

高等学校试用教材

建筑力学 第三分册

结构力学

湖南大学 编
哈尔滨建筑工程学院

人民教育出版社

高等学校试用教材

建筑力学第三分册

结 构 力 学

湖 南 大 学^编
哈尔滨建筑工程学院

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

这套书是根据一九七七年十一月召开的高等学校工科力学教材会议的精神和拟订的《建筑力学》教材编写大纲编写的,适用于土建类建筑学、给水排水、采暖通风、建筑材料等专业。全套书共分三个分册:第一分册为理论力学,第二分册为材料力学,第三分册为结构力学。

本书是《建筑力学》的第三分册,主要内容有:结构体系的几何组成分析,静定结构的内力计算和位移计算,计算超静定结构的力法、位移法和力矩分配法,影响线和内力包络图,结构矩阵分析。

本书除供上述专业作为试用教材外,也可供其他专业或有关工程技术人员参考。

高等学校试用教材
建筑力学第三分册

结 构 力 学

湖 南 大 学
哈尔滨建筑工程学院 编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张12.5 字数 268,000

1979年9月第1版 1980年4月第1次印刷

印数 00,001—11,000

书号 15012·0207 定价 1.05 元

前 言

按一九七七年十一月高等学校工科力学教材会议制定的教材建设规划,湖南大学、哈尔滨建筑工程学院、重庆建筑工程学院三院校为土建类的建筑学、给水排水、建筑材料、采暖通风等专业编写了这套中学时的建筑力学教材。本教材共分三个分册:第一分册——理论力学,第二分册——材料力学,第三分册——结构力学。为了便于选用本教材,在编写时我们既注意了这三部分内容的相互联系和配合,又保持了各自相对的独立性和理论的系统性。

本书是建筑力学的第三分册——结构力学。在编写过程中注意贯彻辩证唯物主义观点和理论联系实际的原则,力求做到内容精简,由浅入深,便于自学。在介绍结构力学的基本计算原理和计算方法的基础上,适当写了一部分与现代结构力学发展相适应的新内容,为读者今后继续学习和掌握新方法、新技术提供必要的结构力学基础知识。

全部讲授完本书的内容约需80~90学时。采用本教材时,可根据各专业的不同要求和学时数对内容酌情取舍。第九章的内容如果没有时间讲授,可留作自学,或根据实际情况另作专题讲授。在每章书后均附有一定数量的习题,可根据需要全作或选作。

本书由天津大学(主审)、北京工业大学(主审)、西安冶金建筑学院、武汉建筑材料工业学院、清华大学、重庆建筑工程学院、北京建筑工程学院、同济大学等院校的部分结构力学教师审阅。

本书由湖南大学主编,参加编写工作的有:湖南大学李家宝(第一、四、五、六、七章)、王兰生(第二、三、八章)、哈尔滨建筑工程学院范乃文(第九章)。由于编者水平有限,希望使用本书的教师和读者对书中的缺点和错误予以批评指正。

编 者

一九七八年十二月

目 录

前言	
第一章 绪论	1
§ 1-1 杆件结构力学的研究对象和任务	1
§ 1-2 结构的计算简图	3
§ 1-3 平面杆件结构的分类	7
§ 1-4 荷载的分类	8
第二章 体系的几何组成分析	9
§ 2-1 几何组成分析的目的	9
§ 2-2 平面体系的自由度概念	9
§ 2-3 几何不变体系的简单组成规则	10
§ 2-4 几何组成分析的步骤和举例	13
§ 2-5 静定结构和超静定结构	14
习题	15
第三章 静定结构的内力计算	17
§ 3-1 静定平面刚架	17
§ 3-2 三铰拱	24
§ 3-3 静定平面桁架	31
§ 3-4 静定结构小结	42
习题	43
第四章 静定结构的位移计算	47
§ 4-1 计算结构位移的目的	47
§ 4-2 功·广义力和广义位移	48
§ 4-3 变形杆件的虚功方程	50
§ 4-4 利用虚功原理计算结构的位移	53
§ 4-5 静定结构由于荷载所引起的位移	56
§ 4-6 图乘法	60
§ 4-7 静定结构由于支座位移、温度改变所引起的位移	65
§ 4-8 互等定理	68
习题	70
第五章 力法	73
§ 5-1 超静定结构概述	73
§ 5-2 力法的基本概念	74
§ 5-3 超静定次数的确定	76
§ 5-4 力法的典型方程	78
§ 5-5 用力法计算超静定刚架	80
§ 5-6 荷载作用下超静定结构的位移计算	83
§ 5-7 对称性的利用	85
§ 5-8 用力法计算铰接排架	89
§ 5-9 等截面单跨超静定梁的杆端内力	91
习题	99
第六章 位移法	103
§ 6-1 位移法的基本概念	103
§ 6-2 位移法的基本未知量数目	110
§ 6-3 用位移法计算刚架的步骤和示例	112
§ 6-4 位移法基本方程的讨论	116
习题	120
第七章 力矩分配法	122
§ 7-1 力矩分配法的基本概念	122
§ 7-2 用力矩分配法计算连续梁和无结点线位移的刚架	128
§ 7-3 对称性的利用	133
§ 7-4 超静定结构小结	136
习题	137
第八章 影响线和内力包络图	139
§ 8-1 影响线的一般概念	139
§ 8-2 用静力法作简支梁的影响线	139
§ 8-3 利用影响线求反力和内力	142
§ 8-4 最不利荷载位置	144
§ 8-5 简支梁的绝对最大弯矩和内力包络图	145
§ 8-6 连续梁的内力包络图	149
习题	152
第九章 结构矩阵分析	154
§ 9-1 结构矩阵分析的基本概念	154
§ 9-2 平面刚架的单元刚度矩阵	158
§ 9-3 平面刚架的整体刚度矩阵(不考虑轴向变形)	166
§ 9-4 坐标变换	174
§ 9-5 平面刚架的整体刚度矩阵(考虑轴向变形)	178
§ 9-6 结点位移计算和边界条件处理	182
§ 9-7 跨间荷载的处理	184
§ 9-8 平面刚架杆端内力计算	185
习题	190

第一章 绪 论

§ 1-1 杆件结构力学的研究对象和任务

土木工程中的各类建筑物和构筑物, 例如房屋、桥梁、水池、水塔、挡土墙等等 (图 1-1 至图 1-7), 在使用过程中, 都要承受各种荷载(如风、雪、设备、人群、车辆、吊车、水压力和土压力等)的作用。凡在这些建筑物或构筑物中承担荷载而起骨架作用的部分, 都称为结构。单个构件(譬如一根梁)是最简单的结构, 但一般的工程结构都是由许多构件通过各种方式互相联接在一起而组成的。例如图 1-1 所示的工业厂房结构, 就是由屋架、柱子、吊车梁以及基础等组成的空间体系。

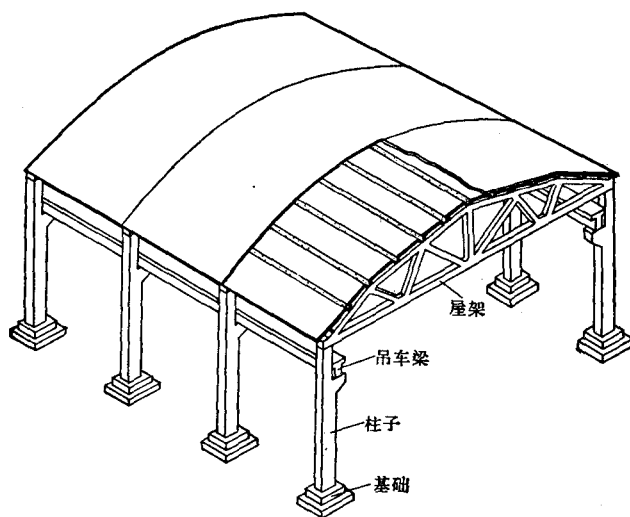


图 1-1

结构的类型是多种多样的, 就几何观点来分, 有杆件结构(例如图 1-1)、薄壁结构(例如图 1-3、1-4、1-6)和实体结构(例如图 1-7)三类。杆件的基本特征是它的长度远大于其他两个尺度——截面的宽度和高度。杆件结构便是由若干这种杆件所组成的。薄壁结构是厚度远小于其他两个尺度的结构。平面板状的薄壁结构, 称为薄板; 由若干块薄板可组成各种薄壁结构(图 1-4、1-6b)。具有曲面外形的薄壁结构, 称为薄壳结构(图 1-3、1-6a)。实体结构是指三个方向的尺度大约为同一量级的结构, 例如挡土墙(图 1-7)、堤坝、基础等。

依照空间观点, 杆件结构可分为平面杆件结构和空间杆件结构两类。凡组成结构的所有杆件的轴线都位于某一平面内, 并且荷载也作用于同一平面内的结构, 称为平面杆件结构。否则, 便是空间结构。严格说来, 实际的结构都是空间结构, 不过在进行计算时, 常可根据其实际受力情况的特点, 将它分解为若干平面结构来分析, 以使计算简化。但需注意, 并非所有情况都能这样处理, 有些是必须作为空间结构来研究的。本书的研究对象只限于平面杆件结构。

杆件结构力学的任务是研究结构的组成规律和合理形式以及结构在外因作用下的强度、刚

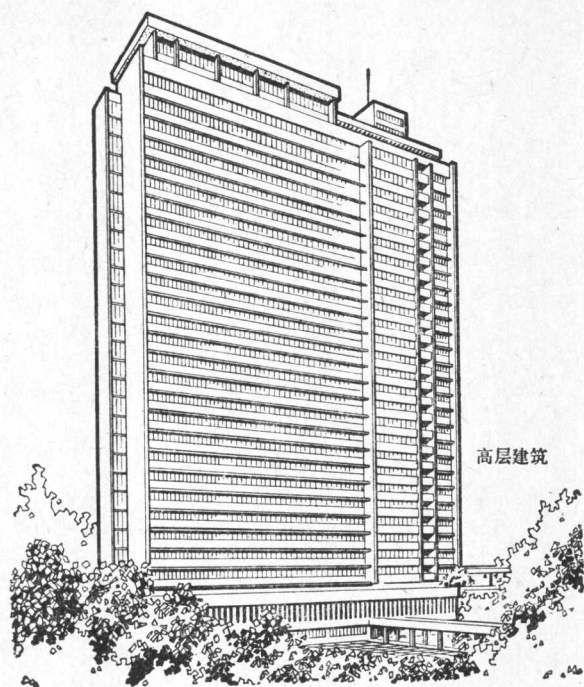


图 1-2

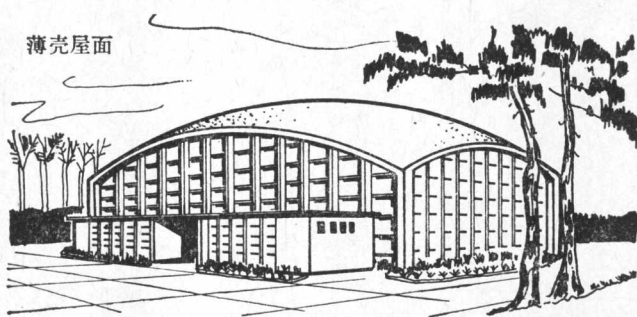


图 1-3

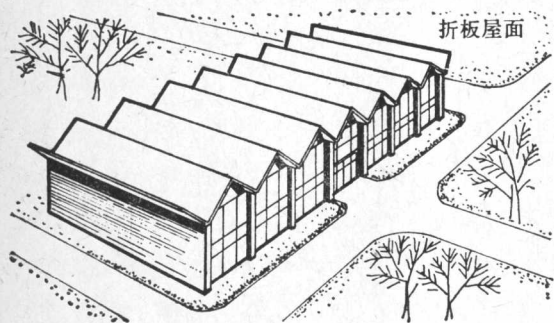


图 1-4

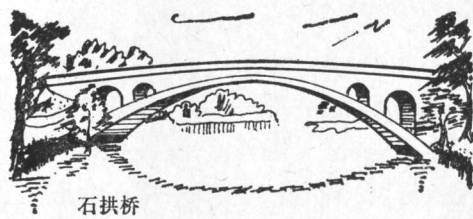


图 1-5

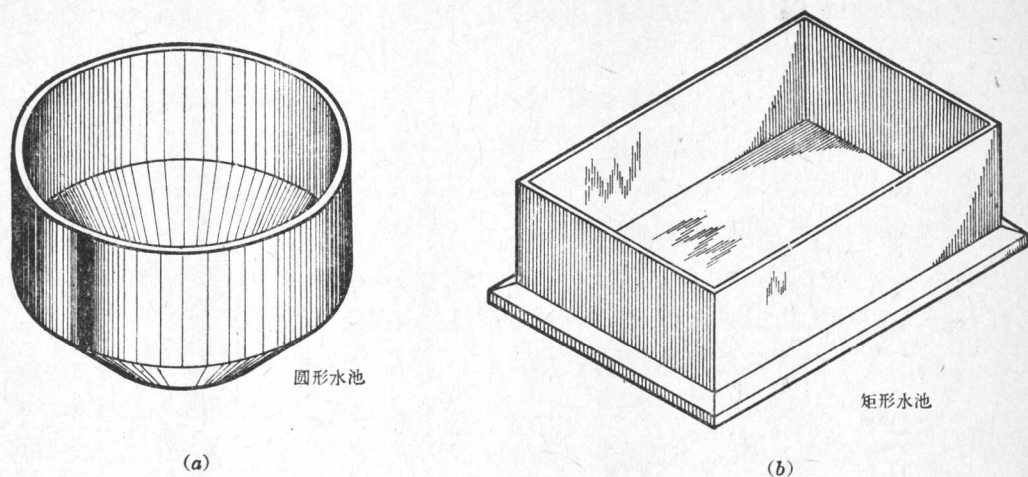


图 1-6

度和稳定性的计算原理和计算方法。研究组成规律的目的在于保证结构各部分不致发生相对运动，使它能承担荷载并维持平衡。进行强度和稳定性计算的目的在于保证结构的安全并使之符合经济的要求。计算刚度的目的在于保证结构不致发生过大的在实用上不能容许的位移。研究结构的合理形式是为了有效地利用材料，使其性能得到充分的发挥。上述强度、刚度和稳定性的计算，不仅在设计新结构时需要进行，而且在已有结构所承受的荷载情况改变时，也应加以核算，以判明是否需要采取加固措施。

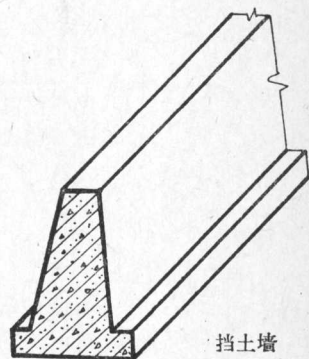


图 1-7

结构力学与材料力学的基本区别在于：后者主要是研究材料的强度和单个杆件的强度、刚度和稳定性的计算，而结构力学的研究对象则由杆件所组成的体系。考虑到材料力学中已经讨论了单根杆件的稳定性计算，又因受学时的限制，所以本书对结构的稳定性问题未作讨论。

本书主要介绍结构力学中最基本的计算原理和计算方法，这些内容是解决一般常用结构的静力计算问题所必需的，也是进一步学习和掌握其他现代结构分析方法的基础。为了与现代结构力学的发展相适应，在第九章中扼要地介绍了结构矩阵分析的矩阵位移法。

§ 1-2 结构的计算简图

对实际结构进行力学分析时，要想完全严格地考虑结构的全部特点以及各部分之间的相互作用来建立理论和进行计算，将是不可能的，也是不必要的。因此，在对结构进行力学分析之前，必须将实际结构加以简化，抓住主要矛盾，忽略一些次要因素，并进行科学抽象，用一个简化的理想模型来代替实际结构。这种在结构计算中用以代替实际结构的理想模型，称为结构的计算简图。

结构的支承方式以及杆件之间的相互联结方式对结构的力学性能影响很大，现分别对平面

杆件结构的支座和结点的计算简图讨论如下。

一、支座的简化和分类

把结构与基础或其他支承物联系起来的装置叫做支座，其作用是将结构的位置固定，并将结构所受的荷载传于支承物、基础和地基。支座对结构的反作用力称为支座反力。在建筑结构中，支座的实际构造形式很多，但从其对结构的约束作用来看，常用的计算简图可分为三类：

(一) 辊轴支座(或称可动铰支座, 图 1-8)

这种支座常用图 1-8a 所示方式表示，它对结构的约束作用是只能阻止结构上的 A 点沿垂直于支承平面方向的移动，这时，结构既可绕铰 A 作转动，又可沿着支承平面移动。因此，当不考虑支承平面上的摩擦力时，其支座反力将通过铰 A 的中心并与支承平面垂直，即反力的作用点和方向是确定的，只有大小是未知的，可用 R_y 来表示它。根据上述特点，这种支座在计算简图中又常用一根链杆来表示(图 1-8b)，因为与该链杆相联的结构不仅可绕铰 A 转动，而且当链杆绕铰 B 作微小转动时，结构也可在垂直于链杆的方向作微小移动。显然，链杆 AB 的内力即代表该支座的反力。



图 1-8

在实际结构中，凡符合或近似地符合上述约束条件的支承装置，都可取成辊轴支座。

(二) 铰支座(或称固定铰支座, 图 1-9)

这种支座常用图 1-9a 所示方式表示，它对结构的约束作用是不允许结构上的 A 点发生任何移动，而结构只能绕铰 A 转动。因此，铰支座的反力将通过铰 A 的中心，但其方向和大小都是未知的，显然，可以用两个沿确定方向的未知分反力 R_x 和 R_y 来表示它。铰支座在计算简图中又常用交于一点 A 的两根链杆来表示(图 1-9b、c)。

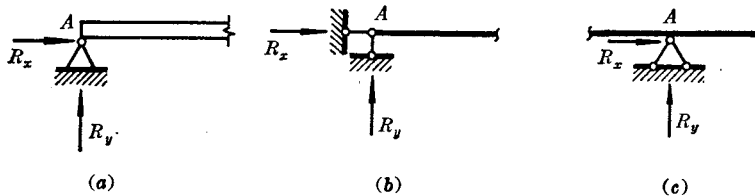


图 1-9

在实际结构中，凡属不能移动而可作微小转动的支承情况，都可视为铰支座。例如插入钢筋混凝土杯形基础中的柱子，当用沥青麻丝填缝时，则柱的下端便可视为铰支承。

(三) 固定支座(图 1-10)

这种支座不允许结构发生任何移动和转动。它的反力的大小、方向和作用点都是未知的，因此，可以用水平和竖向的分反力 R_x 和 R_y 以及反力矩 M 来表示(图 1-10a)。固定支座也可用三

根既不全平行又不全交于一点的链杆表示(图 1-10b), 在计算简图中则常采用图 1-10c 所示的图形。

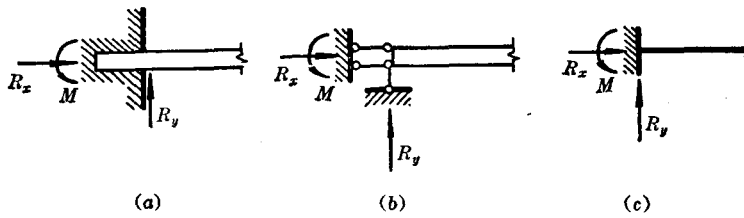


图 1-10

在实际结构中, 凡嵌入墙身的杆件, 其嵌入部分有足够的长度, 致使杆端不能有任何移动和转动时, 该端就可视为固定支承端。又如插入杯形基础中的柱子, 如果用细石混凝土填缝, 则柱的下端一般也看作是固定支承端(参见图 3-1)。

二、结点的简化

在杆件结构中, 几根杆件相互联结的地方叫做结点。根据结构的受力特点和结点的构造所允许各杆件绕结点转动的情况, 在计算中常采用以下两种结点简图:

(一) 铰结点(图 1-11)

铰结点的特点是它所联结的各杆件可以绕铰自由转动。例如图 1-11a 所示木屋架的端结点, 它的构造情况大致符合上述约束的要求, 故其计算简图如图 1-11b 所示, 其中两杆之间的夹角 α 是可以改变的。

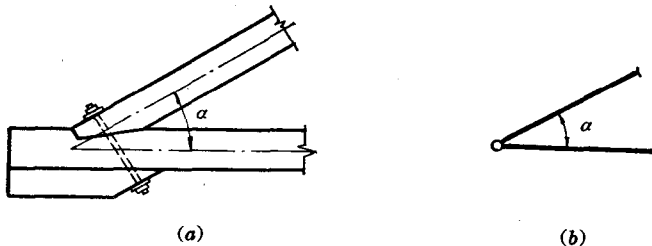


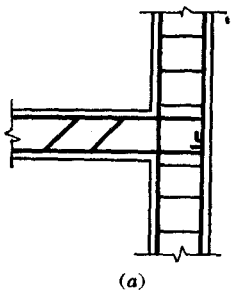
图 1-11

在实际结构中, 根据其受力特点, 如果一根杆件只有轴力, 则此杆两端可用铰与结构的其他部分相联(参见图 1-14)。

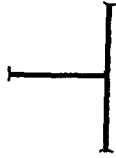
(二) 刚结点(图 1-12)

刚结点的特点是它所联结的各杆件不能绕结点各自自由转动, 变形前后在结点处各杆端切线的夹角保持不变, 即各杆端切线转动的角度应相等。例如图 1-12a 所示钢筋混凝土结构的某一结点, 它的构造是三根杆件之间用钢筋联成整体并用混凝土浇注在一起, 这种结点的变形情况基本上符合上述特点, 故可视为刚结点, 其计算简图如图 1-12b 所示。

有时还会遇到铰结点和刚结点在一起形成的组合结点。例如, 在图 1-13 中, A 、 B 为刚结点, C 为铰结点, D 则为组合结点。组合结点 D 应视为 BD 、 ED 、 CD 三杆在此结点相联, 其中 BD 与 ED 二杆是刚性联结, CD 杆则由铰联结。



(a)



(b)

图 1-12

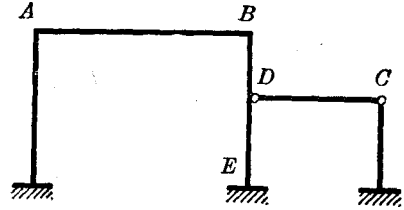
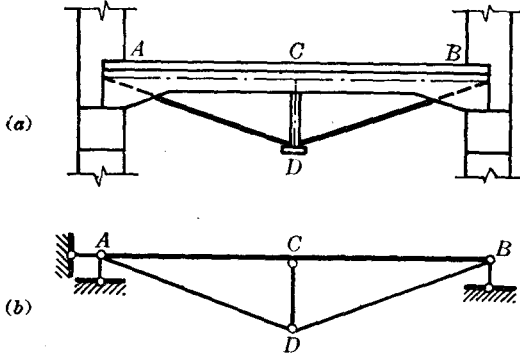


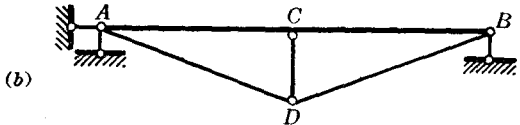
图 1-13

综上所述,我们必须根据结构的支座和结点的实际构造情况,并分析其受力和变形特点,正确确定各支座和结点的类别。

下面用一个简单例子来说明选取计算简图的方法和原则。



(a)



(b)

图 1-14

图 1-14a 所示为工业建筑中采用的一种桁架式组合吊车梁,横梁 AB 和竖杆 CD 由钢筋混凝土做成,但 CD 杆的截面面积比 AB 梁的截面面积小很多。斜杆 AD 、 BD 则为 16 锰圆钢。吊车梁两端由柱子上的牛腿支承。

支座简化: 由于吊车梁的两端仅通过较短的焊缝与柱子牛腿上的预埋钢板相联,这种构造对吊车梁支承端的转动不能起多大的约束作用,又考虑到梁的受力情况和计算的简便,所以梁的一

端可简化为铰支座而另一端则简化为辊轴支座。

结点简化: 因 AB 是一根整体的钢筋混凝土梁,截面较大,故在计算简图中, AB 取为连续杆;而竖杆 CD 和钢拉杆 AD 、 BD 与杆件 AB 相比,截面都较小,它们基本上都只承受轴力,故 CD 、 AD 、 BD 的两端都可看作是铰结,其中 C 铰联在 AB 的下方。

再用各杆件的轴线代替各杆件,则得图 1-14b 所示的计算简图。图中 A 、 B 、 D 为铰结点, C 为组合结点。这个简图,保证了主要杆件横梁 AB 的受力性能(有弯矩、剪力和轴力);对其余三杆,保留了主要内力为轴力这一特点,而忽略了较小的弯矩和剪力的影响。对于支座,保留了主要的竖向支承作用,忽略了转动约束的作用。实践证明,分析时取这样的计算简图是合理的,它既反映了结构的变形和受力特点,又能使计算比较简单。

由以上简例可知,选取结构的计算简图时,应遵循的原则是:(1) 尽可能正确地反映实际结构的主要工作性能,以使计算结果可靠、精确。(2) 必须抓住主要矛盾,忽略某些次要因素,力求计算简便。

用计算简图代替实际结构进行计算,虽然存在着一定的差异,但这是一种科学的抽象。在力学计算中,突出结构最本质的属性,忽略一些次要因素,这样就能更深入地了解问题的实质,认识事物的内在规律性。恰当地选取实际结构的计算简图,是一个比较复杂的问题,不仅要掌握选取

的原则,而且需要有较多的实践经验。对一些新型结构,往往还要通过反复试验和实践才能获得比较合理的计算简图。不过,对于常用的结构,前人已积累了许多经验,我们可以直接采用那些已为实践所验证的常用的计算简图。在计算简图选定之后,在作结构设计时,还应采取相应的构造措施,以使实际结构的内力分布和变形特点与计算简图的情况相符。

还可指出,在设计工作中,如果所使用的计算工具愈先进,则愈可以选择更为精确一些的计算简图。例如,由于电子计算机在土建工程中的应用而使许多较为复杂的计算简图得以采用。

§ 1-3 平面杆件结构的分类

平面杆件结构是本书的研究对象,它有如下几种类型:

一、梁 梁是一种受弯杆件,可以是单跨的(图 1-15a、c),也可以是多跨连续的(图 1-15b、d)。

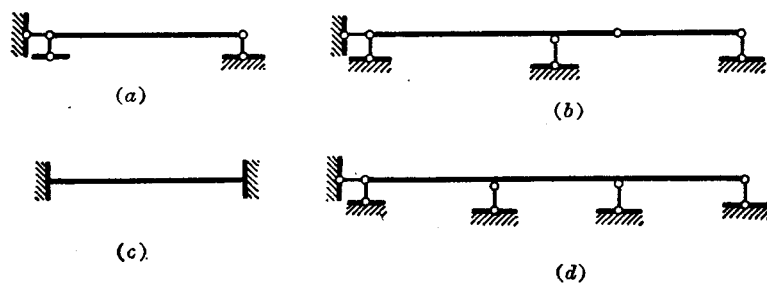


图 1-15

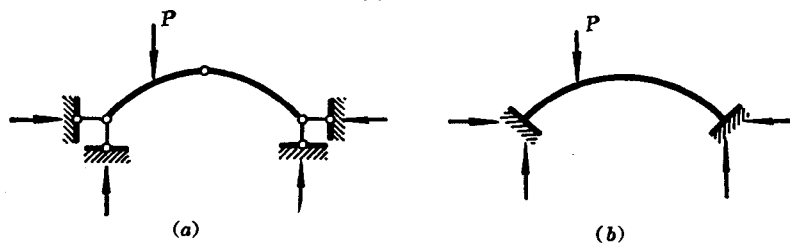


图 1-16

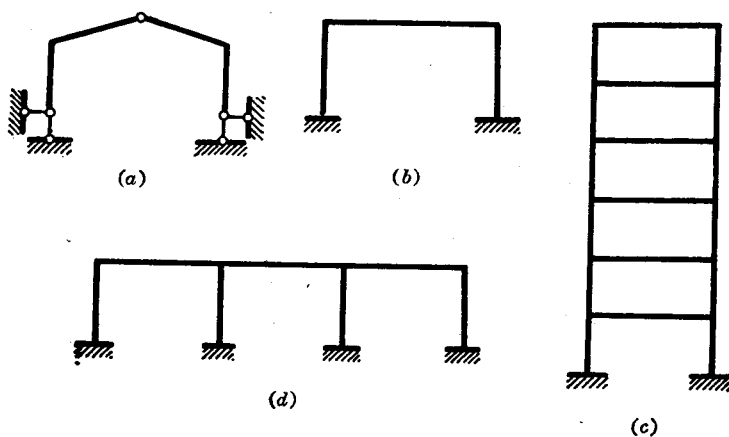


图 1-17

二、拱 拱是曲线形的且在竖向荷载作用下将产生水平反力的杆件结构(图 1-16)。这种水平反力将使拱内弯矩远小于跨度、荷载及支承情况相同的梁的弯矩。

三、刚架 刚架是由梁和柱组成的结构(图 1-17)，各杆件主要受弯。刚架的结点主要是刚结点，也可以有部分铰结点或组合结点。

四、桁架 桁架是由若干杆件在每杆两端用理想铰联结而成的结构(图 1-18)。其各杆的轴线一般都是直线，当只受到作用于结点的荷载时，各杆只产生轴力。

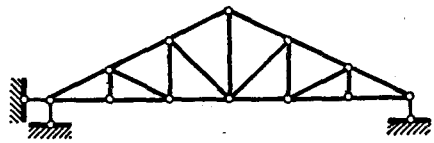


图 1-18

五、组合结构 在这种结构中(图 1-19)，有些杆件只承受轴力，而另一些杆件还同时承受弯矩和剪力。

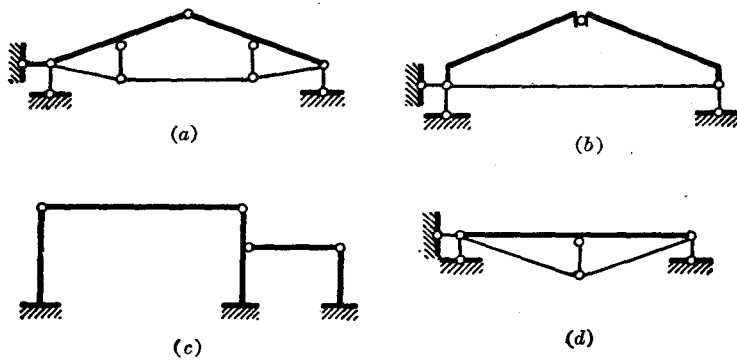


图 1-19

§ 1-4 荷载的分类

作用于结构上的荷载，按其作用时间的久暂可以分为恒载和活载两类。恒载是指永久作用在结构上的荷载，如自重、结构上的固定设备的重量等。活载是指暂时作用在结构上的位置可以变动的荷载，如结构上的临时设备、风力、雪重、人群、水压力、移动的吊车等。

根据荷载作用的性质，又可分为静力荷载和动力荷载。静力荷载是指逐渐增加的、不致使结构产生显著的冲击或振动，因而可略去惯性力影响的荷载，恒载和上述大多数活载都属静力荷载。动力荷载是指作用在结构上面会引起结构显著的冲击或振动的荷载，在这类荷载作用下，结构将会发生不容忽视的加速度。例如动力机械的振动、爆炸冲击、地震等所引起的荷载就是动力荷载。

本书只讨论结构在静力荷载作用下的计算问题。

应该指出，结构除承受荷载外，还可能受到其他外在因素的作用，如温度改变、支座位移、材料收缩等。对超静定结构来说，在这些因素影响下，也会使结构产生内力，这种内力有时甚至是很大的。

第二章 体系的几何组成分析

§ 2-1 几何组成分析的目的

杆件结构是由若干杆件互相联接所组成的体系,并与地基联接成一整体,用来承受荷载的作用。当不考虑各杆件本身的变形时,它应能保持其原有几何形状和位置不变,即当不考虑材料的应变时,杆件结构的各个杆件之间以及整个结构与地面之间,应不致发生相对运动,而处于相对静止的状态。

体系受到任意荷载作用后,在不考虑材料应变的条件下,若能保持其几何形状和位置不变者,称为几何不变体系,图 2-1a 所示即为这类体系的一个例子。可是另有一类体系,如图 2-1b 所示的例子,尽管只受到很小的荷载 P 作用,也将引起几何形状的改变,这类体系称为几何可变体系。显然,几何可变体系是不能作为结构来采用的。

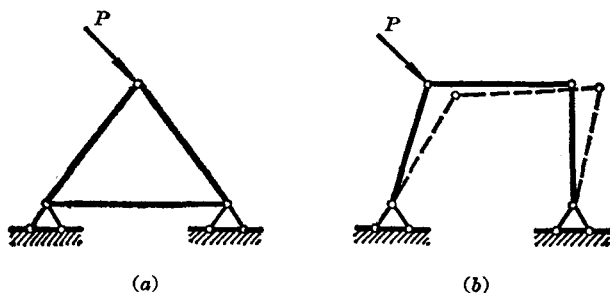


图 2-1

就体系的几何组成进行的这种分析称为几何组成分析。作这种分析的目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡;同时也为正确区分静定结构和超静定结构以及进行结构的内力计算打下必要的基础。

在本章中,只讨论平面杆件体系的几何组成分析。

§ 2-2 平面体系的自由度概念

为了便于对体系进行几何组成分析,先讨论平面体系自由度的概念。所谓体系的自由度,是指该体系运动时,用来确定其位置所需独立坐标的数目。在平面内的某一动点 A ,其位置要由两个坐标 x 和 y 来确定(图 2-2a),所以一个点的自由度等于 2,即点在平面内可以自由移动。在平面体系中,由于不考虑材料的应变,所以可认为各个构件没有变形。于是,可以把一根梁、一根链杆或体系中已经肯定为几何不变的某个部分看作一个平面刚体,称为刚片。一个刚片在平面内运动时,其位置将由它上面的任一点 A 的坐标 x 、 y 和过 A 点的任一直线 AB 的倾角 φ 来确定(图 2-2b),因此一个刚片在平面内的自由度等于 3,即刚片在平面内不但可以自由移动,而且还可自

由转动。

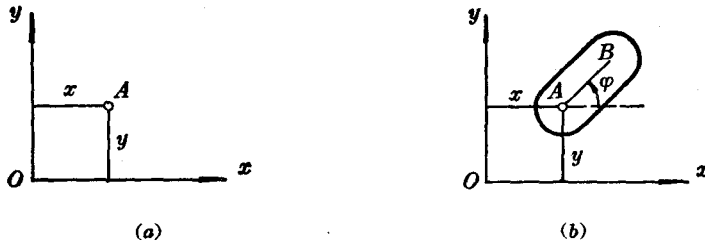


图 2-2

当对刚片加入某些约束装置时，它的自由度将会减少。凡能减少一个自由度的装置称为一个联系。例如用一根链杆将刚片与基础相联(图 2-3a)，则刚片将不能沿链杆方向移动，因而减少了一个自由度，故一根链杆为一个联系。如果在刚片与基础之间再加入一根链杆(图 2-3b)，则刚片又减少了一个自由度，此时，它就只能绕 A 点作转动而丧失了自由移动的可能。由此可见，对刚片加入两根链杆后，刚片在平面内的自由度就由 3 变为 1，即自由度的数目减少了两个。又如用一个圆柱铰把两个刚片 I 和 II 在 A 点联结起来(图 2-3c)，那么，对刚片 I 而言，其位置可由 A 点的坐标 x 、 y 和 AB 线的倾角 φ_1 来确定，因此它仍为三个自由度。但是对刚片 II 来说，因为它与刚片 I 在 A 点铰结，则刚片 II 上面 A 点的位置便随刚片 I 的位置而定，就是说刚片 II 只能跟随刚片 I 移动而丧失了自由移动的可能。由于刚片 II 只保存了独立的相对转角 φ_2 ，所以由刚片 I、II 所组成的体系在平面内的自由度为 4，而两个独立的刚片在平面内的自由度总数应为 $2 \times 3 = 6$ ，因此，用一个圆柱铰将两个刚片联结起来后，就使自由度的总数减少了两个。这种联结两个刚片的圆柱铰称为单铰。由上述可见，一个单铰相当于两个联系，也相当于两根链杆的约束作用；反之，两根链杆也就相当于一个单铰的作用(参阅图 2-3b)。

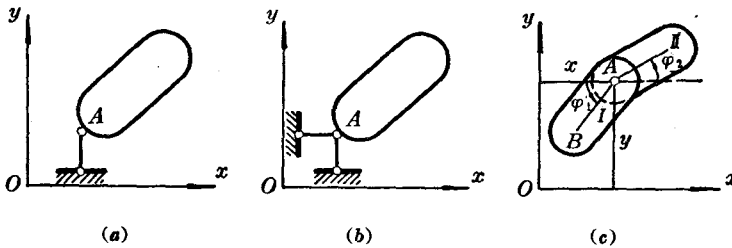


图 2-3

一个平面体系，通常都是由若干个刚片加入某些联系所组成的。加入联系的目的是为了减少体系的自由度。如果在组成体系的各刚片之间恰当地加入足够的联系，就能使刚片与刚片之间不可能发生相对运动，从而使该体系成为几何不变体系。

§ 2-3 几何不变体系的简单组成规则

为了确定平面体系是否几何不变，须研究几何不变体系的组成规则。现就几种基本情形提出平面几何不变体系的简单组成规则如下：

一、两个刚片用不全交于一点也不全平行的三根链杆相联结，则所组成的体系是几何不变的。

如图 2-4a 所示，若将刚片 I 和 II 用两根不平行的链杆 AB 和 CD 联结，设刚片 I 固定不动，则 A、C 两点将为固定；当刚片 II 运动时，其上 B 点将沿与 AB 杆垂直的方向运动，而其上 D 点则将沿与 CD 杆垂直的方向运动，故刚片 II 运动时将绕 AB 与 CD 两杆延长线的交点 O 而转动。同理，若刚片 II 固定不动，则刚片 I 也将绕 O 点而转动。我们称 O 点为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。此情形就象把刚片 I 和 II 用圆柱铰在 O 点相联结的情形一样，这进一步证实了两根链杆的作用相当于一个铰。不过现在这个铰的位置是在链杆的轴线延长线上，且其位置随链杆的转动而改变，与一般的铰不同，所以把这种铰称为虚铰。

为了制止刚片 I 和 II 发生相对转动，还需要加上一根链杆 EF (图 2-4b)。如果链杆 EF 的延长线不通过 O 点，它就能阻止刚片 I 和 II 之间的相对转动。因此，这时所组成的体系是几何不变的，这就阐明了上述规则的正确性。

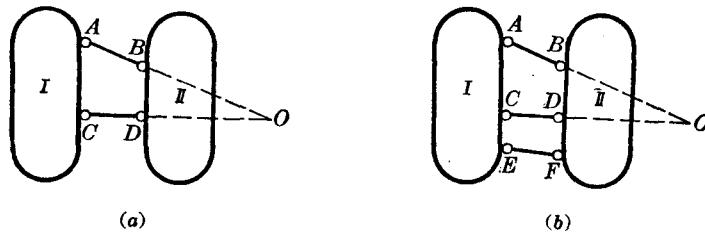


图 2-4

二、三个刚片用不在同一直线上的三个铰两两相联，则所组成的体系是几何不变的。

如图 2-5a 所示，刚片 I、II、III 用不在同一直线上的 A、B、C 三个铰两两相联。若将刚片 I 固定不动，则刚片 II 将只能绕 A 点转动，其上 C 点必在半径为 AC 的圆弧上运动，而刚片 III 则只能绕 B 点转动，其上 C 点又必在半径为 BC 的圆弧上运动。因 C 点不可能同时在两个不同的圆弧上运动，故知各刚片之间不可能发生相对运动，所以这样组成的体系是几何不变的。

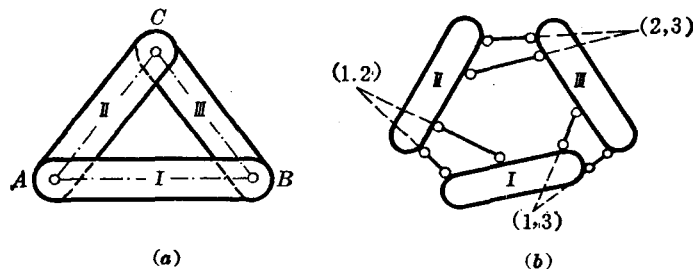


图 2-5

由于两根链杆的作用相当于一个铰，故可将任一个铰换为两根链杆所构成的虚铰，据此可知，如图 2-5b 所示的体系也是几何不变的。

三、在一个刚片上增加一个二元体仍为几何不变体系。

所谓二元体是指由两根不在一直线上的链杆联结一个新结点的设置。如图 2-6 所示，在一

个刚片上增加了一个二元体, 易见这是一个几何不变体系。实质上, 它与上述组成规则二相同。但由于它的应用很广, 所以单独提出。

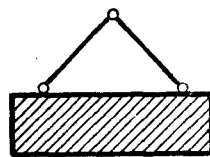


图 2-6

根据上述简单规则, 就不难进一步组成更为一般的几何不变体系。

例如图 2-7 所示体系, 它是先按规则二将刚片 AE 、 EB 和基础用 A 、 B 、 E 三个铰两两相联, 然后按规则一再与刚片 EC 用铰 E 和一个支座链杆在 C 相联结, 此后又按规则二与刚片 DG 和 GF 用铰相联, 从而组成一个较为复杂的几何不变体系。又如图 2-8 所示的桁架, 则是从一个基本铰接三角形开始, 按规则三依次增加二元体所组成的几何不变体系。

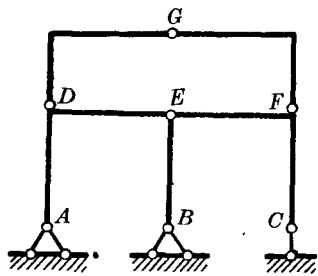


图 2-7

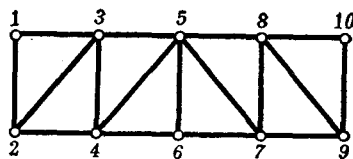


图 2-8

以上阐明了组成几何不变体系的几项基本规则, 自然也可按照这些规则来判别给定体系是否几何不变。此时, 对于较复杂的体系, 为了便于分析, 可先把其中能直接观察出的某些几何不变部分当作刚片, 或撤除若干二元体, 这不会影响原有体系的几何组成性质。

值得指出, 在上述几项规则中, 都提出了一些限制的条件, 如联结两刚片的三根链杆不能全交于一点也不能全都平行, 联结三刚片的三个铰不能在同一直线上等。现在我们来研究, 如果不加这些限制条件, 其结果将会如何。

如图 2-9a 所示的两个刚片用全交于一点 O 的三根链杆相联, 此时, 两个刚片可以绕 O 点作相对转动, 但在发生一微小转动后, 三根链杆就不再全交于一点, 从而将不再继续发生相对转动。这种在某一瞬时可以产生微小运动的体系, 称为瞬变体系。又如图 2-9b 所示的两个刚片用三根互相平行但不等长的链杆相联, 此时, 两个刚片可以沿与链杆垂直的方向发生相对移动, 但在发生一微小相对移动后, 此三根链杆就不再互相平行, 故这种体系也是瞬变体系。但应该注意, 若三根平行链杆为等长(图 2-9c), 则在两刚片发生一相对运动后, 此三根链杆仍互相平行, 故运动将继续发生, 这样的体系便是几何可变的了。

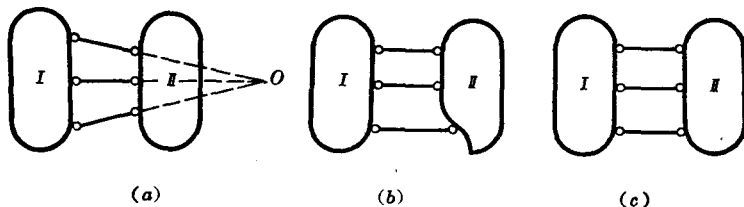


图 2-9

现在再看三个刚片用位于一直线上的三个铰两两相联的情形(图 2-10)。此时 C 点位于以