+1}{3}$, （Ⅴ）

将（Ⅴ）式代入（Ⅲ）式，得

$$2\left(\frac{4y+1}{3}\right)y-5y-3\left(\frac{4y+1}{3}\right)=-7,$$

即 $8y^2-25y+18=0$.

解此二次方程得 $y_1=2$，$y_2=\frac{9}{8}$.

将 $y_1=2$代入（Ⅴ），得 $x_1=3$.

将$y_2=\frac{9}{8}$代入（Ⅴ），得 $x_2=\frac{11}{6}$.

把两组解 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{11}{6},\\y_2=\frac{9}{8},\end{cases}$ 代入$(x-2)(y-1)$

中得的值都不是零，因此，它们都是原方程组的解.

（3）$$\begin{cases}\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1, & \text{(Ⅰ)}\\[2ex]\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y}, & \text{(Ⅱ)}\end{cases}$$

解：（Ⅰ）式两端都乘以 $(x-1)(y+1)$，整理后得

$$xy-5y+6x=10.$$

（Ⅱ）式两端都乘以$(x+3)y$，整理后，得

$$y=\frac{2}{3}(x+3).$$

解方程组 $$\begin{cases}xy-5y+6x=10, & \text{(Ⅲ)}\\[1ex]y=\dfrac{2}{3}(x+3). & \text{(Ⅳ)}\end{cases}$$

将(Ⅳ)式代入(Ⅲ)式，整理后，得

$$x^2+7x-30=0.$$

解之得 $x_1=3$, $x_2=-10$.

将 $x_1=3$ 代入（Ⅳ）得 $y_1=4$,

将 $x_2=-10$代入（Ⅳ）得 $y_2=-\frac{14}{3}$.

把两组解 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-10,\\y_2=-\frac{14}{3}.\end{cases}$ 代入 $(x-1)(y+1)$

和$(x+3)y$中所得的值都不是零，因此它们都是原方程组的解。

(4) $$\begin{cases}\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{y-3}=2, & (\text{I})\\[2ex] \dfrac{4}{x-2}=\dfrac{1}{y-6}. & (\text{II})\end{cases}$$

解：(I)式两端乘以$(x+5)(y-3)$，整理后，得

$$2xy+7y-8x-31=0.$$

(II)式两端乘以$(x-2)(y-6)$，整理后，得

$$x=4y-22.$$

解方程组 $$\begin{cases}2xy+7y-8x-31=0, & (\text{III})\\ x=4y-22. & (\text{IV})\end{cases}$$

将(IV)式代入(III)式，整理后，得

$$8y^2-69y+145=0.$$

解此二次方程得 $y_1=5$，$y_2=3\frac{5}{8}$.

将$y_1=5$代入(IV)式，得$x_1=-2$；将$y_2=3\frac{5}{8}$代入(IV)式，得$x_2=-7\frac{1}{2}$.

把两组解 $\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-7\frac{1}{2},\\ y_2=3\frac{5}{8},\end{cases}$ 代入$(x+5)(y-3)$和$(x-2)(y-6)$中得到的值都不是零，因此它们都是原方程组的解。

4．解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}, & \text{(I)} \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}. & \text{(II)} \end{cases}$

解：令$\dfrac{1}{x}=u$，　$\dfrac{1}{y}=v$，则原方程组就变形为

$$\begin{cases} v+u=\dfrac{3}{2}, & \text{(III)} \\ u^2+v^2=\dfrac{5}{4}. & \text{(IV)} \end{cases}$$

由(III)式得 $v=\dfrac{3}{2}-u$。　(V)

将(V)式代入(IV)式，得

$$u^2+\left(\frac{3}{2}-u\right)^2=\frac{5}{4},$$

即　　$2u^2-3u+1=0$。

解这个二次方程，得 $u_1=1$，　$u_2=\dfrac{1}{2}$。

将$u_1=1$代入(V)式，得$v_1=\dfrac{1}{2}$；将 $u_2=\dfrac{1}{2}$代入(V)式，得 $v_2=1$。即得两组解：

$$\begin{cases} u_1=1, \\ v_1=\dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=\dfrac{1}{2}, \\ v_2=1. \end{cases}$$

利用 $x=\dfrac{1}{u}$、 $y=\dfrac{1}{v}$的关系将上面两组解改写成

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1. \end{cases}$$

即为原方程组的解。

（2）$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}+\dfrac{25}{y^2}=200, & \text{(Ⅰ)} \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=20. & \text{(Ⅱ)} \end{cases}$

解：令 $\dfrac{2}{x}=u$，$\dfrac{5}{y}=v$，则原方程组变形为

$$\begin{cases} u^2+v^2=200, & \text{(Ⅲ)} \\ u+v=20. & \text{(Ⅳ)} \end{cases}$$

由（Ⅳ）式得 $u=20-v$ （Ⅴ）

将（Ⅴ）式代入（Ⅲ）式，得

$$(20-v)^2+v^2=200,$$

即 $$v^2-20v+100=0.$$

解此二次方程，得 $v_1=v_2=10$. 将此值代入（Ⅴ）式，得 $u_1=u_2=10$. 即得

$$\begin{cases} v=10, \\ u=10. \end{cases}$$

根据 $x=\dfrac{2}{u}$、$y=\dfrac{5}{v}$的关系，把上面的解改写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{5}, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

此即为原方程组的解。

5．$k$ 等于什么数值时，下列方程组在实数集有相同的两组解？

（1）$\begin{cases} y = kx + 2, & \text{（Ⅰ）} \\ y^2 - 4x - 2y = -1.^{*} & \text{（Ⅱ）} \end{cases}$

**解**：将（Ⅰ）式代入（Ⅱ）式，得

$$(kx+2)^2 - 4x - 2(kx+2) = -1$$

即 $$k^2x^2 + (2k-4)x + 1 = 0.$$

要使方程组（1）在实数集有相同的两组解，必须使此关于$x$的二次方程有两个相等的实根，即它的根的判别式应为零．因此，我们

令 $$(2k-4)^2 - 4\cdot k^2\cdot 1 = 0.$$

由此得 $16k = 16$， 即 $k = 1$.

（2）$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, & \text{（Ⅰ）} \\ x - y = k. & \text{（Ⅱ）} \end{cases}$

**解**：由（Ⅱ）式得 $x = y + k$ （Ⅲ）

将（Ⅲ）式代入（Ⅰ）式得

$$(y+k)^2 + y^2 = 16.$$

由此得 $$2y^2 + 2ky + (k^2 - 16) = 0.$$

令 $$(2k)^2 - 4\cdot 2\cdot (k^2 - 16) = 0$$

整理后，得 $k^2 = 32$，即 $k = \pm\sqrt{32} = \pm\sqrt{16\times 2} = \pm 4\sqrt{2}$.

## 习题13·2〔第11页〕

解下列各方程组（1—6）：

1．（1）$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, & \text{（Ⅰ）} \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. & \text{（Ⅱ）} \end{cases}$

---

* 此方程原课本有错误，应作如此修改。

**解**：（Ⅰ）+（Ⅱ），得

$$10x-10y=20,$$

$$x-y=2,$$

$$x=y+2. \qquad (Ⅲ)$$

将（Ⅲ）式代入（Ⅰ）式，得

$$2(y+2)^2-5(y+2)y+3(y+2)-2y=10.$$

经整理，得 $3y^2+y-4=0$.

解此二次方程，得 $y_1=1$，$y_2=-\frac{4}{3}$.

将 $y_1=1$代入（Ⅲ），得 $x_1=3$；将 $y_2=-\frac{4}{3}$代入（Ⅲ），得 $x_2=\frac{2}{3}$. 方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=\frac{2}{3},\\ y_2=-\frac{4}{3}.\end{cases}$$

（2）$\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0, & (Ⅰ)\\ 3x^2+6xy-x+3y=0. & (Ⅱ)\end{cases}$

**解**：将（Ⅰ）式两端乘以3，得

$$6x^2+12xy-6x-3y+6=0. \qquad (Ⅲ)$$

将（Ⅱ）式两端乘以2，得

$$6x^2+12xy-2x+6y=0. \qquad (Ⅳ)$$

（Ⅳ）-（Ⅲ），得

$$4x+9y-6=0,$$

$$x=\frac{6-9y}{4}. \qquad (Ⅴ)$$

将（Ⅴ）式代入（Ⅰ）式，得

$$2\left(\frac{6-9y}{4}\right)^2+4\left(\frac{6-9y}{4}\right)y-2\left(\frac{6-9y}{4}\right)-y+2=0.$$

整理后，得

$$9y^2-32y+28=0.$$

解此方程得　$y_1=2$，　$y_2=\frac{14}{9}$.

先后将　$y_1=2$、$y_2=\frac{14}{9}$代入（Ⅴ）式，得　$x_1=-3$，$x_2=-2$.

方程组的解为　$\begin{cases}x_1=-3,\\ y_1=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=\frac{14}{9}.\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0, & (\text{Ⅰ})\\ 2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0. & (\text{Ⅱ})\end{cases}$

解：将（Ⅰ）式两端乘以2，得

$$2x^2-4xy-2y^2+4x+2y+4=0. \qquad (\text{Ⅲ})$$

（Ⅲ）-（Ⅱ），得　$x-y=0$，

即
$$x=y. \qquad (\text{Ⅳ})$$

将（Ⅳ）代入（Ⅰ），得

$$y^2-2\cdot y\cdot y-y^2+2\cdot y+y+2=0.$$

经整理，得　$2y^2-3y-2=0$.

解此方程得 $y_1=2$，　$y_2=-\frac{1}{2}$.　由（Ⅳ）式知：　$x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=2;\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2},\\ y_2=-\frac{1}{2}.\end{cases}$