中学数学错解例析

错在哪里?

CUOZAINALI

安徽教育出版社

错在哪里?

CUOZAINALI

——中学数学错解例析

安徽教育出版社

责任编辑：蒋美荣
封面设计：李向伟

错在哪里？

中学数学错解例析

本 社 编

*

安徽教育出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行　六安新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：13.25　字数：220,000
1984年9月第1版　1984年9月第1次印刷
印数：62,000
统一书号：7276·143　定价：1.70元

本书汇编的370多道例题，是征集我省广大数学教师的稿件及安徽《中学数学教学》杂志社的部分稿件筛选而成的。所选例题多是教材中的重点、难点内容。尤其选用了考查学生掌握基本概念和基本理论程度的问题。

每道例题都从学生的角度考虑，并附有错误剖析和正确解法。指出错误的症结和正确思路。一误一正，观点鲜明。读者通过分析比较，必有收益。是中学生的课外读物和中学数学教师的参考书。

目　　录

第一部分　代　数

一　代数式的恒等变形

把一个代数式换成另一个和它恒等的代数式，叫做代数式的恒等变形（或叫恒等变换）。整式、分式、根式的运算，因式分解等等都是恒等变形。这里以分式恒等变形和根式恒等变形为主，选择了一些常见错例供读者分析研究。这些错误初学者是常会犯的，例如，不注意运算的顺序问题；不注意分式、根式运算中字母取值的限制与讨论；不能正确运用有关比例的性质等等。特别是关于算术根的问题，一定要彻底弄清概念，否则，不仅根式这部分学不好，对以后内容的学习都会有一定的影响。例如，需特别注意 $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$，$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a$，以及算术根的性质和运算法则的应用条件等等。

这一部分最后有两个属于整数性质的问题，解题中除了用到整数性质的知识外，也还需要运用代数式的恒等变形知识，可见对学生进行恒等变形能力的培养是一种重要的基本技能训练。

1．化简：$\dfrac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\div\dfrac{(a-b)^2}{a^2-ab+b^2}\times\dfrac{1}{(b-a)^2}$

错解　原式$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\div\dfrac{(a-b)^2}{a^2-ab+b^2}$

$$\times\frac{1}{(b-a)^2}$$

$$=\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}\times(a^2-ab+b^2)=a-b.$$

剖析 乘、除属于同级运算，应按先后顺序做，在本题中，应先“除”后“乘”，而不能先算后面的乘法。本题的错误是相当于把题改为

$\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\div\left[\frac{(a-b)^2}{a^2-ab+b^2}\times\frac{1}{(b-a)^2}\right]$，而它已经不是原题了。

正确解法

$$\text{原式}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\times\frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2}\times\frac{1}{(b-a)^2}$$

$$=\frac{1}{(a-b)^3}.$$

（蚌埠二十七中 孙敦清）

2. 计算：$\dfrac{2|x|}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x-1}}}$

错解 原式$=\dfrac{2|x|}{1+\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{2|x|}{\dfrac{2x}{x+1}}=\dfrac{|x|(x+1)}{x}$

$$\therefore\ \text{原式}=\begin{cases}x+1 & (x>0),\\ -(x+1) & (x<0).\end{cases}$$

剖析 上述解法虽反映出对分式运算法则是熟练的，对绝对值的概念是清楚的，但对分式恒等变形中字母取值应该使分式有意义这一点却注意不够。事实上当$x=0, x=1, x=-1$时，原分式都失去意义。

正确解法 原式$=\begin{cases}x+1 & (x>0,\ x\neq 1);\\ -(x+1) & (x<0,\ x\neq -1).\end{cases}$

（合肥三十七中 曹庆国 袁 丁）

3. 已知a、b、c都是不为 0 的复数，且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，

求 $\frac{a+b+c}{a+b-c}$之值。

错解 $\because$ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$

$\therefore$ $a=b=c$，

$\therefore$ $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{3a}{a}=3$.

剖析 在运用比例公式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$时，要注意$b+d+f\neq 0$．如果$b+d+f=0$，则不能用此公式。

上述解法未考虑$a+b+c=0$的情况，因此不够全面。

正确解法 除上面$a+b+c\neq 0$时，此值为 3 外，还应考虑$a+b+c=0$的情况。

令 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$，则$c=ak$，$b=ck=(ak)k=ak^2$，

$\therefore$ $a+b+c=a(1+k+k^2)=0$.

$\because$ $a\neq 0$，$\therefore$ $k^2+k+1=0$，

$\therefore$ $k=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，这时，$a+b-c\neq 0$，

$\therefore$ $\frac{a+b+c}{a+b-c}=0$，

故 $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\begin{cases}3\ (\text{当}\ a+b+c\neq 0),\\ 0\ (\text{当}\ a+b+c=0).\end{cases}$

（太湖中学　陈文琦）

4. 化简 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

错解 原式$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$

$$=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1$$
$$=2\sqrt{x-1}.$$

剖析 本题对算术根概念理解不清楚，算术根就是一个正数的正的方根，它恒等于一个非负数。解题中，

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}=\sqrt{x-1}+1\text{是正确。}$$

但是$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=\sqrt{x-1}-1$就不一定正确了，需要加以讨论。

正确解法

$$\text{原式}=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$$
$$=\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|$$
$$=\begin{cases}2\sqrt{x-1} & (\text{当}x\geqslant 2\text{时}),\\ 2 & (\text{当}1\leqslant x\leqslant 2\text{时}).\end{cases}$$

（李永贵）

5. 计算 $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$.

错解 原式$=\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$$=\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2\cdot(9+4\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt[6]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=\sqrt[6]{1}=1.$$

剖析 $\because$ $2-\sqrt{5}<0$, $\therefore$ $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}<0$.而算术根$\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}>0$二者不等，$\therefore$ 上述错误是明显的。错误的根源是在使用根式基本性质$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$时，没有注意到

$a \geqslant 0$这个条件。

正确解法 $\because \sqrt{5}-2>0$，

$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2}$．

$\therefore$ 原式 $=-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$=-\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$=-\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^2\cdot(9+4\sqrt{5})}$

$=-\sqrt[6]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=-\sqrt[6]{1}=-1$。

（蚌埠二十七中　孙敦清）

6．化简：$\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}$

错解 原式$=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}$

$+\sqrt{\frac{1}{ab}}\cdot\sqrt{ab}$

$=\sqrt{(ab)^2}+2\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}+1$

$=ab+2b-a+1$。

剖析 此题中错在对算术根"$\sqrt{\quad}$"概念理解不清，算术根乃是一个正数的正的方根，它恒等于一个非负数。此题中，$\sqrt{(ab)^2}=ab$是对的，这由题目本身条件$ab>0$保证；但$\sqrt{b^2}=b$及$\sqrt{a^2}=a$是没有根据的，题目并未给出$a\geqslant 0$和$b\geqslant 0$的条件。题目给的条件$ab>0$及$\frac{b}{a}\geqslant 0$、$\frac{a}{b}\geqslant 0$，都只能说明a、b同号。

正确解法

原式$=\sqrt{(ab)^2}+2\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}+1$

$=ab+2|b|-|a|+1$

$=\begin{cases}ab+2b-a+1 & （当a、b均为正时）,\\ ab-2b+a+1 & （当a、b均为负时）.\end{cases}$

（中国科技大学附中　潘灿蓉）

7\. 化简下列各式：

(1) $\sqrt{4-12x+9x^2}$；

(2) $\sqrt{10^{2\lg(\lg x)}-10^{\lg(\lg x)+\lg 2}+1}$.

错解　(1) 原式　$=\sqrt{(2-3x)^2}=2-3x$；

(2) 原式$=\sqrt{10^{\lg(\lg x)^2}-10^{\lg(\lg x)}\cdot 10^{\lg 2}+1}$

$=\sqrt{(\lg x)^2-2\lg x+1}$

$=\sqrt{(\lg x-1)^2}=\lg x-1$.

剖析　以上两题的运算都是错误的，运算时没有考虑参变数x的取值范围.

正确解法

(1) 原式$=|2-3x|=\begin{cases}2-3x, & （当x\leqslant\frac{2}{3}时）,\\ 3x-2. & （当x>\frac{2}{3}时）.\end{cases}$

(2) 原式$=|\lg x-1|=\begin{cases}\lg x-1, & （当x\geqslant 10时）,\\ 1-\lg x. & （当1<x<10时）.\end{cases}$

（合肥六中　钱振中）

8. 化简：$\sqrt[5]{\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}}$.

错解 原式 $=x^{\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{5}}x^{-\frac{1}{20}}y^{\frac{1}{20}}=x^{\frac{3}{20}}y^{-\frac{3}{20}}$

$$=\frac{1}{y}\sqrt[n]{x^3y^{17}}\ 。$$

剖析 这样解如果限定$x>0,y>0$,解法是对的，但本题並没有这种限定条件．解题时还应考虑到另一个可能性：$x<0,y<0$,这时原式仍有意义，但当$x<0,y<0$时，上述解法过程就不对了。因为此时$x^{\frac{1}{20}}$, $y^{\frac{1}{20}}$等不存在。

在应用分数指数幂运算时，必须注意幂的底数是正数这一条件。

正确解法

原式 $=\left[\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{5}}=\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{20}}$

$$=\frac{1}{|y|}\sqrt[20]{x^3y^{17}}\begin{cases}\frac{1}{y}\sqrt[20]{x^3y^{17}}\ (x>0,y>0)\ ,\\ -\frac{1}{y}\sqrt[20]{x^3y^{17}}\ (x<0,y<0)\ .\end{cases}$$

（界首一中　张学山）

9. 求 $f(x)=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ $\left(当\ x=\frac{2ab}{b^2+1}\right.$时的值($b>1$,$a>0$) .

错解 由合分比定理得

$$f(x)=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}$$

$$=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\ ,$$

$$\therefore\ f^2(x)=\frac{a+x}{a-x}=\frac{a+\dfrac{2ab}{b^2+1}}{a-\dfrac{2ab}{b^2+1}}=\frac{a(b^2+1)+2ab}{a(b^2+1)-2ab}$$

$$=\frac{a(b+1)^2}{a(b-1)^2}=\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2,$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{b+1}{b-1}.$$

剖析　这题解法的错误是误用了比例性质——合分比定理。

合分比定理是指：若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则有 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$．

但$\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{a+b}{a-b}$（如$\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{3+5}{3-5}=\dfrac{8}{-2}=-4$），这一点一定不能混淆。

正确解法

$$f(x)=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-\left(\dfrac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{a(b^2+1)+\sqrt{a^2(b^2+1)^2-(2ab)^2}}{b^2+1}}{\dfrac{2ab}{b^2+1}}$$

$$=\frac{(b^2+1)+\sqrt{(b^2-1)^2}}{2b}\qquad(\because a>0)$$

$$=\frac{b^2+1+(b^2-1)}{2b} \qquad (\because b>1)$$

$$=\frac{2b^2}{2b}=b.$$

（界首一中　张学山）

10．求　$g(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 的算术平方根。

错解　$g(x)=[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]+1$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25$$

$$=(x^2+5x+5)^2$$

$\therefore\quad \sqrt{g(x)}=x^2+5x+5$.

剖析　注意$\sqrt{x^2}=|x|$，

$\therefore\quad \sqrt{g(x)}=|x^2+5x+5|$，

$\therefore$本题解得$\sqrt{g(x)}=x^2+5x+5$是不对的。

正确解法　$\because x^2+5x+5\geqslant 0$的解为

$x\geqslant\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$，　$x\leqslant\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$。

$\therefore\sqrt{g(x)}=|x^2+5x+5|=$

$$\begin{cases} x^2+5x+5 & \left(x\geqslant\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\ x\leqslant\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right), \\ -(x^2+5x+5) & \left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right). \end{cases}$$

（歙县北岸中学　胡淮宁）

11．求证　5个连续自然数的平方和不可能是一个完全平方数。

错证 设此5个连续自然数为$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$，

则 $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10$。

现证明$5n^2+10$不可能为一完全平方数。

由于$5n^2+10$为一关于n的二次三项式，若其为一个完全平方数，则$5n^2+10$有二相等实根，于是应有$\varDelta=0$，但$\varDelta=0^2-4\times5\times10=-200\neq0$，$\therefore 5n^2+10$不可能为一个完全平方数。

剖析 上述证法是不对的，错误的原因是混淆了"完全平方式"与"完全平方数"这两个不同的概念。一个关于n的二次式可以不是完全平方式，但却有可能是一个完全平方数，如n^2+5不是一个完全平方式($\varDelta<0$)但当$n=2$时，它的值为9，却是一个完全平方数。因此，在上面解法中，尽管我们证明了$5n^2+10$不是完全平方式，但这不能说对任意自然数n，$5n^2+10$都不是完全平方数。

正确证明（用反证法）

设$5n^2+10$对某个自然数n为一完全平方数，这时可设$5n^2+10=k^2$，$(k\in N)$

$$\therefore\quad n^2+2=\frac{k^2}{5}.$$

$\because$ 5为质数，$\therefore$ k一定是5的倍数，设$k=5k_1$，$k_1\in N$

$$\therefore\quad n^2+2=\frac{(5k_1)^2}{5}=5k_1{}^2.$$

此式右方个位数为5或0，因此，左方个位数也应为5或0，即n^2的个位数一定为3或8。而一个自然数的平方数，个位数不会是3或8，$\therefore n^2+2=5k^2$不可能成立，由

此矛盾。

∴ $5n^2+10$不可能是一个完全平方数。

（霍邱河口中学　孟庆长）

12．设a为整数，且$a\neq\pm1$，求证a^4+4是合数。

错证　$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2$

$$=(a^2+2)^2-(2a)^2$$

$$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$$

为二个整数之积，故a^4+4是一个合数。

剖析　要证明a^4+4为合数，就要证明a^4+4除1和本身之外还有其它因数。上面的解法中只证明了a^4+4可分解为两个整数之积，此二整数是不是会有一个为1呢？上面证法未作分析。

正确证明　$a^4+4=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$

$$=[(a+1)^2+1][(a-1)^2+1]。$$

∵ a为整数，且$a\neq\pm1$，∴ $(a+1)^2+1$和$(a-1)^2+1$不会是1。（当然也不会是a^4+4）。

∴ a^4+4为合数。

（泗县师范　潘寿海）

二　方　程

根据问题的已知条件列出方程，并进一步研究方程的求解方法，是中学代数的重要内容之一。这部分内容，从小学算术就开始接触，一般人觉得难度不是很大。但是从下面列举的一些错解中，可以看到常见错误还是不少的。例如，在解含有字母系数的一元一次方程时，往往讨论不完全。在解一元二次方程$ax^2+bx+c=0$时，$a\neq0$的条件常被忽视。对

判别式的作用也认识不够。在讨论方程根的性质时，（如根为正根、根比 2 大等）往往忘记了先决条件是该二次方程要有实根。在简化方程时，不注意同解性的判断，不作失根或增根检验等等。此外，算术根的概念含糊不清，充要条件理解不透也常常造成解题的失误。请读者参考下列一些错解，自己总结出各类典型差错，便于对照和借鉴。

例如： 解方程$x^2+2x=3x+6$。

错解 方程变形为$x(x+2)=3(x+2)$，

方程两边同除以$x+2$得

$$x=3.$$

剖析 方程两边同除以一个不为零的式子，可保证方程的同解性。现在除以$x+2$，而失去了使$x+2=0$的根$x=-2$。

正确解法 原方程可化为

$$(x+2)(x-3)=0,$$

$$\therefore\quad x=-2,\ x=3.$$

（李永贵）

1．解关于x的方程：$(m^2-1)x=m^2-m-2$。

错解 原方程变形为$(m+1)(m-1)x=(m+1)(m-2)$，

$$\therefore\quad x=\frac{(m+1)(m-2)}{(m+1)(m-1)}=\frac{m-2}{m-1}.$$

剖析 解字母系数的方程时，要注意系数的条件，不可贸然相除。

如上面解法中，当$m=1$时，$x=\frac{m-2}{m-1}$就无意义，所以必须详加讨论。

正确解法 (1)当$m\neq\pm1$时，$x=\frac{m-2}{m-1}$；

(2) 当$m=-1$时，方程$(m+1)(m-1)x=(m+1)(m-2)$