大学数学立体化教材

微积分

（经济类）下册

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

微积分

（经济类） 下册

吴赣昌 主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分．经济类/吴赣昌主编．
北京：中国人民大学出版社，2006
大学数学立体化教材
ISBN 7-300-07129-5

Ⅰ．微…
Ⅱ．吴…
Ⅲ．微积分-高等学校-教材
Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第016227号

大学数学立体化教材
微积分（经济类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	河北涿州星河印刷有限公司		
开　本	720×965 毫米 1/16	版　次	2006年4月第1版
印　张	34.75 插页2	印　次	2006年4月第1次印刷
字　数	635 000	定　价	56.00元（上、下册，含光盘）

总　序

1999 年的暑假，经过近半年的调研和思考之后，笔者义无反顾地选择了“大学数学教育信息化研究”作为自己的一个中期研究目标，促使笔者作出这样的选择主要基于以下几点：

1. 教育信息化是 21 世纪教育改革和发展的大方向. 借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标.

2. 20 世纪 90 年代以来，我国高等教育迅速从“精英型教育”向“大众化教育”转化，教育规模的迅速扩大，给我国大学教育带来了一系列的问题，例如，现阶段大学数学的教育正面临生源录取分数下降、教学课时减少、教学内容增加、对数学实践能力的培养要求提高等一系列似乎矛盾的问题.

3. 大学应以教学为中心，但长期以来，教学研究没有得到应有的重视，天女散花式的教研投入，造成国内高校在同一水平上的大量重复建设和浪费，而重点研究项目的投入又严重不足，难以为继.

4. 与其他学科的教育信息化研究相比，大学数学教育信息化的研究进展缓慢. 随着大众化教育阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要.

由针对上述问题的分析可见，如何将教育技术与信息技术相结合，针对所面临的问题建设一系列“新型教材”就有其非常的紧迫性. 在笔者的设想中，这种“新型教材”就是“教学资源库式的立体化教材”. 它至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教、学、考多层次、全方位的建设. 此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量、培养学生的数学应用与实践能力，利于学生的课后学习辅导和优秀学生的提高训练与考研训练，以及全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用. 基于这一设想和预期，笔者组织和带领一个团队，开始了大学数学立体化教材的研发工作.

大学数学立体化教材的研发工作迄今已历时 6 年，期间历经多次升级改版，从 2001 年起，先后被全国 200 多所高等院校采用或试用，形成了现在全新的“教学资源库式”的立体化教材——中国人民大学出版社推出的“大学数学立体化教材”，它包含两大类，共六册. 理工类：《高等数学》、《线性代数》与《概率论与数理统计》；经济类：《微积分》、《线性代数》与《概率论与数理统计》. 下面，笔者以其中

的一套来简单介绍该立体化教材的形式与内涵.

立体化教材的形式:

1.《 * * * * 》(书)

2.《 * * * * 多媒体学习系统》(光盘,学生专用)

与上述立体化教材配套建设的还有

3.《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘,教师专用)

(将随教材免费配送给教材采用单位的教师使用.)

《 * * * * 》(书)的编写具有下列特点:

● 书中融入了数学历史与数学文化的教育.

● 在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思想.

● 以评注方式对定理、概念、公式的理解、应用给出了进一步的总结.

● 依循序渐进的原则,以适当的难度梯度选编了教学例题.

● 与教材同步配套,简明实用地编写了"大学数学实验指导".该实验指导在按教学内容设计了相应的基础实验的基础上,还选择部分数学建模案例设计了部分综合实验.

《 * * * * 多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件,其中设计了多媒体教案、习题详解、数学实验、题型分析、考研真题剖析等功能模块,内容包含从课程学习到考研提高的全部内容.具体来说,其特点如下:

● 多媒体教案:按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画,直击数学思想本质.

● 习题详解:以动态解析方式给出了习题的求解过程,并逐题配备了相关知识点链接.

● 数学实验:以交互、集成方式,设计了数学实验教学演示系统和实验案例库.

● 题型分析:总结解题思路,并通过精选的例题揭示出解题的一般规律和技巧.

● 考研真题:收录历届数学考研真题,并逐题作了深入剖析.

《 * * * * 多媒体教学系统》(光盘),除包含了《 * * * * 多媒体学习系统》的主要功能模块和特点之外,它还具有以下特点:

● 多媒体教案:教学过程设计更适合教师进行课堂教学,补充了类型丰富的教学例题供教师选用,增加了课堂练习环节.

● 教学备课系统:搜集并整理了大量的教学资源和备课元素,供教师修改选

用，便于充分展现各位老师的个性化授课特点.

● 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势.

● 数学实验案例库与数学实验演示系统结合，可供教师现场与 Mathematica 系统交互进行实验演示.

同步建设的《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 20 000 余道，具有以下特点：

● 试题类型丰富：含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

● 组卷功能强大：教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，可通过人工调整按钮，方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

● 大容量试卷库：试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考；用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

● 二次开发功能：用户可对系统进行试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令笔者欣慰的是，与当初启动这个项目的时候相比，大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境（从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设）和软硬件技术（从软件开发平台到计算机相关硬件技术）都已经成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师的教学个性化问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

作为一项长期的事业，笔者今后将长期致力于大学数学立体化教材的建设工作，不断跟踪教育技术和信息化技术的发展，并及时应用到有关课程的教材建设之中，逐年提升、精益求精. 同时，笔者还将通过中国人民大学出版社的网站（在主页中点击“大学数学”按钮进入“大学数学立体化教材服务网站”，或直接输入网址 http://www.math123.cn 进入该服务网站）提供各种相关教学服务，包括：各类最新建设或升级的立体化教材的介绍、各类系统软件的演示等，尤其是还会提供丰富的下载内容，如各类系统软件的最新演示版本，有关各门课程的备课系统与数学实验案例库的最新升级版本、教学大纲、教学日历等.

6 年以来，尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类)出版以来，笔者的工作得到了许多国内同行的长期支持和鼓励，在此特别表示感谢.

吴赣昌

2006 年 3 月 1 日

目　　录

习题答案

第 6 章　多元函数微积分

在前面几章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数．但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量（因变量）与另外多个变量（自变量）的相互依赖关系．由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题．本章将在一元函数微积分学的基础上，进一步讨论多元函数的微积分学．讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为与二元函数有关的概念和方法大多有比较直观的解释，便于理解，而且这些概念和方法大多能自然推广到二元以上的多元函数．

§6.1　空间解析几何简介

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就．它通过点和坐标的对应关系，把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来，使得人们既可以用代数方法研究解决几何问题(这是解析几何的基本内容)，也可以用几何方法解决代数问题．

本节我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，它们包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念．这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用．

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组(即点的坐标 (x, y)) 对应起来．同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们建立了**空间直角坐标系**．

过空间一定点 O，作三条相互垂直的数轴，依次记为 **x 轴**(**横轴**)、**y 轴**(**纵轴**)、**z 轴**(**竖轴**)，统称为**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$ (见图 6–1–1).

空间直角坐标系有右手系和左手系两种．我们通常采用右手系(见图 6–1–2)，其坐标轴的正向按如下方式规定：以右手握住 z 轴，当右手的 4 个手指从 x 轴正向以 $\pi/2$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向．

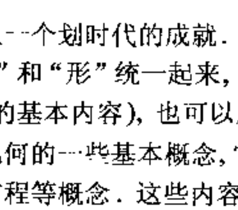


图 6–1–1

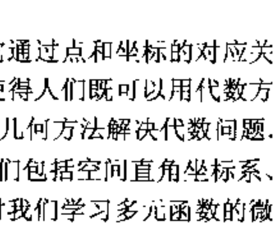


图 6–1–2

3 条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy, yOz, zOx 称为**坐标面**. 3个坐标面把空间分成 8 个部分，每个部分称为一个**卦限**. 共 8 个卦限. 其中 $x>0, y>0, z>0$ 部分为第 Ⅰ 卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向来确定. 第 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第 Ⅰ 卦限正下方的第Ⅴ卦限，按逆时针方向来确定 (见图 6-1-3).

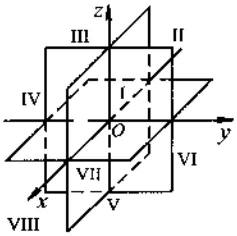


图 6-1-3

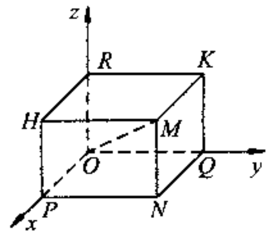


图 6-1-4

定义了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数组来确定空间点的位置. 设 M 为空间中任意一点 (见图 6-1-4)，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 P、Q、R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x, y, z. 这样空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反之，若给定一有序数组 x, y, z，就可以分别在 x 轴、y 轴、z 轴找到坐标分别为 x, y, z 的三点 P、Q、R，过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面的交点就是由有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x, y, z 称为**点 M 的坐标**，并依次称 x, y 和 z 为点 M 的**横坐标、纵坐标和竖坐标**，坐标为 x, y, z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是坐标为 $(x, 0, 0)$. 同理，y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$; z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$; yOz 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$; zOx 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点，则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $A(x, y, -z)$; 关于 x 轴的对称点为 $B(x, -y, -z)$; 关于原点对称的点为 $C(-x, -y, -z)$.

二、空间两点间的距离

我们知道，在平面直角坐标系中，任意两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

现在我们来给出空间直角坐标系中任意两点间的距离公式.

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$，过这两点各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体 (见图 6-1-5).

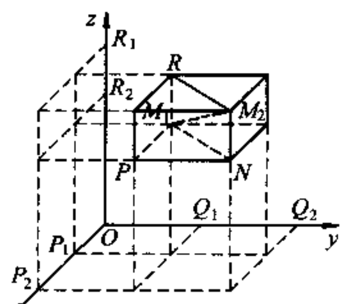


图 6-1-5

由于 $\triangle M_1NM_2$、$\triangle M_1PN$ 为直角三角形，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

因为 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,\quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$

$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以，便得到空间两点间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

例 1 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上，故可设 P 点坐标为 $(x, 0, 0)$，由于

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},\quad |PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$

$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

即 $$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

从而解得 $x=\pm1$，所求点为 $(1, 0, 0)$，$(-1, 0, 0)$.

三、曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

在日常生活中，我们常常会看到各种曲面，例如，反光镜面、一些建筑物的表面、球面等. 类似在平面解析几何中把平面曲线看做是动点的轨迹一样，在空间解析几何中，曲面也可看做是具有某种性质的动点的轨迹.

定义 1 在空间直角坐标系中，如果曲面 S 上任一点坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x, y, z)=0$ 称为**曲面 S 的方程**，而曲面 S 就称为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形（见图 6－1－6）.

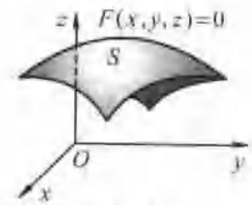


图 6－1－6

建立了空间曲面与其方程的联系后，我们就可以通过研究方程的解析性质来研究曲面的几何性质.

空间曲面研究的两个基本问题是：

(1) 已知曲面上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程；

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

例 2 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点（见图 6－1－7）. 根据题意有

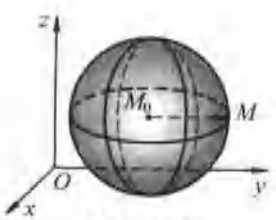


图 6－1－7

$$|MM_0|=R,$$

由于 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

所以 $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$
特别地，球心在原点时，球面方程
$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

例 3　方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解　对原方程配方，得
$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5,$$
所以，原方程表示球心在点 $M_0(1,-2,0)$、半径为 $R=\sqrt{5}$ 的球面方程.

下面我们再介绍一些常见的曲面及其方程，它们包括平面、柱面和二次曲面等.

2. 平面

平面是空间中最简单而且最重要的曲面. 可以证明空间中任一平面都可以用三元一次方程
$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1.3}$$
来表示，反之亦然. 其中 A、B、C、D 是不全为零的常数. 方程 (1.3) 称为**平面的一般方程**.

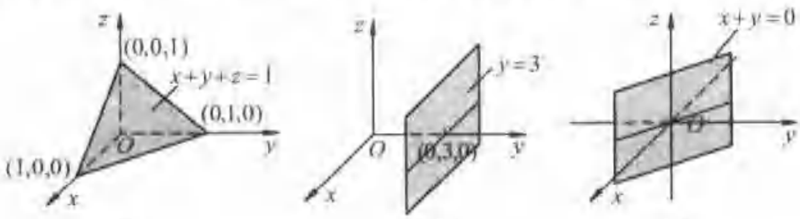
具有特殊位置的平面方程：

(1) 平面通过坐标原点：$Ax+By+Cz=0$；

(2) 平面平行于 z 轴：$Ax+By+D=0$；
　　平面平行于 y 轴：$Ax+Cz+D=0$；
　　平面平行于 x 轴：$By+Cz+D=0$；

(3) 平面平行于 xOy 面：$Cz+D=0$，特别地，xOy 面：$z=0$；
　　平面平行于 yOz 面：$Cx+D=0$，特别地，xOy 面：$x=0$；
　　平面平行于 zOx 面：$Cy+D=0$，特别地，xOy 面：$y=0$；

例如，$x+y+z=1$，$y=3$，$x+y=0$ 等均表示空间中的平面 (见图 6－1－8(a)、(b)、(c)).



(a)　　(b)　　(c)

图 6－1－8

注：在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；在空间解析几何中，一次方程表示一个平面. 例如，$x+y=0$ 在平面解析几何中表示一条直线，而在空间解析几何中则表示一个平面 (见图 6－1－8(c)).

例 4　求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解　依题意，这个平面通过 x 轴，即平面平行于 x 轴且通过坐标原点，从而可设

该平面方程为

$$By+Cz=0,$$

又因平面过点 $(4,-3,-1)$，因此有

$$-3B-C=0,\ 即\ C=-3B$$

以此代入所设方程，再除以 $B\,(B\neq0)$，便得到所求方程为

$$y-3z=0$$

下面我们再引入一种平面方程：

设一平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

若此平面与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 三点（见图 6-1-9），其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$，则这三点均满足平面方程，即有

$$aA+D=0,\quad bB+D=0,\quad cC+D=0,$$

解得
$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}.$$

代入所设平面方程中，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

这个方程称为**平面的截距式方程**，其中 a, b, c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的**截距**.

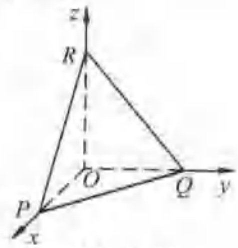


图 6-1-9

3. 柱面

定义 2 平行于某定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的轨迹称为**柱面**. 这条定曲线 C 称为柱面的**准线**，直线 L 称为柱面的**母线**.

例 5 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间中表示怎样的曲面？

解 在 xOy 面上，它表示圆心在原点 O，半径为 R 的圆；在空间直角坐标系中，注意到方程不含竖坐标 z，因此对空间一点 (x,y,z)，不论其竖坐标 z 是什么，只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足方程，这一点就落在曲面上，即凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴的直线 L 都在此曲面上，因此，此曲面可以看做是平行于 z 轴的直线 L（母线）沿着 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$（准线）移动而形成的，称此曲面为**圆柱面**（见图 6-1-10）.

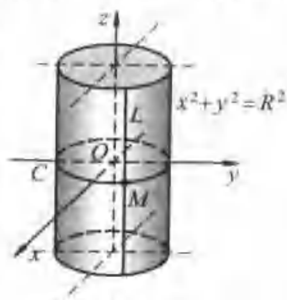


图 6-1-10

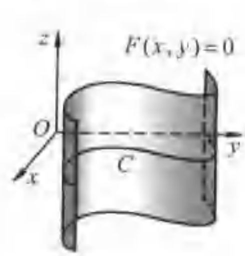


图 6-1-11

一般地，在空间解析几何中，不含 z 而仅含 x, y 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的一个柱面，xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 是这个柱面的一条准线（见图 6-1-11）.

例如，方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴、准线为 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$ 的柱面，这个柱面称为**抛物柱面**（见图6－1－12）.

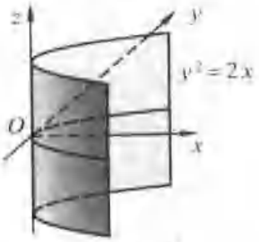


图 6－1－12

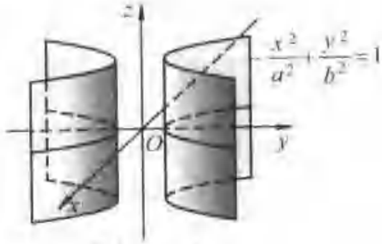


图 6－1－13

方程 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 xOy 面上的双曲线 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的柱面，这个柱面称为**双曲柱面**（见图6－1－13）.

4. 二次曲面

怎样了解三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面的形状呢？

在空间直角坐标系中，我们采用一系列平行于坐标面的平面去截割曲面，从而得到平面与曲面一系列的交线（即截痕），通过综合分析这些截痕的形状和性质来认识曲面形状的全貌. 这种研究曲面的方法称为平面截割法，简称为**截痕法**.

下面我们从椭球面的方程出发，利用截痕法来研究其形状.

（1）**椭球面**.

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)\tag{1.4}$$

所确定的曲面称为**椭球面**（见图6－1－14）.

由方程 (1.4) 知，

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\le 1,\quad 即\ |x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c,$$

这说明椭球面 (1.4) 完全包含在一个以原点为中心的长方体内. a, b, c 称为**椭球面的半轴**.

椭球面与三个坐标面的交线分别为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

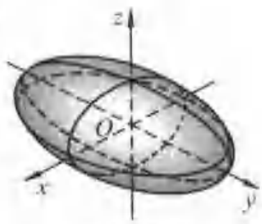


图 6－1－14

易见这些交线都是椭圆.

再用平面 $z=h\ (|h|\le c)$ 去截椭球面，得到的截痕为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$$

即为一个位于平面 $z=h$ 上的椭圆:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

它的中心在 z 轴上，两个半轴分别为

$$a\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad 和 \quad b\cdot\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

当 $|h|$ 由零逐渐增大到 c 时，相应的椭圆由大变小，最后当 $|h|$ 到达 c 时，椭圆缩小成一个点.

同理，平面 $y=h(|h|\le b)$ 和 $x=h(|h|\le a)$ 去截曲面时，可得到与上述类似的结果.

综合上述讨论，我们基本上认识了椭球面的形状(见图6-1-14). 特别地，当 $a=b=c$ 时，方程(1.4)变成

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

此即为我们熟知以原点为圆心、a 为半径的球面方程.

类似地，我们可利用截痕法对下列常见二次曲面进行讨论.

(2) 椭圆抛物面.

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\ (p与q同号)$$

以 $p>0$, $q>0$ 的情形为例，椭圆抛物面的典型图形如图6-1-15所示.

(3) 双曲抛物面(马鞍面).

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z\ (p与q同号)$$

以 $p>0$, $q>0$ 的情形为例，双曲抛物面的典型图形如图6-1-16所示.

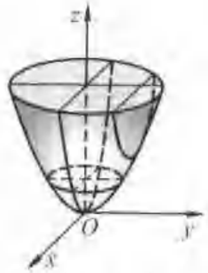


图 6-1-15

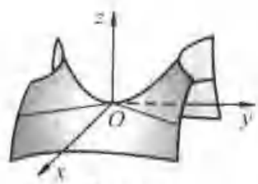


图 6-1-16

(4) 单叶双曲面.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\quad (a>0,\ b>0,\ c>0)\ (见图6-1-17)$$

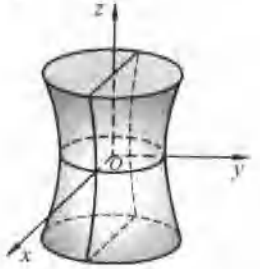


图 6-1-17

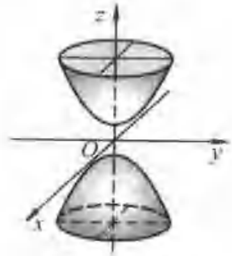


图 6-1-18

(5) 双叶双曲面.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\quad (a>0,\ b>0,\ c>0)\ (见图6-1-18)$$

(6) **二次锥面**.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ($a>0, b>0, c>0$)(见图6-1-19)

二次锥面的一种常见形式是

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

若用平面$z=h$去截它，所得截痕均为圆，此方程表达的曲面称为**圆锥面**.

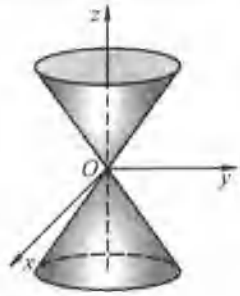


图6-1-19

习题 6-1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限？
$A(1,-2,3)$; $B(2,3,-4)$; $C(2,-3,-4)$; $D(-2,-3,1)$.
2. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征？并指出下列各点的位置：
$A(3,4,0)$; $B(0,4,3)$; $C(3,0,0)$; $D(0,-1,0)$.
3. 求点(a,b,c)关于(1)各坐标面，(2)各坐标轴，(3)坐标原点的对称点的坐标.
4. 根据下列条件，确定点B的未知坐标：
(1) $A(4,-7,1)$, $B(6,2,z)$, $|AB|=11$; (2) $A(2,3,4)$, $B(x,-2,4)$, $|AB|=5$.
5. 自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，求出各垂足的坐标.
6. 求点$M(4,-3,5)$到各坐标轴的距离.
7. 一动点与两定点$(2,3,1)$和$(4,5,6)$等距离，求这动点的轨迹方程.
8. 求以点$O(1,3,-2)$为球心，且通过坐标原点的球面方程.
9. 画出下列各方程所表示的曲面：
(1) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$; (2) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; (3) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;
(4) $y^2-z=0$; (5) $z=2-x^2$.
10. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形？
(1) $x=2$; (2) $y=x+1$. (3) $x^2+y^2=4$; (4) $x^2-y^2=1$.
11. 指出下列各方程表示哪种曲面：
(1) $x^2+y^2+z^2=1$; (2) $x^2+y^2-2z=0$; (3) $x^2-y^2=0$;
(4) $x^2+y^2=0$; (5) $xyz=0$; (6) $y-\sqrt{3}z=0$;
(7) $y^2-4y+3=0$; (8) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; (9) $x^2-\frac{y^2}{9}=1$;
(10) $x^2=4y$; (11) $z^2-x^2-y^2=0$;
12. 方程组$\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$在平面解析几何与空间解析几何中各表示什么?
13. 方程组$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$在平面解析几何与空间解析几何中各表示什么?

14. 求曲面 $x^2+9y^2=10z$ 与 yOz 平面的交线.

15. 求曲线 $\begin{cases} x+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影方程.

16. 求曲线 $\begin{cases} z^2+y^2-2x=0 \\ z=3 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影方程.

17. 指出下列各方程组表示什么曲线:

(1) $\begin{cases} x+2=0, \\ y-3=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-4y^2+9z^2=36 \\ y=1; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2-4y^2=4z, \\ y=-2; \end{cases}$

18. 指出下列各平面的特殊位置

(1) $x=0$;　(2) $3y-1=0$;　(3) $2x-3y-6=0$;　(4) $x-\sqrt{3}y=0$;

(5) $y+z=1$;　(6) $x-2z=0$;　(7) $6x+5y-z=0$.

19. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 xOy 面且经过点 $(2,-5,3)$;　(2) 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$ 的平面方程;

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

20. 确定 k 的值, 使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一:

(1) 经过点 $(5,-4,-6)$;　(2) 在 y 轴上的截距为 -3.

§6.2 多元函数的基本概念

一、平面区域的概念

与数轴上邻域的概念类似, 我们引入平面上点的邻域的概念.

设 $P(x_0,y_0)$ 为直角坐标平面上一点, δ 为一正数, 称点集

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为点 P 的 **δ 邻域**, 记为 $U_\delta(P)$, 或简称为邻域, 记为 $U(P)$.

根据这一定义, 点 P 的 δ 邻域实际上是以点 P 为圆心、δ 为半径的圆的内部 (见图6-2-1).

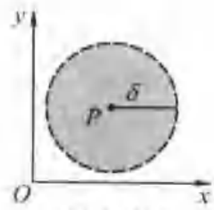


图 6-2-1

设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 则点 P 与点集 E 之间必存在以下三种关系之一.

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\subset E$, 则称 P 为 E 的**内点** (见图6-2-2 中的点 P_1).

(2) 如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P)\cap E=\varnothing$, 则称点 P 为 E 的**外点** (见图6-2-2 中的点 P_2).

(3) 如果点 P 的任意一个邻域内既有属于 E 的点也有不属于 E 的点, 则称点 P 为 E 的**边界点** (见图6-2-2 中的 P_3).

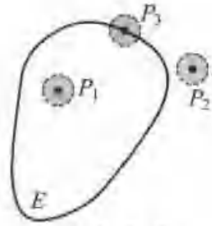


图 6-2-2