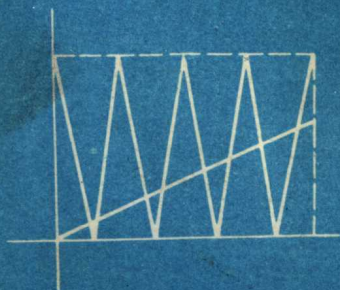


$$C_n^r$$

$$P_{100}^3$$

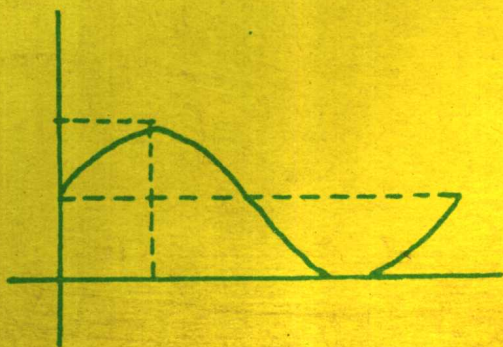


解数学选择题 30 法

$$n!!$$

$$2^{n^{n+1}}$$

孙国璋 编



科学普及出版社

解数学选择题 30 法

孙国璋 编

科学普及出版社

内 容 提 要

本书较全面地介绍了数学选择题的构造特点, 解题技巧, 重点是系统地介绍解这种新型题的解法, 使学生解选择题达到一准二快的目的。本书适用于高中学生及从事中等数学的教研人员参考使用。

[京]新登字 026 号

解数学选择题 30 法

孙国璋 编

责任编辑: 于惊涛

封面设计: 李有志

科学普及出版社出版(北京海淀区白石桥路 32 号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

大连铁道学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: 9.2 字数: 194 千字

1991 年 10 月第一版 1991 年 10 月第一次印刷

印数: 1-15,000 册 定价: 3.80 元

ISBN 7-110-01836-9/O·52

序

选择题是新近发展起来的一类题型,可以说是对传统题型的一种改革。由于它除了题目本身而外,还给出了若干选择支,且正确者就在其中。这组选择支的作用对考查学生准确悟出或一眼看出的直觉思维能力十分有利,因为量大面广,拘泥于细节往往做不完。另一方面这些选择支提供了丰富的信息源,每个选择支从正面或反面指示出解答途径,选择支的总体则从可能的许多对象的集合中划出一个范围,告诉你解就在其中,非此即彼,因此必须左右逢源,灵活应用,方能迎刃而解。这对概念清晰、思维敏捷的人来说,这种增加的信息源是十分宝贵的,但对概念模糊、思维迟钝的人来说,则容易受到干扰。因此这类题型突出了培养和考核对信息进行分析处理和运用的能力。有利于训练对与所考虑的问题有关的信息极为敏感的创造型人才。另外这种题型还有利于培养学生的应变能力和迅速处理信息的能力。因为人们面临的实际问题一般不会“束手无策”而往往有几个可能的方案或对策,要求人们迅速地从中选定正确的或最优的方案,而不允许繁冗的解题过程,因为许多实际问题解答不及时就失去意义了。上述作用恐怕就是选择题被广泛采用于各类考试中的一些主要因素。当然解答选择题,包含有猜测成分,因此人们对这种题型的客观性和可信程度还有不同看法,这就需要对此类题型从理论上加以探讨,科学地合理地设计试题的得分与扣分才能解决。

数学选择题方面的辅导读物曾出版了几本,但有的有答无解,有的就题论题,难免此长彼短,厚薄不均。系统地、全面地、

深入浅出地组织得既有科学性、又有实用性,富于启发、颇多教益的资料,颇有凤毛麟角之感。常言道:“授人以鱼莫如授人以渔”,人们需要的是“点石成金”的方法,而不仅仅是现成的,色彩鲜艳的金子。这本《解数学选择题 30 法》的书,从科学方法论角度出发,系统总结了某些带规律性的方法和技巧,构筑起了一个有机的,开放性的知识体系,自给自足,以法带题,用题论法,法理兼顾,匠心独具。校阅之后,深深感到此类著作的不断涌现,乃是中学数学教学研究兴旺发达的标志之一。欣喜之余,特以为序。

朱秉林

一九九〇年十一月一日

前 言

古人云：授人以鱼，只供一饭之需，教人以渔终身受用无穷。

1. 数学选择题是近些年才发展起来的新的题型，教科书里几乎没有这类习题，虽然课外材料中已填补了这方面的空白，但多数只编一些习题与答案，而忽略探索其独特的各类解法。为满足广大读者和高中生的要求，结合国内外出现的各类选择题，我汇总了选择题解法 30 种，对每种解法都阐述了它的理论依据并配备典型范例和适当的练习题，供各类考试和复习选用。

2. 解选择题要一准二快。①“间接法；倒观察。”解一个选择题应先考虑间接法（如淘汰法，特例法等），其次再考虑直接法（当然这些方法还要联合使用）以便充分利用选择支所提供的信息。对于题中所给的 A, B, C, D 选择支，有时采用 D, C, B, A 的顺序观察较好，抽样统计表明 70% 以上的选择题正确支不放 A 处，60% 以上的选择题正确支不放 B 处，这样倒观察就相对地提高了解题速度。②引入淘汰记号：“(A)”表示(A)被淘汰掉。③要多方思维广泛联想。

什么是广泛联想呢？请看

例 1 证明不等式 $\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2+2x+2} \geq 2\sqrt{2}$

(法 1)： $\sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2+2x+2} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 +$

$$\sqrt{x^4+4} \geq 2.$$

若想到两点距离公式就得

(法 2)：配方 左边 $= \sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{(x+1)^2+1}$ 它表示动点 P(x, 0) 到定点 A(1, -1), B(-1, 1) 的距离之和，易见

$$|PA| + |PB| \geq |AB| = 2\sqrt{2}.$$

若想到公式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 想到椭圆, 想到复数……又会得到法 3, 法 4, 法 5……

例 2 当 $x \geq 0$ 时证明 $1 + \frac{1}{5}x \geq \sqrt[5]{1+x}$.

如果想到 $1 + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}(1+1+1+1+1+x)$ 马上就有 $\frac{1}{5}[1+1+1+1+(1+x)] \geq \sqrt[5]{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times (1+x)}$, 即 $1 + \frac{1}{5}x \geq \sqrt[5]{1+x}$.

例 3 比较大小: $\frac{6}{11}, \frac{10}{17}, \frac{12}{19}, \frac{15}{23}, \frac{20}{33}, \frac{60}{37}$.

按常规“化同分母”太繁, 若用反常作法“化同分子”就容易得到 $\frac{6}{11} < \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23} < \frac{60}{37}$.

例 1 的各种解法是定型的方法, 例 2 例 3 的解法是不定型的方法. 再看一则笑话: 隋朝侯白所撰《启颜录》中记载石动筒的故事, 他向国学中的博士们说: “孔夫子那七十二个学生结过婚的有多少没结婚的有多少?” 问得博士们回答不出, 说经传上全无记载谁也不知道. 石动筒说: “先生们读了书怎能不知道孔夫子那七十二个学生结过婚的三十个, 没结婚的四十二个呢?” 博士们说: “哪本书上写的?” 石动筒道: “《论语》上有‘冠者五六人童子六七人’^①——五六三十, 六七四十二, 三十加四十二不正是七十二吗?” 逗得人们大笑. 这虽是笑话, 但说明石动筒想得还

① 《论语》十一章: 点曰: “莫春者春服既成, 冠者五六人童子六七人, 浴乎沂, 风乎舞雩, 咏而归。”冠者, 古代指成年结婚的男人, 这里石动筒断章取义做为笑话的依据.

是很巧的。俄国大数学家罗巴切夫斯基发现非欧几何时就想得很反常,以致人们说他是疯子。在数学问题中好的解法都是想得很巧的想得与众不同的。解数学题尤其需要广泛联想,要“思绪万千,浮想联翩。”我这里列出的三十种方法也是为广泛联想用的,而这些方法还必须以掌握牢固认识深刻的知识为前提,单就方法论是收不到良好效果的。还是华罗庚教授说得对:方法是死的,人是活的,运用之妙存乎其人。我们的学生往往是见题就埋头运算,苦心推证,缺乏核验结果判断是非和摒弃谬误的能力,这正是答不好选择题的主要原因。

3. 这里的方法当然可用来解其它类型题,如是非题,填空题,一般的求解(证)问题。

4. 书中之选择题都是“所给结论中只有一个正确的。”* 号部分为选学内容。

本书适用于高中程度的读者作为学习或备考之用,也可作为师范院校数学系师生及教研人员研究中等数学的参考。

书中有些问题是笔者听高考命题老师讲的。书中有些材料取自东北工学院王振范付教授旅日时带回的一些国外资料,并经其审阅。

本书初稿经辽宁教育学院魏超群老师阅过并提出了许多宝贵意见,全书经辽宁师范大学数学系朱秉林教授审阅。作者谨向王振范先生、魏超群先生表示感谢。

在近些年的教学和教研工作中,笔者一直得到我的老师辽宁师范大学数学系朱秉林教授的支持与鼓励,尤其在本书的写

作过程中为笔者查实大量资料审核全部文稿,谨在此表示衷心的感谢!并感谢王淑范同志在写作过程中所给予的照顾和付出的劳动。

本书带有*号的题,一般难度较大,可视情况选做。

由于作者的水平所限书中错误在所难免,恳请读者批评指正。

孙国璋

一九九〇年十一月

目 录

第一章 选择题概论	(1)
一、选择题界说	(1)
二、选择题的构成和编拟原则	(2)
三、编拟数学选择题的常用方法	(5)
第二章 解数学选择题的方法	(10)
一、淘汰法.....	(10)
练习一	(20)
二、特例法.....	(23)
练习二	(29)
三、正推法.....	(34)
练习三	(41)
四、倒推法.....	(44)
练习四	(45)
五、分析法.....	(48)
练习五	(50)
六、验证法.....	(52)
练习六	(54)
七、图解法.....	(56)
练习七	(61)
八、单位圆法.....	(65)
练习八	(67)
九、Venn 图法	(69)
练习九	(72)

十、放缩法.....	(73)
练习十	(75)
十一、变换法.....	(77)
练习十一	(79)
十二、反证法.....	(81)
练习十二	(84)
十三、分解法.....	(86)
练习十三	(87)
十四、猜想法.....	(88)
练习十四	(94)
十五、列表法.....	(96)
练习十五	(98)
十六、筛 法	(100)
练习十六	(102)
十七、先退后进法	(103)
练习十七	(106)
十八、极限法	(107)
练习十八	(108)
十九、对称法	(110)
练习十九	(116)
二十、辅助元法	(118)
练习二十	(120)
二十一、观察法	(122)
练习二十一	(124)
二十二、逐步逼近法	(128)
练习二十二	(130)
二十三、导数法	(131)

练习二十三	(132)
二十四、置换法	(134)
练习二十四	(137)
二十五、条件分离法	(138)
练习二十五	(139)
二十六、根的隔离法	(140)
练习二十六	(143)
二十七、典型题法	(144)
练习二十七	(146)
二十八、不动点法	(148)
练习二十八	(150)
二十九、构造法	(151)
练习二十九	(157)
三十、平移法	(161)
练习三十	(164)
第三章 选择题汇编	(166)
一、历届全国高考数学选择题	(166)
二、上海、广东高考数学选择题	(187)
三、历届全国高中生数学联赛选择题	(212)
练习参考答案	(220)
附录1 组合数表	(273)
附录2 主要参考资料	(277)

第一章 选择题概论

一、选择题界说

选择题是近些年才发展起来的一种新型试题,在国内外的各种考试中占比例很大,有些考试 90% 乃至 100% 用选择题。我国高考数学试题,从 1983 年开始使用选择题,其份量约占 40% 左右。

选择题通常是对一个题目给出几个答案(一般四个),要求应试者从中选出正确答案。选择题是客观性试题中功能最多、用途最广的一种题型,它适用于多种测验内容,测验多种数学目标,适用广泛的测试情景。

选择题的试卷容量大,知识和智能的复盖面广,可以避免一般解答题或证明题由于数量的限制取样不足所造成的局限性,也比“正误”题容易排除猜测对分数的影响,有利于准确地评定成绩。它不仅可以测量应试者的记忆能力,而且可以测量理解、思考和分析判断等能力。

选择题可以保证一定的效度^①,有利于提高应试者解决问题的速度和分析判断能力。选择题试卷不要求把解题过程写出来,只要求写出正确答案,这就相对地增加了应试者的思考时间,提高了答题的智力因素。追踪研究表明选择题得分多的学生在以后的学习工作中有成就的人也多。

选择题的试卷评卷简便、客观,能克服传统评卷时易出现的

^① 效度:判断一个测验优劣的两个基本原则是测验的正确性与可靠性。测验的正确性又叫测验的效度,效度或定义为:“测验目的有效性。”可靠性又叫信度。

主观因素的影响,有利于使用计算机评卷,使评分工作自动化。

选择题确实存在着盲目得分的偶然性,一道“四挑一”的选择题,任选一个选择支其正确性的概率是 $\frac{1}{4}$,为了消除这一不足,常采用下列办法。

(1)采用记分公式。例如用 $R - \frac{W}{N-1}$ (R —得分, W —总分与得分之差, N —选择支数)进行调整。或用“答对得满分,答错得 0 分,不答得 1 分”等办法。我国 1984~1986 年的数学竞赛就采用后一种方法评分。

(2)采取半标准化题型考试,即试卷的一半采用选择题,利用机器评分,另一半保留传统题型。我国现在高考就采用这种办法。

二、选择题的构成和编拟原则

1. 选择题的构成

选择题由三部分构成:

(1)题前指导语。题前指导语一般包括三方面内容:所求答案个数、答题方法、评分方法。题前指导语很重要,它是指导下面问题如何回答才能得分的关键词语,不能忽视。

例如 1987 年全国高考数学试题第一题(即选择题)的题前指导语为:(本题满分 24 分)本题共有 8 个小题,每一小题都给出代号为 A, B, C, D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把你认为正确的结论代号写在题后的圆括号内,选对得 3 分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否写在圆括号内)一律得 0 分。

(2)题干。题干部分一般有两种句型:一种是不完全陈述句,一种是疑问句。

(3)选择支。选择支则由正确支(即正确项)和干扰支(即错误项)组成。

例如(题干是不完全陈述句型)

2^{100} 的个位数为_____ (题干)

(A)2 (B)4 (C)6 (D)8 (选择支)

在选择支中 A,B,D 为干扰支,C 为正确支。如果改成疑问句型就为

下面给出的四个数中,哪个数是 2^{100} 的个位数?

(A)2 (B)4 (C)6 (D)8

另外,题干还有否定句型的,例如“下列命题不正确的是”等语句。

有多个选择支的选择题称为多重选择题,有四个选择支的选择题也称一元选择题,有四个选择支的单项选择题有时简称“四挑一”。我国全国高等学校招生统一考试的数学试题中的选择题都是“四挑一”的。

2. 选择题编拟原则

编拟选择题是一项细致而艰苦的工作,需要教师从调查研究入手,认真收集学生解题中的错误,加以分类,从教育学心理学的高度分析产生错误的原因,然后精心设计选择支,这样干扰支才具有吸引力,正确支才具有隐蔽性,编出的题目才有针对性。

一般认为选择题的编拟要领和原则如下:

- (1)每题所列选择支数目应相同,一般以四个为宜。
- (2)选择支按逻辑顺序排列,正确支的位置要有随机性。
- (3)叙述要简单明了,表达力求完整。在语言表述上最好与

课本一致,以消除其它因素对考察知识的影响。

(4)选择支要简明扼要,正确支要有隐蔽性,干扰支要起到干扰作用。选择题与传统题的最大区别就在于选择题增添了干扰支,可以说选择题的编拟关键是干扰支的配备。一般地说,干扰支是与所给问题有密切关系的错误结论,它和正确支放到一起以假乱真,起干扰作用,如果干扰支一望而知,则如同虚设,选择支就失去了意义。

(5)选择题的命题要注意严谨性。数学的特点之一是它具有准确性和严密性,而选择题的题干与其正确支组成一个正确的数学命题。例如:

$f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=|\sin x|$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上都是()

(A)周期函数

(B)奇函数

(C)增函数

(D)以上都不对。

本题答(D)。但这时命题为“ $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上都是以上都不对”显然很不严谨。再如:

实数 $a=0$ 是直线 $x-2ay=1$ 与 $2x-2ay=1$ 平行的()

(A)充分条件

(B)必要条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件。

本题答(C),但(A),(B)也对,这就与“只有一个正确”造成逻辑上的不严密。

(6)选择题应既“小”又“活”。

所谓“小”是指其份量不能过重,即从题干的条件到正确支的结论的途径不能过于复杂,运算量不能过大,判断手续不能过繁,这是因为从考试角度讲使用选择题一方面为了评卷方便,另

一方面是为了提高信度(见1页)扩大复盖面,增加试卷容量,国内外考试一般地要求平均每题1~3分钟,每题的得分在3%~5%,如果选择题分量增大了势必导致其分量与分数不统一。不仅考试时选择题要小,就是练习时也要用小型选择题,让每个题突出一个主要问题,加强训练的针对性。若是所设“陷阱”过多,即使了解到解题的错误,也难于察觉错误之所在,达不到信息反馈的目的。

选择题所谓“活”,是指其解法比较灵活,即从题干的条件到正确结论的途径可以多条,此路不通走彼路,这样既可培养学生从各个不同的侧面考虑问题的习惯,又可以通过不同的方法互相检验和印证结论。

三、编拟选择题的常用方法

1. 将某一问题可能出现的所有结论列举出来做为选择支

这种方法适用于问题的可能答案较少的情况。如判断充要条件的问题,可设为:(A)充分但不必要条件(B)必要但不充分条件(C)充要条件(D)既不是充分条件也不是必要条件。再如,根据正方体的截面只有四种,可编:

例1-1 在正方体 AC' 中,点E,F,G分别为棱AB,BC,DD'的中点,则过E,F,G的截面是()

(A)三角形 (B)四边形 (C)五边形 (D)六边形

2. 根据易混概念设计选择支

如复数与实数的性质易混,可编:

例1-2 下列四个命题中正确的是()

(A)任何复数的偶次幂不小于零

(B)任何两个复数不能比较大小