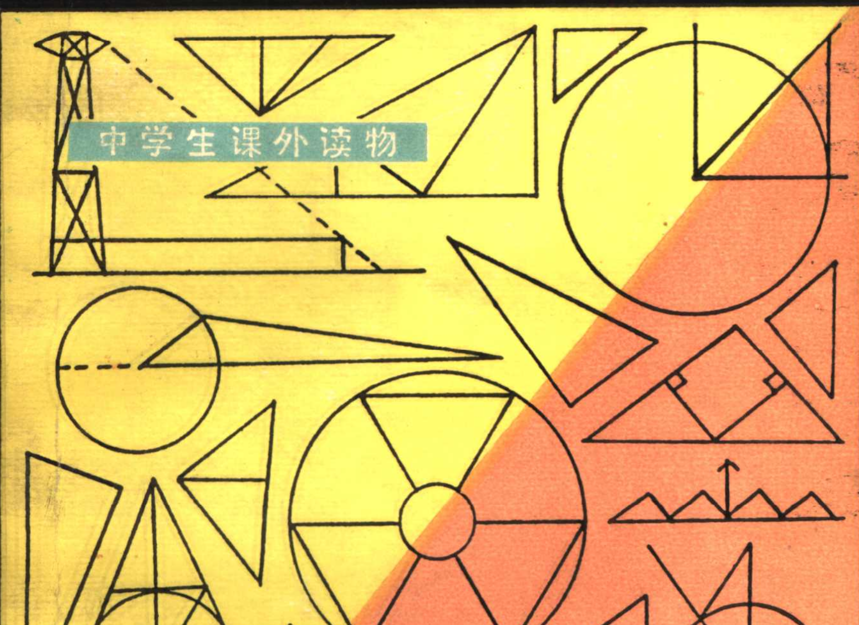
三角学习指导

中学生课外读物



吉林人民出版社

内容提要

这是一本学习三角的指导性书籍。书中对如何学习三角的基础知识，如何解答三角习题，作了比较系统地阐述。特别是在归纳三角各部分内容的基础上，配备相当数量的例题，着重总结了各种类型习题的解答规律、方法和注意事项，并附有习题，供学习时选用。适于中学总复习或单元复习使用，也可作为自学者、在校中学生的学习指导书或教师的教学参考资料。

中学生课外读物

三角学习指导

王志良 编

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

白城市印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 印张：11 1/2 插表：2 253,000字

1978年5月第1版 1979年2月第2次印刷

印数：100,001—500,000册

书号：7091·990 定价：0.81元

目　录

第一章　三角函数的定义和基本性质

§1　锐角三角函数定义

一、锐角三角函数定义

从锐角 XAY 的一个边上任取一点 B，向另一边引垂线 BC 时，若角 A 为一定，则直角三角形的三个角也就一定。

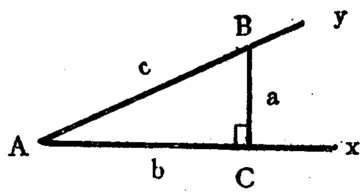


图　1—1

所以，令其三个边分别为 a、b、c，在 a, b, c 中若取两边相比，我们可以作出六个比：

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}.$$

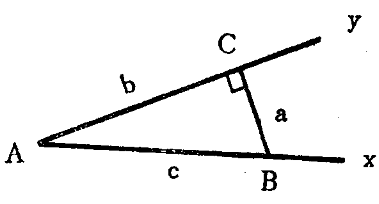


图　1—2

不管 B 点位置如何它们总有一定的比值，于是把这六个比叫做角 A 的三角函数（又叫做元函数），它们的名称和记法说明如下：

（1） $\frac{a}{c}\left(\frac{\text{垂边}}{\text{斜边}}\right)$叫角 A 的正弦，记为 $\sin A$；

（2） $\frac{b}{c}\left(\frac{\text{底边}}{\text{斜边}}\right)$叫角 A 的余弦，记为 $\cos A$；

（3） $\frac{a}{b}\left(\frac{\text{垂边}}{\text{底边}}\right)$叫角 A 的正切，记为 $\mathrm{tg}A$；

（4） $\frac{b}{a}\left(\frac{\text{底边}}{\text{垂边}}\right)$叫角 A 的余切，记为 $\mathrm{ctg}A$；

（5） $\frac{c}{b}\left(\frac{\text{斜边}}{\text{底边}}\right)$叫角 A 的正割，记为 $\sec A$；

（6） $\frac{c}{a}\left(\frac{\text{斜边}}{\text{垂边}}\right)$叫角 A 的余割，记为$\csc A$。

注意 （1） 三角函数值与角的大小有关，角为一定时，则各三角函数值也为一定。

（2） 垂边也叫 A 角的对边， 底边也叫 A 角的邻边。

二、余角的三角函数

C 角为直角时，在直角三角形 ABC 中，角A与角B就互成为余角。即$90°-A=B$，故 $\sin(90°-A)=\sin B=\frac{b}{c}$， 然而，

$\cos A=\frac{b}{c}$，

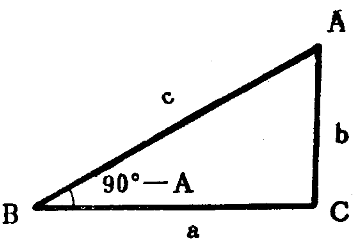


图 1—3

$\therefore\ \sin(90°-A)=\cos A$；

同理，$\cos(90°-A)=\sin A$，

$\mathrm{tg}(90°-A)=\mathrm{ctg}A$，

$\mathrm{ctg}(90°-A)=\mathrm{tg}A$，

$\sec(90°-A)=\csc A$，

$\csc(90°-A)=\sec A$。

§2 三角函数间的关系

一、四种关系

1. 倒数关系

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cdot\csc A&=1\\ \cos A\cdot\sec A&=1\\ \mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}A&=1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

2. 商式关系

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tg}A&=\frac{\sin A}{\cos A}\\ \mathrm{ctg}A&=\frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

3. 平方关系

$$\left.\begin{aligned}\sin^2A+\cos^2A&=1\\ 1+\mathrm{tg}^2A&=\sec^2A\\ 1+\mathrm{ctg}^2A&=\csc^2A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

4. 大小关系

$$\left.\begin{aligned}\sin A<\mathrm{tg}A<\sec A\\ \cos A<\mathrm{ctg}A<\csc A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

简捷记忆法

1. 倒数关系

对角线两端函数之积等于1。

2. 商式关系

任意一个角顶之函数等于相邻两角顶函数之积。

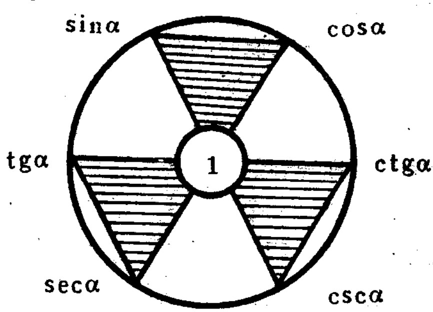


图 1—4

3. 平方关系

倒三角形上面两角顶函数之平方和等于第三角顶函数之平方。

利用图1—4记忆同角三角函数关系公式的方法还可以按下列口诀进行记忆：

不管元或穿心线，相邻三个组合看，
两端相乘积是中，顺次相联等另端。
尖端向下三角形，函数平方角顶安，
上角之和等下角，移项开方可置换。

4. 大小关系

利用图1—4按上小下大记忆就行。

二、三角函数间的内在联系

三角函数间具有下面的内在联系：

正弦 $\sin\alpha$ $\left(\frac{纵}{距}\right)$	—— 比	余弦 $\cos\alpha$ $\left(\frac{横}{距}\right)$	$\longrightarrow$	正切 $\mathrm{tg}\,\alpha$ $\left(\frac{纵}{横}\right)$
$\updownarrow$ 倒		$\updownarrow$ 倒		$\updownarrow$ 倒
余割 $\csc\alpha$ $\left(\frac{距}{纵}\right)$	——	正割 $\sec\alpha$ $\left(\frac{距}{横}\right)$	——	余切 $\mathrm{ctg}\,\alpha$ $\frac{横}{纵}$

三、恒等式证明问题

证明恒等式的时候一般采用下面几种方法：

（1）把等号左边变形推导到等于右边的方法；（2）把等号右边变形推导到等于左边的方法；（3）把等号两边变形，使其两边都等于一个简单式子的表示方法；（4）把已知公式经过变形推导出所求证的式子来的方法。

注意 在证明恒等式的过程中所迂到的关系式，也都是对于它的两边具有意义的那些角而说的。一般由繁到简，两

边都繁则两边同时推导。

1．把左边变形推导出右边

例题 1　试证 $\cos A(1+2\operatorname{tg}A)(\operatorname{tg}A+2)$

$$=2\sec A+5\sin A.$$

研究　把 $\operatorname{tg}A$、$\sec A$ 用 $\sin A$、$\cos A$ 表示后再进行计算。

解法　左边 $=\cos A(2\operatorname{tg}^2A+5\operatorname{tg}A+2)$

$$=\cos A\left(\frac{2\sin^2A}{\cos^2A}+\frac{5\sin A}{\cos A}+2\right)$$

$$=\frac{2\sin^2A}{\cos A}+5\sin A+2\cos A$$

$$=\frac{2(\sin^2A+\cos^2A)}{\cos A}+5\sin A$$

$$=\frac{2}{\cos A}+5\sin A(\because \sin^2A+\cos^2A=1)$$

$$=2\sec A+5\sin A.$$

$\therefore$　$\cos A(1+2\operatorname{tg}A)(\operatorname{tg}A+2)=2\sec A+5\sin A.$

注意　有关三角恒等式证明的问题，往往用 $\sin A$、$\cos A$ 表示其他的三角函数，来证明所要证明的等式。

2．把右边变形，推导出左边

例题 2　　试证 $\dfrac{1}{1+\sin A}=\sec^2A-\sec A\cdot\operatorname{tg}A.$

解法　右边 $=\dfrac{1}{\cos^2A}-\dfrac{1}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$=\frac{1}{\cos^2A}-\frac{\sin A}{\cos^2A}=\frac{1-\sin A}{\cos^2A}$$

$$=\frac{1-\sin A}{1-\sin^2A}(\because \sin^2A+\cos^2A=1)$$

$$=\frac{1}{1+\sin A}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+\sin A}=\sec^2 A-\sec A\cdot \operatorname{tg} A.$$

3．把两边变形，使其同等于一个形式

例题 3　试证明下列等式：

$$\frac{1}{\csc A-\operatorname{ctg} A}-\csc A=\frac{1}{\sin A}-\frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

解法　左边$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{\cos A}{\sin A}}-\dfrac{1}{\sin A}$

$$=\frac{\sin A}{1-\cos A}-\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A-1+\cos A}{\sin A\ (1-\cos A)}=\frac{\cos A-\cos^2 A}{\sin A(1-\cos A)}$$

$$=\frac{\cos A(1-\cos A)}{\sin A(1-\cos A)}=\operatorname{ctg} A \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

右边$=\dfrac{1+\cos A-\sin^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\dfrac{\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}$

$$=\frac{\cos A(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=\operatorname{ctg} A \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

∵　(1),(2)式相等，　∴　原等式成立。

4．把已知公式变形，推导出所要求的式子来

例题 4　证明：$1+3\sin^2 A\cdot\sec^4 A+\operatorname{tg}^6 A=\sec^6 A$.

证明　$1+\operatorname{tg}^2 A=\sec^2 A$

把等式两边分别 3 乘方，则

$1+3\operatorname{tg}^2 A+3\operatorname{tg}^4 A+\operatorname{tg}^6 A=\sec^6 A$,

∴　$1+3\operatorname{tg}^2 A(1+\operatorname{tg}^2 A)+\operatorname{tg}^6 A=\sec^6 A$,

∴　$1+3\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\cdot\sec^2 A+\operatorname{tg}^6 A=\sec^6 A$,

∴　$1+3\sin^2 A\cdot\sec^4 A+\operatorname{tg}^6 A=\sec^6 A$.

思 考 题

1．锐角三角函数的定义是什么？为什么我们说它们是角 A 的函数？同一锐角的正弦和余割，余弦和正割， 正切和余切之间有什么关系？

2．互余两角的三角函数之间有什么关系？

3．三角函数间的内在联系怎样？

练 习 1

试证明下列各恒等式：

1．$\mathrm{tg}^2A-\sin^2A=\mathrm{tg}^2A\cdot\sin^2A$.

2．$\sec^2A\cdot\csc^2A=\mathrm{tg}^2A+\mathrm{ctg}^2A+2$.

3．$(\mathrm{tg}^2A+\sec A+1)(\mathrm{tg}A-\sec A+1)=2\mathrm{tg}A$.

4．$\sec^4A-\sec^2A=\mathrm{tg}^4A+\mathrm{tg}^2A$.

5．$1+\sin^2A+\mathrm{ctg}^2A=\csc^2A+\cos^2A(\sec^2A-1)$.

6．$(\sec A+\csc A)^2-(\mathrm{tg}A+\mathrm{ctg}A)^2=2\sec A\cdot\csc A$.

7．$\mathrm{tg}A=\dfrac{\sin A+2\sin A\cdot\cos A}{1+\cos A+\cos^2A-\sin^2A}$.

8．$\dfrac{\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{ctg}^2\theta}+\dfrac{\mathrm{ctg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}=\mathrm{tg}^2\theta+\mathrm{ctg}^2\theta-1$.

9．$\dfrac{1-\cos A+\sin A}{1+\cos A+\sin A}+\dfrac{1+\cos A+\sin A}{1-\cos A+\sin A}=2\csc A$.

10．$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$.

11．$\dfrac{\mathrm{tg}\theta}{\sec\theta-1}+\dfrac{\mathrm{tg}\theta}{\sec\theta+1}=2\csc\theta$.

12．$\dfrac{\mathrm{ctg}(90^\circ-A)}{\csc^2A}\cdot\dfrac{\csc(90^\circ-A)\cdot\mathrm{ctg}^3A}{\sin^2(90^\circ-A)}=\sec A$.

13．$\dfrac{\mathrm{ctg}^2A\cdot\sin^2(90^\circ-A)}{\mathrm{ctg}A+\cos A}=\mathrm{tg}(90^\circ-A)-\cos A$.

14．$\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(45^\circ-A)=1$.

15．$\mathrm{tg}(45^\circ+A)\cdot\mathrm{tg}(45^\circ-A)=1$.

16. 当 θ 为锐角，关于下列等式为恒等式试证之：

$$\sqrt{\frac{2}{1+2\sin\theta\cos\theta}}=\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\theta}+\frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}.$$

17. $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=\sqrt{\sec^2\theta+\csc^2\theta}$.

18. $\dfrac{\operatorname{tg}A+\sec A-1}{\operatorname{tg}A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$.

四、带有附加条件的等式证明问题

从假设式到终结式的证明问题有以下几种：

1. 把已给条件式代入等式的一边而推导出另一边的方法举例

例题 1 若 $\begin{cases}a\sec\theta=1+\operatorname{tg}\theta\\ b\sec\theta=1-\operatorname{tg}\theta\end{cases}$ 时，求证 $a^2+b^2=2$。

研究 从证明式中不含有 θ 地方着眼，把已给条件式中 θ 消去。

解法 把已给条件式变形：

$$a=\frac{1+\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta},\ b=\frac{1-\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}.$$

$$\therefore\ a^2+b^2=\frac{(1+\operatorname{tg}\theta)^2}{\sec^2\theta}+\frac{(1-\operatorname{tg}\theta)^2}{\sec^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sec^2\theta}(1+2\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^2\theta+1-2\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}^2\theta)$$

$$=\frac{2(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{\sec^2\theta}=\frac{2\sec^2\theta}{\sec^2\theta}=2.$$

2. 把已给条件式变形，推导出所要证明的等式来的方法举例

例题 2 若 $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\theta}-\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2=\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$ 时，

求证 $\cos\theta=\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.