

三角学习指导

中学生课外读物

吉林人民出版社

51

内 容 提 要

这是一本学习三角的指导性书籍。书中对如何学习三角的基础知识，如何解答三角习题，作了比较系统地阐述。特别是在归纳三角各部分内容的基础上，配备相当数量的例题，着重总结了各种类型习题的解答规律、方法和注意事项，并附有习题，供学习时选用。适于中学总复习或单元复习使用，也可作为自学者、在校中学生的学习指导书或教师的教学参考资料。

中学生课外读物

三 角 学 习 指 导

王志良 编

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行
白城市印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 印张：11¹/₂ 插表：2 253,000字

1978年5月第1版 1979年2月第2次印刷

印数：100,001—500,000册

书号：7091·990 定价：0.81元

目 录

第一章 三角函数的定义和基本性质	1
§1 锐角三角函数定义	1
一 锐角三角函数定义	1
二 余角的三角函数	2
§2 三角函数间的关系	3
一 四种关系	3
二 三角函数间的内在联系	4
三 恒等式证明问题	4
思考题	7
练 习 1	
四 带有附加条件的等式证明问题	8
练 习 2	
五 消去法	10
练 习 3	
六 化简问题	11
练 习 4	
七 求值问题	12
练 习 5	
练 习 6	
练 习 7	
§3 特殊角的三角函数	21

一 30° 及 60° 的三角函数值	21
二 45° 的三角函数值	22
三 求值问题	23
思考题	

练 习 8

§ 4 三角函数值的变化	24
一 $\sin\theta$ 值的变化	24
二 $\cos\theta$ 值的变化	25
三 $\operatorname{tg}\theta$ 值的变化	25
四 $\operatorname{ctg}\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$ 值的变化	26
思考题	26
§ 5 任意角的三角函数	26
一 任意角的概念	
思考题	29
二 任意角三角函数的定义	30
三 同角三角函数	32
思考题	32
四 三角函数值的变化	33
五 公式	36
六 求值问题及化简问题	37
思考题	40

练 习 9

§ 6 三角函数图象及其应用	42
一 三角函数图象	42
二 几种常见的正弦型曲线	49
思考题	61

练 习 10

第二章 加法定理及其有关推论	63
§1 加法定理与减法定理	63
一 定理	63
思考题	64
二 求值问题与化简问题	64
练 习	11
三 证明问题	71
练 习	12
§2 乘法定理与除法定理	
(倍角、半角的三角函数公式)	77
一 公式	77
二 证明问题	78
思考题	81
练 习	13
练 习	14
练 习	15
§3 正弦、余弦的积化和差与和差化积	90
一 公式	90
二 求值问题与化简问题	90
练 习	16
三 证明问题	95
练 习	17
练 习	18
四 具有 $A+B+C=180^\circ$ 为条件的证明问题	101
练 习	19

第三章 三角形

8

§1 直角三角形的解法 108

一 解直角三角形 108

思考题 110

练 习 20

二 解直角三角形的应用 111

练 习 21

§2 一般三角形及其解法 120

一 三角形的边与角的关系 120

思考题 122

二 证明问题 124

练 习 22

练 习 23

练 习 24

练 习 25

练 习 26

练 习 27

练 习 28

三 考查三角形的形状问题 146

练 习 29

§3 三角形的面积、内切圆、傍切圆、 外接圆的半径、中线、角的平分线 152

一 三角形的面积、内切圆、傍切圆、外接圆的半径 152

思考题 162

练 习 30

二 有关三角形的中线、内角的平分线、垂线的问题	163
-------------------------------	-----

练 习 31

§ 4 三角形解法公式与说明	171
一 说明	171
二 解三角形问题	174

练 习 32

三 测量问题	189
--------------	-----

练 习 33

第 四 章 关于三角的综合运用问题..... 203

§ 1 代数与三角的综合运用问题	203
一 待定系数法的有关问题	203
二 归属于方程式解法的问题	204
三 应用方程式理论的问题	207

练 习 34

四 应用不等式的解法问题	211
五 有关级数的问题	212

练 习 35

六 运用对数性质的问题	216
-------------------	-----

练 习 36

§ 2 几何与三角的综合运用问题	220
一 平面几何与三角的综合运用问题	220

练 习 37

练 习 38

练 习 39

练 习 40

练 习 41

练 习 42

练 习 43

第五章 反三角函数..... 254

§ 1	反三角函数定义和基本性质.....	254
一	反函数的定义	254
二	反函数的定理	255
三	反三角函数定义	255
四	反三角函数的多值性及其主值	255
五	反三角函数的性质	256
§ 2	基本公式与重要变换	257
一	反三角函数的三角运算	257
二	反三角函数间的关系	259
三	加法定理基本公式	261
§ 3	举例	263
	思考题	274

练 习 44

第六章 三角方程..... 277

§ 1	基本概念与基本公式	277
一	三角方程的定义	277
二	解三角方程的意义	277
三	基本三角方程的一般解公式	278
四	解三角方程的几点注意事项	278
§ 2	简易三角方程的解法	279

练 习 45

§ 3	一般三角方程的解法举例	281
一	三角方程可化为基本的三角方程的解法	281
二	把方程左边化为积的形式, 并且使右边 为 0 (或数) 的解法	283
三	把方程化为只含有 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的解法	286
四	把方程化为只含有 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的齐次方程的解法	291
五	利用两个同名函数相等的关系解方程	292
§ 4	增根遗根产生的原因及处理方法举例	293
一	产生增根的原因及处理方法举例	294
二	产生遗根的原因及处理方法举例	298
三	增根与遗根小结	301
§ 5	三角方程组解法举例	302
	思考题	305

练 习 46

§ 6	消去法	309
-----	-----------	-----

练 习 47

§ 7	不等式与极大极小	311
一	三角不等式证明与解法	311

练 习 48

二	求极大极小值问题	318
---	----------------	-----

练 习 49

附录		324
----	-------	-----

练习题答案或提示

公式表

第一章 三角函数的定义和基本性质

§1 锐角三角函数定义

一、锐角三角函数定义

从锐角 XAY 的一个边上任取一点 B ，向另一边引垂线 BC 时，若角 A 为一定，则直角三角形的三个角也就一定。

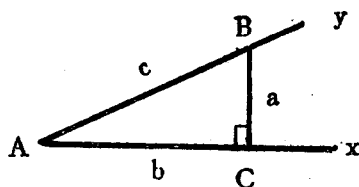


图 1-1

所以，令其三个边分别为 a, b, c ，在 a, b, c 中若取两边相比，我们可以作出六个比：

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

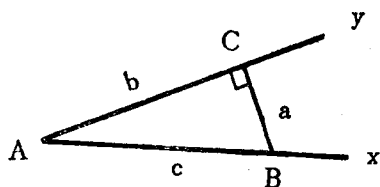


图 1-2

不管 B 点位置如何它们总有一定的比值，于是把这六个比叫做角 A 的三角函数（又叫做元函数），它们的名称和记法说明如下：

(1) $\frac{a}{c}$ ($\frac{\text{垂边}}{\text{斜边}}$) 叫角 A 的正弦, 记为 $\sin A$;

(2) $\frac{b}{c}$ ($\frac{\text{底边}}{\text{斜边}}$) 叫角 A 的余弦, 记为 $\cos A$;

(3) $\frac{a}{b}$ ($\frac{\text{垂边}}{\text{底边}}$) 叫角 A 的正切, 记为 $\operatorname{tg} A$;

(4) $\frac{b}{a}$ ($\frac{\text{底边}}{\text{垂边}}$) 叫角 A 的余切, 记为 $\operatorname{ctg} A$;

(5) $\frac{c}{b}$ ($\frac{\text{斜边}}{\text{底边}}$) 叫角 A 的正割, 记为 $\sec A$;

(6) $\frac{c}{a}$ ($\frac{\text{斜边}}{\text{垂边}}$) 叫角 A 的余割, 记为 $\operatorname{csc} A$.

注意 (1) 三角函数值与角的大小有关, 角为一定时, 则各三角函数值也为一定.

(2) 垂边也叫 A 角的对边, 底边也叫 A 角的邻边.

二、余角的三角函数

C 角为直角时, 在直角三角形 ABC 中, 角 A 与角 B 就互成为余角. 即 $90^\circ - A = B$, 故 $\sin(90^\circ - A)$

$$= \sin B = \frac{b}{c}, \text{ 然而,}$$

$$\cos A = \frac{b}{c},$$

$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \cos A;$$

同理, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$,

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A,$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A,$$

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{csc} A,$$

$$\operatorname{csc}(90^\circ - A) = \sec A.$$

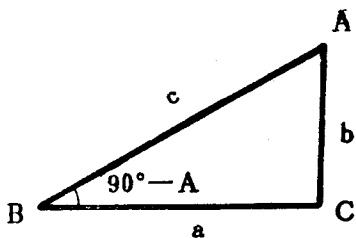


图 1-3

§2 三角函数间的关系

一、四种关系

1. 倒数关系

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \csc A &= 1 \\ \cos A \cdot \sec A &= 1 \\ \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

2. 商式关系

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \operatorname{ctg} A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

3. 平方关系

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 A &= \csc^2 A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

4. 大小关系

$$\left. \begin{aligned} \sin A &< \operatorname{tg} A < \sec A \\ \cos A &< \operatorname{ctg} A < \csc A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

简捷记忆法

1. 倒数关系

对角线两端函数之积等于1。

2. 商式关系

任意一个角顶之函数等于相邻两角顶函数之积。

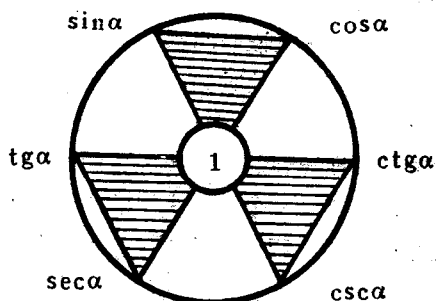


图 1-4

3. 平方关系

倒三角形上面两角顶函数之平方和等于第三角顶函数之平方。

利用图 1—4 记忆同角三角函数关系公式的方法还可以按下列口诀进行记忆：

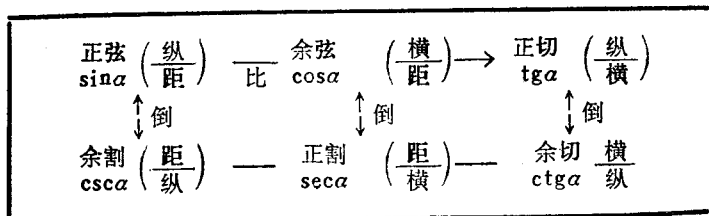
不管元或穿心线，相邻三个组合看，
两端相乘积是中，顺次相联等另端。
尖端向下三角形，函数平方角顶安，
上角之和等下角，移项开方可置换。

4. 大小关系

利用图 1—4 按上小下大记忆就行。

二、三角函数间的内在联系

三角函数间具有下面的内在联系：



三、恒等式证明问题

证明恒等式的时候一般采用下面几种方法：

(1) 把等号左边变形推导到等于右边的方法；(2) 把等号右边变形推导到等于左边的方法；(3) 把等号两边变形，使其两边都等于一个简单式子的表示方法；(4) 把已知公式经过变形推导出所求证的式子来的方法。

注意 在证明恒等式的过程中所迁到的关系式，也都是对于它的两边具有意义的那些角而说的。一般由繁到简，两

边都繁则两边同时推导。

1. 把左边变形推导出右边

例题 1 试证 $\cos A(1 + 2 \operatorname{tg} A)(\operatorname{tg} A + 2)$
 $= 2 \sec A + 5 \sin A.$

研究 把 $\operatorname{tg} A, \sec A$ 用 $\sin A, \cos A$ 表示后再进行计算。

解法 左边 $= \cos A(2 \operatorname{tg}^2 A + 5 \operatorname{tg} A + 2)$

$$= \cos A \left(\frac{2 \sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{5 \sin A}{\cos A} + 2 \right)$$

$$= \frac{2 \sin^2 A}{\cos A} + 5 \sin A + 2 \cos A$$

$$= \frac{2(\sin^2 A + \cos^2 A)}{\cos A} + 5 \sin A$$

$$= \frac{2}{\cos A} + 5 \sin A (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$$

$$= 2 \sec A + 5 \sin A.$$

$$\therefore \cos A(1 + 2 \operatorname{tg} A)(\operatorname{tg} A + 2) = 2 \sec A + 5 \sin A.$$

注意 有关三角恒等式证明的问题, 往往用 $\sin A, \cos A$ 表示其他的三角函数, 来证明所要证明的等式。

2. 把右边变形, 推导出左边

例题 2 试证 $\frac{1}{1 + \sin A} = \sec^2 A - \sec A \cdot \operatorname{tg} A.$

解法 右边 $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1 - \sin A}{1 - \sin^2 A} (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$$

$$= \frac{1}{1 + \sin A}.$$

$$\therefore \frac{1}{1 + \sin A} = \sec^2 A - \sec A \cdot \operatorname{tg} A.$$

3. 把两边变形, 使其同等于一个形式

例题 3 试证明下列等式:

$$\frac{1}{\csc A - \operatorname{ctg} A} - \csc A = \frac{1}{\sin A} - \frac{\sin A}{1 + \cos A}.$$

$$\begin{aligned} \text{解法 左边} &= \frac{1}{\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}} - \frac{1}{\sin A} \\ &= \frac{\sin A}{1 - \cos A} - \frac{1}{\sin A} \\ &= \frac{\sin^2 A - 1 + \cos A}{\sin A (1 - \cos A)} = \frac{\cos A - \cos^2 A}{\sin A (1 - \cos A)} \\ &= \frac{\cos A (1 - \cos A)}{\sin A (1 - \cos A)} = \operatorname{ctg} A \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1 + \cos A - \sin^2 A}{\sin A (1 + \cos A)} = \frac{\cos A + \cos^2 A}{\sin A (1 + \cos A)} \\ &= \frac{\cos A (1 + \cos A)}{\sin A (1 + \cos A)} = \operatorname{ctg} A \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$\therefore$ (1), (2) 式相等, $\therefore$ 原等式成立.

4. 把已知公式变形, 推导出所要求的式子来

例题 4 证明: $1 + 3\sin^2 A \cdot \sec^4 A + \operatorname{tg}^6 A = \sec^6 A$.

证明 $1 + \operatorname{tg}^2 A = \sec^2 A$

把等式两边分别 3 乘方, 则

$$\begin{aligned} 1 + 3\operatorname{tg}^2 A + 3\operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^6 A &= \sec^6 A, \\ \therefore 1 + 3\operatorname{tg}^2 A (1 + \operatorname{tg}^2 A) + \operatorname{tg}^6 A &= \sec^6 A, \\ \therefore 1 + 3 \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \sec^2 A + \operatorname{tg}^6 A &= \sec^6 A, \\ \therefore 1 + 3\sin^2 A \cdot \sec^4 A + \operatorname{tg}^6 A &= \sec^6 A. \end{aligned}$$

思 考 题

1. 锐角三角函数的定义是什么？为什么我们说它们是角 A 的函数？同一锐角的正弦和余割，余弦和正割，正切和余切之间有什么关系？

2. 互余两角的三角函数之间有什么关系？

3. 三角函数间的内在联系怎样？

练 习 1

试证明下列各恒等式：

$$1. \operatorname{tg}^2 A - \sin^2 A = \operatorname{tg}^2 A \cdot \sin^2 A.$$

$$2. \sec^2 A \cdot \csc^2 A = \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 A + 2.$$

$$3. (\operatorname{tg}^2 A + \sec A + 1)(\operatorname{tg} A - \sec A + 1) = 2\operatorname{tg} A.$$

$$4. \sec^4 A - \sec^2 A = \operatorname{tg}^4 A + \operatorname{tg}^2 A.$$

$$5. 1 + \sin^2 A + \operatorname{ctg}^2 A = \csc^2 A + \cos^2 A (\sec^2 A - 1).$$

$$6. (\sec A + \csc A)^2 - (\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A)^2 = 2\sec A \cdot \csc A.$$

$$7. \operatorname{tg} A = \frac{\sin A + 2\sin A \cdot \cos A}{1 + \cos A + \cos^2 A - \sin^2 A}.$$

$$8. \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{ctg}^2 \theta - 1.$$

$$9. \frac{1 - \cos A + \sin A}{1 + \cos A + \sin A} + \frac{1 + \cos A + \sin A}{1 - \cos A + \sin A} = 2\csc A.$$

$$10. (1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A).$$

$$11. \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec \theta - 1} + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec \theta + 1} = 2\csc \theta.$$

$$12. \frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - A)}{\csc^2 A} \cdot \frac{\csc(90^\circ - A) \cdot \operatorname{ctg}^3 A}{\sin^2(90^\circ - A)} = \sec A.$$

$$13. \frac{\operatorname{ctg}^2 A \cdot \sin^2(90^\circ - A)}{\operatorname{ctg} A + \cos A} = \operatorname{tg}(90^\circ - A) - \cos A.$$

$$14. \sin^2(A + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - A) = 1.$$

$$15. \operatorname{tg}(45^\circ + A) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - A) = 1.$$

16. 当 θ 为锐角, 关于下列等式为恒等式试证之:

$$\sqrt{\frac{2}{1+2\sin\theta\cos\theta}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}\sin\theta} + \frac{1}{1+\sqrt{2}\cos\theta}.$$

17. $\operatorname{tg}\theta + \operatorname{ctg}\theta = \sqrt{\sec^2\theta + \csc^2\theta}.$

18. $\frac{\operatorname{tg}A + \sec A - 1}{\operatorname{tg}A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}.$

四、带有附加条件的等式证明问题

从假设式到终结式的证明问题有以下几种:

1. 把已给条件式代入等式的一边而推导出另一边的方法举例

例题 1 若 $\begin{cases} a \sec\theta = 1 + \operatorname{tg}\theta \\ b \sec\theta = 1 - \operatorname{tg}\theta \end{cases}$ 时, 求证 $a^2 + b^2 = 2$.

研究 从证明式中不含有 θ 地方着眼, 把已给条件式中 θ 消去.

解法 把已给条件式变形:

$$a = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}, b = \frac{1 - \operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}.$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2 + b^2 &= \frac{(1 + \operatorname{tg}\theta)^2}{\sec^2\theta} + \frac{(1 - \operatorname{tg}\theta)^2}{\sec^2\theta} \\ &= \frac{1}{\sec^2\theta} (1 + 2\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}^2\theta + 1 - 2\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}^2\theta) \\ &= \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2\theta)}{\sec^2\theta} = \frac{2\sec^2\theta}{\sec^2\theta} = 2. \end{aligned}$$

2. 把已给条件式变形, 推导出所要证明的等式来的方法举例

例题 2 若 $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\theta} - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\theta}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$ 时,

求证 $\cos\theta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$