高等学校教材

高等代数与解析几何

▶ 牛兴文 编

化学工业出版社
教材出版中心

高等学校教材

高等代数与解析几何

牛兴文　编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京) 新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

高等代数与解析几何/牛兴文编．—北京：化学工业出版社，2005.10

高等学校教材

ISBN 7-5025-7257-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．牛…　Ⅲ．①高等代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材　Ⅳ．①015②0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 116616 号

高等学校教材

高等代数与解析几何

牛兴文　编

责任编辑：唐旭华

文字编辑：云　雷

责任校对：洪雅姝

封面设计：胡艳玮

*

化学工业出版社 教材出版中心 出版发行

（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）

购书咨询：(010)64982530

(010)64918013

购书传真：(010)64982630

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京市昌平振南印刷厂印刷

三河市海波装订厂装订

开本 787mm×1092mm　1/16　印张 26　字数 697 千字

2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-7257-0

定　价：39.00 元

内 容 提 要

高等代数的主要部分线性代数起源于解一次方程组．空间解析几何通过坐标系把平面与二次曲面的几何问题转化为线性代数问题，线性代数研究这些问题，得到矩阵和线性空间理论，与多项式代数一起构成高等代数．把空间解析几何与高等代数结合起来作为一门课程，既有助于理解和掌握抽象的代数概念，又有助于培养用代数方法解决几何问题的能力．

本书分为三个部分．第一部分由前两章构成，介绍逻辑和集合论的基本概念，用向量和矩阵的观点复习平面解析几何．第二部分包括第 3 章至第 7 章，从几何中提出问题，用矩阵方法给予解决，再回到解答的几何意义，分别介绍了仿射几何与度量几何．第三部分由第 8 章至第 12 章构成，介绍线性空间与欧氏空间理论，其中第 8 章一元多项式作为线性空间在几何向量空间和 n 维向量空间之外的例子而出现．

本书是作者在多年教学实践的基础上编写的，在深度和广度上符合《高等代数》、《空间解析几何》的教学要求，叙述详尽而流畅，论证严谨，并配有相当数量难易不等的例题与习题，可供高等院校数学、应用数学和信息与计算科学等专业作教材或自学使用．

纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系.

——弗·恩格斯

数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞. 数缺形时少直觉，形少数时难入微. 数形结合百般好，隔裂分家万事非. 切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离!

——华罗庚

前　言

当今数学的对象已远远不止于直接从现实世界抽象出来的形和数. 从最初的整数和几何图形出发，发展到群、环、域、模、格、拓扑空间和流形等各种高度抽象的数学结构，似乎失去了与现实世界的一切联系，以至于罗素称“数学是这样一门学科，在其中我们永远不会知道我们所讲的是什么，也不会知道我们所说的是不是真的.”

尽管如此，数学之根在于现实世界. 如果把空间形式和数量关系作为广义的抽象概念来理解，当今数学仍然是研究形和数的科学. 数学体现了人的认识能动性，它的原始根源在于操作活动的内化. 位置与距离来源于测量，数量关系来源于计数活动，现实世界的图景正是这样一些操作活动建构的产物.

最初，研究空间形式的几何学和研究数量关系的代数学各自经历了独立的发展. 古希腊的数学家们在综合几何学研究中取得了重大成就，以欧几里得的《几何原本》为标志，在公元前 3 世纪达到了高潮. 初等代数以解代数方程为主要内容，在中世纪的印度和中亚细亚得到了长足的发展. 文艺复兴时期，意大利人塔尔塔里亚和费拉里分别得到了三次方程和四次方程的解法.

1637 年，法国数学家勒奈・笛卡儿通过坐标系把几何和代数联系起来，建立了解析几何学. 这项划时代的成就影响极其深远，使得数学研究的对象从常量关系转变到变量关系，为微积分的出现奠定了基础.

在中学里，我们已经学习过平面几何、立体几何和平面解析几何. 平面几何和立体几何直接考察几何对象，所用的方法称为综合法. 平面解析几何通过建立平面直角坐标系，把平面上的点与有序实数对（坐标）一一对应起来，用二元一次方程和二元二次方程表示平面上的直线和圆锥曲线，把几何问题转化为代数问题来解决，这种方法称为坐标法. 用综合法给出的证明，经常要求某种新的、往往是奇巧的想法，过多地依赖于图形，笛卡儿批评“它只能在使人的想象力大大疲乏的情况下去练习理解力”. 坐标法则不然，它给出一般的解题方法，可以通过计算解决作图问题，求由某种几何性质给定的曲线和曲面的方程，用代数的方法证明几何定理，解释代数方程的几何意义，成为研究几何性质的强有力工具.

高等代数与解析几何，是大学数学系两门主要的基础课，二者之间具有密切的联系. 在几何空间中建立坐标系后，平面和直线可以表示为线性方程和线性方程组，平面和直线的相关位置问题可以转化为线性方程组的问题；反之，考虑二次方程和二次方程组的几何图形，又可以得到二次曲面和二次曲线，这就构成了解析几何的主要内容. 通过坐标系，几何问题可以转化为代数问题. 为了解决这些问题，我们建立代数概念，发展代数理论，大大拓展了原来的问题，得到线性代数与多项式代数，即高等代数的主要内容.

高等代数，无论它有怎样的几何背景和几何解释，在逻辑上它可以不依赖于几何独立发展，单独开课使得它的结构相对单纯. 解析几何则不然，它是用代数方法研究几何问题，离开了线性代数就没有解析几何，它必然要用到线性代数的概念与结论. 两门课单独开设，线性代数的一些概念与问题成了无源之水，解析几何要用到的代数概念和结论又很难提前给出，增加了学习的困难，不利于理解几何与代数的内在联系.

把高等代数与解析几何结合起来作为统一的课程，可以从几何中提出问题，建立坐标系后转化为代数问题；为了解决代数问题，在几何背景基础上自然地引入代数的概念与理论，得到代数问题的解答，再回到几何中去，通过坐标系得到代数解答的几何意义，即给出原来几何问题的解答. 本书尽量遵循上述想法，希望以几何直观促进对于代数概念的理解，以代数形式推广特殊的几何结论，真正做到既知其然，又知其所以然，达到培养分析问题和解决问题能力的目的.

为了与中学平面解析几何衔接，在较好几何直观下初步了解向量和矩阵的概念，第 2 章使用向量法引入平面仿射坐标系和平面直角坐标系，复习直线和圆锥曲线的度量性质，介绍它们的仿射性质，希望能起到温故而知新的作用.

本书注意区分仿射性质与度量性质. 第 3～5 章通过向量的线性运算引入仿射坐标系，讨论平面和二次曲面的仿射性质. 第 6、7 两章通过向量内积引入直角坐标系，讨论平面和二次曲面的度量性质. 第 9～11 章的线性空间理论与仿射性质具有密切的关系，可以看作是对后者的抽象描述. 第 12 章欧氏空间与酉空间则是度量性质的概括与推广.

本书采用了用性质定义对象的较高观点引入行列式的概念. 在第 2、3 章中讨论线性方程组公式解时通过计算引入二阶和三阶行列式的概念，并验证它们的性质. 在第 6 章通过向量外积和混合积的坐标表示解释二阶和三阶行列式的几何意义，用二阶和三阶行列式满足的性质定义 n 阶行列式，并且证明它的存在性和惟一性.

对于方阵的 Jordan 标准形定理，本书分别给出了一个基于初等变换的矩阵证明和一个基于幂零变换的几何证明. 前者所需准备知识极少，易于理解且篇幅较小，能同时给出计算变换矩阵的方法. 后者通过单构——幂零分解，把问题归结为幂零变换的相应问题，从幂零变换的核与象的交出发，构造出所需要的基组，有助于理解定理的几何意义.

在本书编写过程中，主要参考了北京大学数学系几何与代数教研室代数小组的《高等代数》和张禾瑞、郝炳新的《高等代数》、南开大学数学系的《空间解析几何引论》、丘维声的《解析几何》、朱鼎勋的《空间解析几何》和陈志杰主编的《高等代数与解析几何》，获益良多，谨致谢意.

本书的写作得到了北京化工大学理学院和数学系的大力支持. 本书的出版得到了化新教材建设基金的资助. 研究生章江华承担了繁重的抄写誊清工作. 在此一并表示深深的感谢!

限于编者水平，书中不妥之处在所难免，敬请读者予以批评指正.

编者

2005 年 9 月

目　　录

第1章 基本概念

在这一章中，将介绍一些来自集合论与逻辑的概念，作为本书的基础.

首先，扼要地复习在中学里已经有所了解的集合与映射，引入重集的概念；其次，介绍命题联结词与量词，引入命题的形式表达式，给出常用的逻辑定律和证明方法，并特别强调数学归纳法；然后介绍等价关系与序关系，这两种二元关系特别是等价关系在本书中具有特殊的重要性，初次接触可能感到空洞与抽象，在以后的学习中会通过实例得到充实、逐步加深理解的；最后，叙述整数的整除性和因数分解定理，并且介绍数环和数域的概念.

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

1.1.1.1 概念

集合是数学中最基本的概念，不能由其他概念出发来定义. 直观地讲，一定范围的、确定地、可以互相区别的事物，当作一个整体看待时，就称这些事物构成了一个集合，其中每一个事物都称为这个集合的元素.

一般地，用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示元素. 当 a 是 A 的元素时，记为 $a\in A$，称 a 属于 A；当 a 不是 A 的元素时，记为 $a\notin A$，称 a 不属于 A.

按照集合所含元素的个数，可以把集合分为有限集和无限集.

例如，由 1 和 −1 构成的集合是有限集；由所有非负整数构成的集合是无限集.

不含有任何元素的集合，约定称为空集，记为 $\varnothing$. 不是空集的集合称为非空集. 在一个讨论过程中，若所涉及的集合都是某个集合 U 的子集，可取 U 为全集.

1.1.1.2 表示法

集合有下列两种表示法.

当集合 A 恰好由 n 个元素 a_1，a_2，…，a_n 构成时，可记为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 这种方法称为枚举法.

设 P 是一个谓词，表示一种性质，$\mathrm{P}(x)$ 表示"x 具有性质 P"，则所有具有性质 P 的元素构成一个集合，可记为 $B=\{x\mid \mathrm{P}(x)\}$. 这种方法用性质给出集合，称为概括法.

例如，由 1 和 −1 构成的集合，既可以表示为 $\{1,-1\}$，又可以表示为 $\{x\mid x$ 是实数且 $x^2=1\}$.

1.1.1.3 包含和相等

设 A，B 是集合. 若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$，或称 B 包含 A，记为 $B\supseteq A$.

我们约定，空集是任何集合的子集，即对任何集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$.

包含关系具有下列三条性质：

(1) 自反性　对任意集合 A，$A\subseteq A$；

(2) 反对称性　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3) 传递性　若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

若两个集合 A，B 由完全相同的元素构成，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

显然，$A=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$.（注意，许多文献用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集，与本书的用法不同.）

1.1.2 集合的运算

1.1.2.1 定义

(1) 交 设 A，B 是集合，则 A，B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$.

显然，$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(2) 并 设 A，B 是集合，则 A 的元素与 B 的元素共同构成的集合称为 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$.

显然，$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

这里，“$x\in A$ 或 $x\in B$” 理解为 $x\in A$ 与 $x\in B$ 两个条件中至少有一个成立，不要求恰好有一个成立.

(3) 差 设 A，B 是集合，则 A 中所有不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差，记为 $A\setminus B$.

显然，$A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

$A\setminus B$ 也称为 B 在 A 中的余集或补集. 当 A 为全集时，约定记 $A\setminus B$ 为 $\sim B$. 显然 $\sim\sim B=B$.

(4) 积 设 A，B 是集合，则称 $\{(a,b)\mid a\in A$ 且 $b\in B\}$ 为 A 与 B 的积，也称为直积或笛卡儿积，记为 $A\times B$.

注意，当 $a\neq b$ 时，$(a,b)\neq(b,a)$. 例如，在平面直角坐标系中，$(1,0)\neq(0,1)$，表示坐标分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的两点是不同的.

1.1.2.2 运算律

集合的运算满足下列规律：

(1) 交换律 $A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) 对合律 $\sim\sim A=A$；

(5) 反演律 $\sim(A\cap B)=(\sim A)\cup(\sim B)$，$\sim(A\cup B)=(\sim A)\cap(\sim B)$.

以上每一个等式都表示一个全称命题. 以 $A\cap B=B\cap A$ 为例，它表示“对任意集合 A，B，$A\cap B=B\cap A$”.

1.1.2.3 运算律证明举例

例 1 证明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

证 先证 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

对于 $A\cap(B\cup C)$ 中任一元 x，有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，因而 $x\in B$ 或 $x\in C$.

若 $x\in B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，有 $x\in A\cap B\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

若 $x\in C$，则由 B，C 地位的对称性，也有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

所以，总有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，从而 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

再证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

由 $B\subseteq B\cup C$，有 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$，因为 $A\cap B$ 中任一元 x 满足 $x\in A$ 且 $x\in B\subseteq B\cup C$，有 $x\in A\cap(B\cup C)$. 同理可证 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$.

对 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 中任一元 x，或 $x\in A\cap B$，或 $x\in A\cap C$，总有 $x\in A\cap(B\cup C)$. 所以，$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$.

于是，得 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. ∎

1.1.2.4 多个集合的运算

由于有结合律，可以把交和并推广到多个集合的情形.

设 A_1，A_2，…，A_n 是集合，则可定义

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 \cap (A_2 \cap (\cdots \cap (A_{n-1} \cap A_n)\cdots))\ ;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \cup (\cdots \cup (A_{n-1} \cup A_n)\cdots))\ .$$

显然，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=\{x\mid$对所有满足 $1\leqslant i\leqslant n$ 的正整数 i，$x\in A_i\}$；$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\{x\mid$存在满足 $1\leqslant i\leqslant n$ 的正整数 i，$x\in A_i\}$.

一般地，设 A_α，$\alpha\in I$ 都是集合，则称 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是一个以 I 为指标集的集合族. 此时，可定义

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{对所有 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\}\ ;$$

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x \mid \text{存在 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\}\ .$$

集合的积也可以推广到多个集合的情形. 设 A_1，A_2，…，A_n 是集合，则定义

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \text{对所有满足 } 1\leqslant i\leqslant n \text{ 的正整数 } i,\ x_i \in A_i\}.$$

特别地，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，记为 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i = A^n$.

1.1.3 重集

通常情况下不考虑集合中有元素相等的情形. 但是，在一些特殊情况下，需要允许元素相等的集合的概念. 例如，设方程 $x=0$ 的根的集合为 A，方程 $x^2=0$ 的根的集合为 B，则 $A\neq B$；但按照通常集合包含与相等的定义，如 1.1.1.3 中所叙述的那样，有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，可得 $A=B$，产生矛盾. 所以，需要引入重集的概念.

允许元素相等的集合称为重集，或称为有重复度的集合. 对于重集 A 中每一个元素 a，称 A 中与 a 相等的元素的个数为 a 在 A 中的重数或重复度. 约定两个重集相等，当且仅当每一个元素在这两个集合中有相同的重数. 形式上，允许把 $a\notin A$ 称为 a 在 A 中的重数为 0.

显然，通常集合是其中每一个元素重数为 1 的重集，重集概念是通常集合概念的推广.

对于重集 A，B，包含关系可推广为：若每个元素在 A 中的重数不大于它在 B 中的重数，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$. 显然，重集的包含关系也满足 1.1.1.3 中的自反性、反对称性和传递性.

以下提到的集合，除特别声明之外，仍指通常集合.

1.1.4 集合的划分

1.1.4.1 定义

定义 设 A 是非空集. 若 A 的一些非空子集 A_α，$\alpha\in I$ 满足

(1) A_α，$\alpha\in I$ 两两互不相交，即当 $\alpha\neq\beta$ 时，总有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$；

(2) A_α，$\alpha\in I$ 的并为 A，即 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = A$ ，

则称 $\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 A 的一个划分.

例如，整数集 $\mathbf{Z}$ 可以划分为奇数集 A_1 和偶数集 A_2，即 $\{A_1,A_2\}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的一个划分.

命题 设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是 A 的一个划分，则 A 中元素具有如下性质：

(1) 对于 A 中任一元素 a，存在惟一的 $\alpha\in I$，使 $a\in A_\alpha$. 此时，记 $A_\alpha=A(a)$，称 $A(a)$ 是 a 所在的子集或类；

对 A 中任二元素 a，b，当且仅当 $A(a)=A(b)$ 时称 a 与 b 关于划分 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 同类，记为 $a\sim b$，则有

(2) $\sim$ 满足自反性、对称性和传递性，即有 $a\sim a$，由 $a\sim b$ 可推出 $b\sim a$，由 $a\sim b$ 与 $b\sim c$ 可推出 $a\sim c$.

1.1.4.2 划分的代表元系

设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是集合 A 的一个划分. 若有 A 的一个子集 B，使得对每一个 $\alpha\in I$，$B\cap A_\alpha$ 恰含一个元素，则称 B 是划分 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 的一个代表元系，且称 $B\cap A_\alpha$ 中的元素为子集 A_α 中的代表元.

例 2 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集，$A_i=\{m|m\in\mathbf{Z}$ 且 3 整除 $m-i\}$，$0\leqslant i\leqslant 2$，则

$$A_0=\{\cdots,-3,0,3,\cdots\},\ A_1=\{\cdots,-2,1,4,\cdots\},\ A_2=\{\cdots,-1,2,5,\cdots\}.$$

显然，$\{A_0,A_1,A_2\}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的一个划分.

在 A_0，A_1，A_2 中各取一个元素 0，1，2，构成 $B_1=\{0,1,2\}$，则 B_1 构成划分 $\{A_0,A_1,A_2\}$ 的一个代表元系.

一般地，给定划分的代表元系是不惟一的. 例如，$B_2=\{1,2,3\}$，$B_3=\{-3,-2,-1\}$，$B_4=\{-2,-1,0\}$ 都是上边划分的代表元系.

设 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$ 是集合 A 的一个划分，$A(a)$ 是 a 所在的子集，则 $\{A(a)|a\in A\}$ 一般是重集，可以通过在 $\{A(a)|a\in A\}$ 中对每一个重数大于 1 的元素删去相等元素使之重数为 1 的方法，回到原来的划分.

习 题 1.1

1. 证明：$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\setminus B=\varnothing$.
2. 证明：若 $B\subseteq C$，则 $A\cap B\subseteq A\cap C$，$A\cup B\subseteq A\cup C$.
3. 证明：下列三个条件等价：

(1) $A\subseteq B$；(2) $A\cap B=A$；(3) $A\cup B=B$.

4. 证明 1.1.2.2 中的 (5).
5. 若把“$x\in A$ 或 $x\in B$”理解为 $x\in A$ 与 $x\in B$ 两个条件中恰有一个成立，用 A 和 B 通过集合运算表示 $\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

1.2 映射

1.2.1 映射的概念

1.2.1.1 定义

定义 1 设 M，N 是集合. 若对 M 中每一个元素（也可称为元）x，根据某个法则，都有 N 中一个惟一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应法则是 M 到 N 的一个映射.

一般地，用小写希腊字母 σ，τ，…表示映射，用 σ: $M\to N$ 表示 σ 是 M 到 N 的映射，M 称为映射 σ 的定义域，N 称为映射 σ 的上域. 若通过映射 σ，M 中的元素 x 与 N 中的元素 y 对应，则称 y 是 x 在映射 σ 下的像，记为 $y=\sigma(x)$，或 σ: $x\mapsto y$，且称 x 是 y 在映射 σ 下的一个原像.

注意，像与原像的地位是不对称的. 对映射 σ: $M\to N$，M 中每一个元素 x 在 σ 下有惟一的一个像 $\sigma(x)$；但 N 中的元素 y 在 σ 下却未必有原像，即使有原像，原像也未必惟一.

集合 M 到 M 自身的映射称为 M 的变换.

1.2.1.2　例子

例 1　设 $\boldsymbol{Z}$ 是整数集，则 σ：$\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$，$n\mapsto 2n$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 的变换.

例 2　设 M，N 是集合，$y\in N$. 对 M 中每一个元 x，规定 $\sigma(x)=y$，则 σ 是 M 到 N 的映射. 这样的映射称为常值映射，可以看作是常值函数的推广.

例 3　设 M 是非空集. 对 M 中每一个元 x，规定 $\sigma(x)=x$，则 σ 是 M 的一个变换，称为 M 的恒等变换或单位变换，记为 1_M.

例 4　设 $\boldsymbol{R}$ 是实数集，$y=f(x)$ 是实函数，即在 $\boldsymbol{R}$ 中定义且在 $\boldsymbol{R}$ 中取值的函数，则 f 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个变换. 所以，实函数是映射的特殊情形.

1.2.1.3　相等与限制

（1）相等　设 σ，τ 是映射，且有相同的定义域和相同的上域 N. 若对 M 中每一个元 x，都有 $\sigma(x)=\tau(x)$，则称 σ 与 τ 相等，记为 $\sigma=\tau$.

注意，按上述规定，上域不同的映射是不相等的.

（2）限制　设 σ：$M\to N$ 是映射，$A\subseteq M$，则可定义 τ：$A\to N$，对 A 中每一个元 x，规定 $\tau(x)=\sigma(x)$. 此时，称 τ 为 σ 在 M 的子集 A 上的限制，记为 $\tau=\sigma|_A$.

设 σ，τ 都是 M 到 N 的映射，且 $A\subseteq M$，则由 $\sigma=\tau$ 可以推出 $\sigma|_A=\tau|_A$. 反之则未必，即由 $\sigma|_A=\tau|_A$ 推不出 $\sigma=\tau$.

1.2.2　映射的乘法

1.2.2.1　定义

定义 2　设 σ：$M\to N$，τ：$N\to L$ 是映射，则可定义一个新的映射 ρ：$M\to L$ 如下：对 M 中任一元 x，规定 $\rho(x)=\tau(\sigma(x))$，称 ρ 是 σ 与 τ 的乘积，记为 $\rho=\tau\sigma$.

注意，只有 σ 的上域与 τ 的定义域相同时，σ 与 τ 才能相乘. 映射的乘法可用交换图表示，如图 1.1 所示.

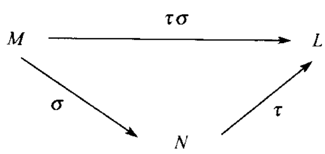

图 1.1

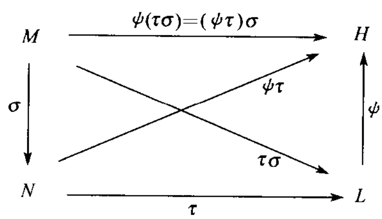

图 1.2

1.2.2.2　性质

定理 1　设 σ：$M\to N$，则 $1_N\sigma=\sigma 1_M=\sigma$.

证　由映射乘法的定义，$1_N\sigma$，$\sigma 1_M$，σ 都是 M 到 N 的映射.

对 M 中任一元 x，$(\sigma 1_M)(x)=\sigma(1_M(x))=\sigma(x)$，有 $\sigma 1_M=\sigma$；$(1_N\sigma)(x)=1_N(\sigma(x))=\sigma(x)$，又有 $1_N\sigma=\sigma$.

所以，$1_N\sigma=\sigma 1_M=\sigma$. ∎

定理 2　映射的乘法满足结合律，即对映射 σ：$M\to N$，τ：$N\to L$，ψ：$L\to H$，有 $\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma$.

证　如图 1.2 所示，$\tau\sigma$：$M\to L$，进而 $\psi(\tau\sigma)$：$M\to H$；类似地，有 $\psi\tau$：$N\to H$，进而 $(\psi\tau)\sigma$：$M\to H$.

对 M 中任一元 x，

$$(\psi(\tau\sigma))(x)=\psi((\tau\sigma)(x))=\psi(\tau(\sigma(x))),$$

$$((\psi\tau)\sigma)(x)=(\psi\tau)(\sigma(x))=\psi(\tau(\sigma(x))).$$ ∎

所以，$\psi(\tau\sigma)=(\psi\tau)\sigma$.

1.2.2.3 子集的像与原像

(1) 子集的像　设 σ：$M\rightarrow N$ 是映射，$M_1\subseteq M$，则称 $\{\sigma(x)\mid x\in M_1\}$ 为 M 的子集 M_1 在映射 σ 下的像，记为 $\sigma(M_1)$. 特别地，称 $\sigma(M)$ 为 σ 的像，记为 $\mathrm{Im}\sigma=\sigma(M)$.

若 $M_1\subseteq M_2\subseteq M$，则 $\sigma(M_1)\subseteq\sigma(M_2)\subseteq\sigma(M)=\mathrm{Im}\sigma$.

(2) 子集的原像　设 σ：$M\rightarrow N$ 是映射，$N_1\subseteq N$，则称 $\{x\mid x\in M$ 且 $\sigma(x)\in N_1\}$ 为 N 的子集 N_1 在映射 σ 下的原像，记为 $\sigma^{-1}(N_1)$.

若 $N_1\subseteq N_2\subseteq N$，则 $\sigma^{-1}(N_1)\subseteq\sigma^{-1}(N_2)\subseteq\sigma^{-1}(N)=M$.

对 N 的任一子集 N_1，都有 $\sigma(\sigma^{-1}(N_1))=N_1$.

对 M 的任一子集 M_1，都有 $\sigma^{-1}(\sigma(M_1))\supseteq M_1$. M_1 确有可能是 $\sigma^{-1}(\sigma(M_1))$ 的真子集.

(3) 例子

例 5　设 $\boldsymbol{R}$ 是实数集，f_i：$\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$，$1\leqslant i\leqslant 4$ 定义如下：

① f_1：$x\mapsto x^3$；

② f_2：$x\mapsto x^2$；

③ f_3：$x\mapsto\begin{cases}\tan x & 当\ x\neq k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\ 时;\\ 0 & 当\ x=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\ 时;\end{cases}$

④ f_4：$x\mapsto\arctan x$；

则 f_1，f_2，f_3，f_4 都是实函数，图像如图 1.3 所示.

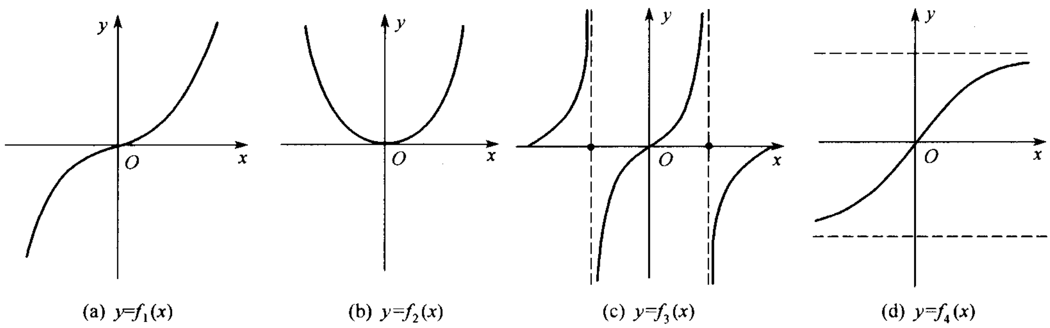

图 1.3

取 $M_1=N_1=[0,+\infty)$，则有

$$f_2(f_2^{-1}(N_1))=f_2(\boldsymbol{R})=N_1;$$

$$\boldsymbol{R}=f_2^{-1}(N_1)=f_2^{-1}(f_2(M_1))\supset M_1.$$

这里 $[0,+\infty)$ 表示 $\{x\mid x\in\boldsymbol{R}$ 且 $x\geqslant 0\}$.

1.2.3 满射与单射

1.2.3.1 满射

定义 3　若映射 σ：$M\rightarrow N$ 满足 $\mathrm{Im}\sigma=N$，则称 σ 为满射.

在例 5 中，$\mathrm{Im}f_1=\mathrm{Im}f_3=\boldsymbol{R}$，所以 f_1，f_3 是满射. $\mathrm{Im}f_2\neq\boldsymbol{R}$，$\mathrm{Im}f_4\neq\boldsymbol{R}$，所以 f_2，f_4 不是满射.

在图 1.3 中，平行于 x 轴的任一直线与 f_1，f_3 的图像至少交于一点；确有平行于 x 轴

的直线与 f_2，f_4 的图像不相交．用映射的术语叙述，即有

定理 3 映射 σ：$M\to N$ 是满射的充要条件是 N 中每一个元在 σ 下至少有一个原像．

证 必要性．若 σ：$M\to N$ 是满射，则 $\mathrm{Im}\sigma=N$．对 N 中任一元 y，有 $y\in N=\mathrm{Im}\sigma=\sigma(M)$，存在 $x\in M$，使 $y=\sigma(x)$，即 y 在 σ 下有原像 x．

充分性．若 N 中每一个元在 σ 下至少有一个原像，则对 N 中任一元 y，存在 $x\in M$，使 $y=\sigma(x)$，有 $y=\sigma(x)\in\sigma(M)=\mathrm{Im}\sigma$，$N\subseteq\mathrm{Im}\sigma$．又由映射的定义，有 $\mathrm{Im}\sigma\subseteq N$．所以，$\mathrm{Im}\sigma=N$，$\sigma$ 是满射． ▮

1.2.3.2 单射

定义 4 设 σ：$M\to N$ 是映射．若对于 M 中任二元 $x_1\neq x_2$，总有 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$，则称 σ 是单射．

在例 5 中，f_1，f_4 满足定义 4 中的条件，因而是单射．f_2，f_3 不满足定义 4 中的条件，因而不是单射．

在图 1.3 中，平行于 x 轴的任一直线，与 f_1，f_4 的图像至多交于一点；确有平行于 x 轴的直线与 f_2，f_3 的图像至少交于两点．用映射的术语叙述，即有

定理 4 映射 σ：$M\to N$ 是单射的充要条件是 N 中每一个元在 σ 下至多有一个原像．

证 必要性．反设不然，则 N 中有一个元 y 在 σ 下至少有两个原像 x_1，x_2，即有 x_1，$x_2\in M$，$x_1\neq x_2$ 且 $\sigma(x_1)=y=\sigma(x_2)$，与 σ：$M\to N$ 是单射矛盾．

充分性．对 M 中任二元 $x_1\neq x_2$，必有 $\sigma(x_1)\neq\sigma(x_2)$．否则，存在 x_1，$x_2\in M$，$x_1\neq x_2$ 且 $\sigma(x_1)=\sigma(x_2)=y\in N$，$y$ 在 σ 下至少有两个原像 x_1，x_2，与题设矛盾．由定义，即有 σ 为单射． ▮

通过上面的分析可知，在例 5 中，f_1 既满又单，f_2 既不满又不单，f_3 满而不单，f_4 单而不满，分别代表了四种情况．

1.2.3.3 双射

定义 5 既是满射又是单射的映射称为双射．

定理 5 映射 σ：$M\to N$ 是双射的充要条件是 N 中每一元在 σ 下有一个原像且只有一个原像．

证 必要性．由 σ 为双射，有 σ 为满射．由定理 3，N 中每一元在 σ 下至少有一个原像．由 σ 是双射，有 σ 为单射．由定理 4，N 中每一元在 σ 下至多有一个原像．因此，N 中每一元在 σ 下恰有一个原像．

充分性．由题设，N 中每一元在 σ 下至少有一个原像．由定理 3，σ 为满射．又由题设，N 中每一元在 σ 下至多有一个原像．由定理 4，σ 为单射．所以，σ 为双射． ▮

设 M，N 是集合．若存在 M 到 N 的双射，则称 M 与 N 是等势的．集合的等势关系满足自反性、对称性和传递性．

若集合 S 与前 n 个自然数的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 等势，则称 n 是集合 S 的势或基数，记为 $|S|=n$．显然，有限集的基数即集合中所含元素的个数．

1.2.4 可逆映射

设 σ：$M\to N$ 是双射，由定理 5，N 中每一元在 σ 下有惟一原像．因此，可以定义一个 N 到 M 的映射 τ，对 N 中每一元 y，取 $\tau(y)$ 为 y 在 σ 下的原像．于是，当且仅当 $y=\sigma(x)$ 时，$\tau(y)=x$．

定义 6 设 σ：$M\to N$ 是映射．若有映射 τ：$N\to M$ 满足 $x=\tau(y)$ 当且仅当 $y=\sigma(x)$，则称 σ 是可逆映射，且称 τ 是 σ 的逆映射．

显然，双射是可逆映射．