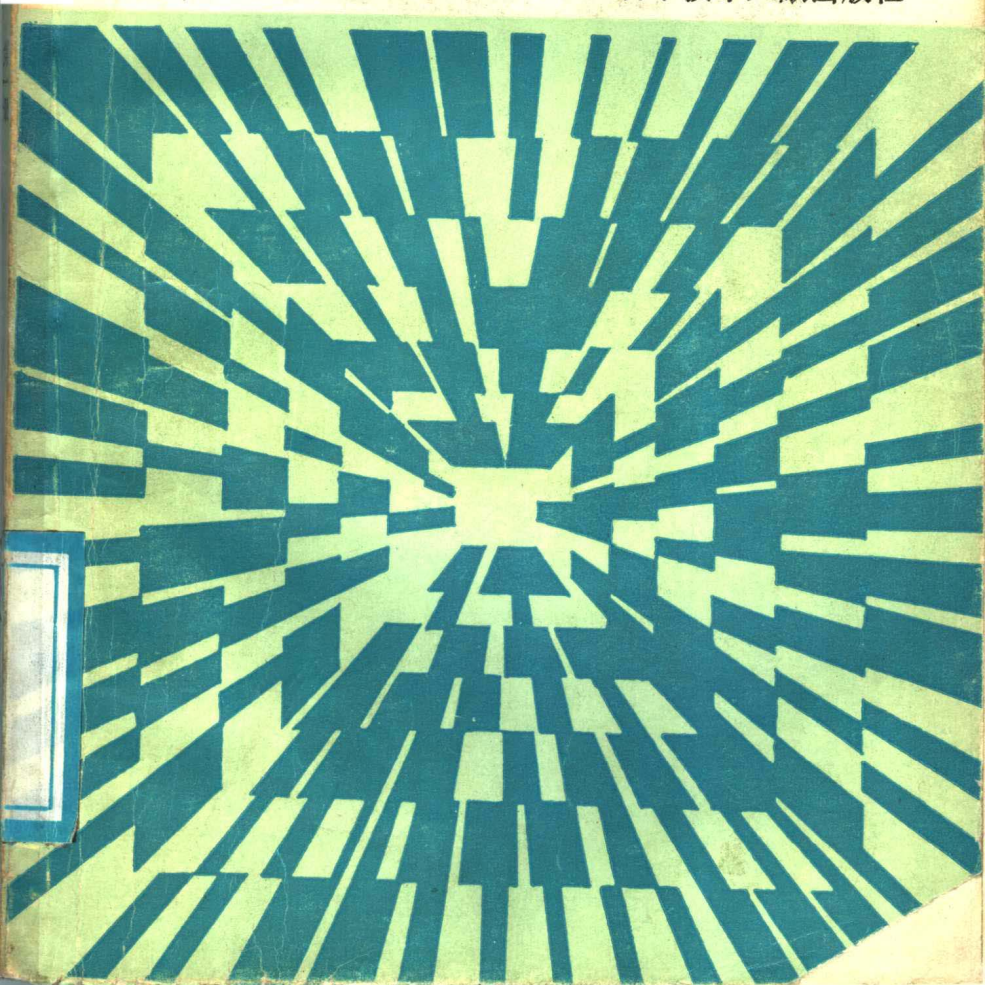


初中代数自学纲要

第一册

丁盛宝 曹根福 编

科学技术文献出版社



初中代数自学纲要

(第一册)

丁盛宝 曹根福 编



科学技术文献出版社

初中代数自学纲要

(第一册)

丁盛宝 曹根福 编

科学技术文献出版社出版

上海市印十厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本787×1092 1/32 印张6 字数129,000

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数1—45,000本

社科新书目: 182—093

统一书号: 7176·72 定价: 1.50元

ISBN 7-5023-0006-6/O·2

内 容 提 要

本书根据初中代数课程的基本要求,包括小学数学复习以及有理数、整式的加减、一元一次方程、一元一次不等式等四章,并参照全日制普通中学的课堂教学顺序,分成八十二个课时,逐课给予学习指导。在本书中,每课均包括学习要点、练习指导、参考习题这样三个部分。每一单元之后还有自我检查题,书末附有答案,供读者随时检查自学效果。结合本书自学,或是重温、复习初中代数,可以犹如身临课堂,聆听优秀教师的授课,以期得到更好的学习成绩。此外,本书对普通中学初中一年级第一学期的学生以及职工业余中学的学生在学习初中代数时也有指导作用,对家长指导、检查子女的学习也有参考作用。

本书作者丁盛宝是上海市特级教师。

目 录



预备知识 小学数学复习(第 1~8 课)	1
第一章 有理数(第 9~32 课)	31
一、有理数的意义(第 9~15 课)	31
二、有理数的加法和减法(第 16~20 课)	47
三、有理数的乘法和除法(第 21~23 课)	62
四、有理数的乘方(第 24~30 课)	70
第二章 整式的加减(第 33~51 课)	93
一、整式(第 33~43 课)	93
二、整式的加减(第 44~51 课)	109
第三章 一元一次方程(第 52~74 课)	128
第四章 一元一次不等式(第 75~82 课)	167
附 录 本书自我检查题答案	183

小学数学复习

1. 数 的 概 念

1

〔学习要点〕 1. 复习小学数学里学过的数, 特别注意零和自然数的区别, 整数与分数、小数的区别.

2. 数的整除.

注意: 整除和除尽是不同的. 所谓整除, 是被除数、除数(不得为0)、商三者必须都是整数, 并且没有余数. 所谓除尽, 被除数、除数、商不一定是整数. 因此, 整除是除尽的特殊情况, 整除也可以是除尽, 但除尽并不一定是整除.

如果数 a 能被 b 整除, a 就叫做 b 的倍数, b 就叫做 a 的约数.

如果 $a \div b$ 商是 q , 余数是 r , 那么 $a = bq + r$. 就是说,
被除数 = 除数 $\times$ 商 + 余数.

3. 能被2整除的数叫偶数, 不能被2整除的数叫做奇数.

4. 判断一个数是否能被2整除, 只要看它的末位是否是偶数(包括0);

判断一个数是否能被5整除, 只要看它的末位是否是0或5;

判断一个数是否能被3(或9)整除, 只要看它的各个数字之和能否被3(或9)整除.

以上这些知识在约分、通分时常被用到, 也是进一步学习

代数中的因式分解所必须的预备知识。

[练习指导] 1. 在小学数学里,我们知道表示物体个数的叫做自然数;“0”是表示“没有”的意思.在讲“数的整除”时,只在自然数的范围内研究,不包括“0”.而在中学数学里,为了研究某些问题的方便,要研究“0”,“0”能够被所有的自然数整除.“0”和自然数都是整数;但整数不一定是0或自然数,这在我们以后的学习中就会知道.

2. 能被2整除的数叫偶数.注意:不能错误地认为只有2、4、6、8才是偶数.

3. 约数与倍数是两个相互依存的概念,二者不能单独存在.例如:18是9的倍数,但不能说18是倍数,9是约数.

[参考习题]

1. 填空:

(1) 在1、2、3、4、9、0.5、1.05、0、6、20这十个数中,
()是整数;()是自然数;()是偶数;
()是奇数;()能被2整除;()有约数3;
()是4的倍数;()是5的倍数;()是6的约数.

(2) 45的约数有(),其中是奇数的是(),是偶数的是().

(3) 能被2整除,有约数3,并且是5的倍数的三位数中,最小的是().

(4) 四位数741(),既能被3整除,又能被2整除.

(5) 一个四位数,如果最高位上是1,十位上是5,而且能被2、5和3整除,这个数可以是().

(6) 100以内能同时被3和5整除的最大的奇数是(),最大的偶数是().

(7) 被除数是 377, 商是 31, 余数是 5, 除数是().

2. 将下列数中的自然数和整数分别挑出来, 并说明“自然数都是整数, 整数都是自然数”这句话对吗?

56%, 0, $1\frac{4}{7}$, 六成, 158, 0.76, 1, 57.

3. $435718 \times 3 = 1317154$, 你能用什么方法一看就知道这是算对了, 还是算错了?

4. 在 12、45、18、60、75、78、90、570、808 这些数中, 哪些数能同时被 2 和 3 整除? 哪些数能同时被 3 和 5 整除? 哪些数能同时被 2、3、5 整除? 哪些数能被 9 整除?

*5. 先观察一批能被 4 和 25 整除的数的末两位数, 再观察一批能被 8 和 125 整除的数的末三位数, 然后说出能被 4 和 25、8 和 125 整除的数的特征.

2

[学习要点] 1. 如果一个数除了 1 和它本身, 不再有别的约数, 这个数叫质数(或叫素数). 一个数除了 1 和它本身外还有别的约数, 这个数叫合数. 1 不是质数也不是合数, 而是自然数的单位.

2. 每个合数都可以写成几个质数相乘的形式, 这几个质数叫做这个合数的质因数. 把一个合数用质因数相乘的形式表示出来, 叫做分解质因数.

3. 几个数公有的约数, 叫做这几个数的公约数; 几个数的公约数可能不止一个, 其中最大的一个数, 叫做这几个数的最大公约数. 几个数公有的倍数, 叫做这几个数的公倍数; 公倍数中最小的一个数, 叫做这几个数的最小公倍数. 求几个数的最大公约数和最小公倍数, 通常都可用短除法.

4. 分数的基本性质: 分数的分子和分母都乘以或除以相同的数(零除外), 分数的大小不变. 用式子表示是:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad (\text{其中 } m \neq 0)$$

分数的上述基本性质,是约分、通分的理论依据,是分数运算和等值变形的基础,必须牢牢掌握。

5. 分数的约分和通分,是求最大公约数、最小公倍数与分数的基本性质的综合运用。

[练习指导] 1. 判断一个数(1除外)是不是质数.这只要看这个数除1和本身外还有没有别的约数。

自然数按约数的个数,可以分为:

自然数	{	1	(自然数单位,只有一个约数)
		质数	(只有二个约数)
		合数	(至少有三个约数)

2. 要注意质数、质因数、互质数的区别.质数是指一个自然数,它能单独存在;质因数也是指一个自然数,然而它不能单独存在;互质数是指两个自然数,它们的最大公约数是1。

3. 把一个合数分解质因数.一般用短除法,要注意除数一定要用质数;根据数的整除的特征,先观察,后试除;一直除到所得的商是质数为止.最后,把所有的除数与最后的商写成连乘积的形式。

4. 求几个整数的最大公约数.可以用分解质因数的方法来求;也可用短除法来求,方法是:

- (1) 除数必须是各个数的公约数;
- (2) 最后商必须是互质数;
- (3) 结果是所有除数的积。

5. 求最小公倍数的方法:

(1) 如果是求三个数时,先用这三个数的公有质因数做除法;然后,再用两个数的公有质因数做除法;

(2) 最后商必须是互质数;

(3) 结果是所有除数和最后的商的乘积.

6. 用短除法求最小公倍数,要注意先以最小的质数 2 试除,如果不能用 2 整除,再顺次用质数 3、5、7……等试除.

下面求 12、18、36 的最小公倍数的方法是错误的:

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 12 & 18 & 36 \\ \hline 3 & 3 & 18 & 9 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \therefore 4 \times 3^2 \times 2 = 72$$

因为除数 4 中含有质因数 2,而被移下来的 18 中也含有质因数 2,这样就漏掉了 18 的质因数 2,结果比应求得的最小公倍数扩大了 2 倍.

7. 约分方法有二种:一种是逐次约分法;一种是一次约分法.一次约分法就是用分子、分母的最大公约数一次去除分子和分母,这种方法比较简便.

8. 通分的关键是找公分母,这只要几个分母的最小公倍数便可.对于带分数的通分,只要把分数部分通分,整数部分不变,但注意不要丢掉整数部分.

[参考习题]

1. 填空: (1) 10 以内,既是偶数又是质数的是(),既是奇数又是合数的是();

(2) 用 10 以内的三个不同的质数组成两个同时被 15 整除的三位数,这三位数是()和();

(3) 3、5、8 和 15 这四个自然数,可以组成()对互质数,它们分别是();

(4) 写出两个都是质数的自然数(),写出在 20 以内的三个都是合数的连续自然数();

(5) 分解质因数 $2520 = ()$;

(6) 把最大两位数与最小两位数的积分解质因数 (

);

(7) 写出 18 和 126 的最大公约数(), 和最小公倍数 ().

(8) 写出等于 $\frac{3}{7}$ 而分母小于 40 的所有分数().

2. 一个数万位上是最小质数, 百位上是最小自然数, 个位上是最小合数, 十分位上是最大的一位数, 其余数位上都是零, 写出这个数.

3. 下列各题分解质因数对不对? 为什么? 不对的应怎样纠正?

(1) $24 = 2 \times 3 \times 4$; (2) $5 \times 7 \times 2 = 70$;

(3) $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 1$; (4) $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

4. “分数的分子、分母同乘以(或同除以)一个数, 分数的值不变”这句话对吗? 为什么?

5. $\frac{3}{5}$ 的分子加上 15, 要使分数的值不变, 分母应加上 ();

$\frac{3}{5}$ 的分母加上 15, 要使分数的值不变, 分子应加上 ();

$\frac{3}{5}$ 的分子扩大 15 倍, 要使分数的值不变, 分母应是 ().

6. 利用分数的基本性质, 把下列各式中的分子和分母都改成整数(能约分的要约分, 是假分数的要化为带分数):

$$\frac{0.4}{5}, \quad \frac{1}{0.15}, \quad \frac{0.125}{6}, \quad \frac{2.5}{2.75}, \quad \frac{0.352}{1.4}.$$

7. 通分:

(1) $\frac{91}{221}$ 和 $\frac{13}{51}$;

(2) $3\frac{3}{14}$, $5\frac{4}{35}$ 和 $11\frac{4}{105}$.

8. 把下列各数化成最简分数:

(1) $\frac{182}{286}$;

(2) $\frac{209}{247}$;

(3) $\frac{2772}{13860}$.

2. 分 数

3

〔学习要点〕 1. 分数与除法的关系: 分子相当于被除数, 分母相当于除数, 分数线相当于除号; 在除法中, 除数不能为 0, 在分数中, 同样分母不能为 0.

比与除法、分数的关系: 比的前项、后项和比值, 分别相当于除法中的被除数、除数和商; 或者相当于分数中的分子、分母和分数值.

2. 分数大小的比较. 分母相同的分数比较大小, 分子大的分数较大; 分子相同的分数比较大小, 分母大的分数反而小.

3. 正确迅速地进行分数加、减、乘、除四则运算, 尤其是带分数的运算.

4. 正确化简繁分数. 化简方法: 把繁分数的分数线看作是除号, 分子是被除数, 分母是除数, 然后按照分数除法将繁分数化简; 也可利用分数的基本性质进行化简.

〔练习指导〕 1. 分数与除数、比, 有着密切的联系, 但它们之间的意义是不一样的; 比表示两个数的关系, 比号是一种“关系符号”; 除法是一种运算, 除号是一种“运算符号”; 分数是一个数.

2. 异分母分数比较大小, 可以先通分, 转化为同分母的

分数再比较,也可以转化为同分子的分数后再比较.三个数比较大小时,要注意它的写法.例如 $\frac{4}{5} > \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ 也可写成 $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$,但不能写成 $\frac{1}{2} < \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ 或 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$.

3. 带分数相加减,整数部分、分数部分要分别相加减,再把所得的数合并起来.做减法时要注意两点:①先通分,②再观察被减数的分数部分够不够减,如果不够减,需向整数部分一次借足.例如,

$$\begin{aligned} 9\frac{1}{5} - 3\frac{7}{10} - 1\frac{11}{15} &= 9\frac{6}{30} - 3\frac{21}{30} - 1\frac{22}{30} \\ &= 7\frac{66}{30} - 3\frac{21}{30} - 1\frac{22}{30} \\ &= 3\frac{23}{30}. \end{aligned}$$

4. 化简繁分数时,首先要认清主线(最长的分数线叫主线),主线上下为数不管怎样复杂,上面的数都是分子,下面的数都是分母.繁分数的主线,实际上起了除号和括号的作用.化简时要根据每个繁分数的具体特点,灵活地选用化简的方法.例如:

(1) 先把分子和分母分别计算,直到分子、分母部分为一个数时,再用分子除以分母,求出结果.例如:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times 2}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \div 2} &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{30} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{1}{60}} \\ &= \frac{8}{15} \div \frac{1}{60} = 32. \end{aligned}$$

(2) 利用分数的基本性质来化简. 例如:

$$\frac{0.24 \times 0.35 \times 5\frac{7}{10}}{1\frac{2}{5} \times 0.38 \times 0.36} = \frac{(0.24 \times 0.35 \times 5.7) \times 100}{(1.4 \times 0.38 \times 0.36) \times 100}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{24}} \times \overset{1}{\cancel{35}} \times \overset{5}{\cancel{570}}}{\overset{1}{\cancel{140}} \times \overset{1}{\cancel{38}} \times \overset{1}{\cancel{36}}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

(3) 也可直接约分。例如：

$$\frac{40.2 \times 8.1 \times \frac{4}{5}}{0.8 \times 81} = \frac{40.2 \times \overset{0.1}{\cancel{8.1}} \times \overset{1}{\cancel{0.8}}}{\overset{1}{\cancel{0.8}} \times \overset{1}{\cancel{81}}} = 4.02.$$

5. 有些四则混合运算题，如列成繁分数来解，计算倒比较简便。例如，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times 15 \times 6 \times 6 \times 3.14 \div (4 \times 4 \times 3.14) \\ &= \frac{\frac{1}{\cancel{18}} \times \overset{5}{\cancel{15}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{3.14}}}{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{1}{\cancel{3.14}}} \\ &= \frac{45}{4} = 11.25. \end{aligned}$$

【参考习题】

1. 填空：(1) () $\div 5 = \frac{39}{()} = 0.52 = 26 : () = () \%$;

$$(2) 2.5 = (\quad) : (\quad) = \frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \div (\quad) = (\quad) \%,$$

$$(3) \text{ 比较下列各数的大小: } \frac{22}{7}, 3\frac{1}{3}, 310\%, \frac{22}{6},$$

$$(\quad) > (\quad) > (\quad) > (\quad)$$

$$(4) \text{ 写出三个比 } \frac{5}{6} \text{ 大的真分数 } (\quad);$$

$$(5) \text{ 写出三个在 } 2.03 \text{ 与 } 2.07 \text{ 之间的假分数 } (\quad).$$

2. 比较下列各组数的大小:

$$(1) \frac{9}{11} \text{ 和 } \frac{9}{13},$$

$$(2) \frac{33}{41} \text{ 和 } \frac{31}{41},$$

$$(3) \frac{18}{19} \text{ 和 } \frac{19}{18},$$

$$(4) \frac{3}{24} \text{ 和 } \frac{1}{40},$$

$$(5) \frac{14}{25} \text{ 和 } \frac{21}{38},$$

$$(6) \frac{3}{13} \text{ 和 } \frac{5}{16}.$$

3. (1) 在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{3}$ 之间有一个分数 $\frac{2}{7}$, 用“>”符号把这三个数连结起来.

(2) 在 $\frac{6}{7}$ 和 $\frac{4}{11}$ 之间有一个分数 $\frac{5}{9}$, 用“<”符号把这三个数连结起来.

4. 计算:

$$(1) 1\frac{1}{4} + 2\frac{4}{5},$$

$$(2) 3\frac{1}{9} - 2\frac{2}{3},$$

$$(3) 9\frac{5}{12} - 5\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2},$$

$$(4) 7 - 1\frac{3}{4} - 2\frac{2}{5},$$

$$(5) 28 \times 1\frac{1}{14} + 39\frac{2}{5} \div 13; (6) 6.3 \times 1\frac{1}{3} - 3\frac{5}{6},$$

$$(7) (8 - 3\frac{1}{5}) \div (8 + 3\frac{1}{5}), (8) (1 + 3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}) \div 2\frac{1}{2}.$$

5. 化简:

$$(1) \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times 2}{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \div 2};$$

$$(2) \frac{1\frac{1}{6} + \frac{2}{8} - 1\frac{1}{12}}{2 - \frac{5}{24}};$$

$$(3) \frac{1}{2 - \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}};$$

$$(4) 1 + \frac{3}{1 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}};$$

$$(5) \frac{1 - 10 \div 2\frac{1}{12} \times \frac{5}{24}}{\frac{3}{4} \times 7 \div 1\frac{3}{4} + 1};$$

$$(6) \frac{\left(1\frac{1}{11} - \frac{15}{22}\right) \div 1\frac{4}{11}}{1 + 5 \div \frac{6}{7}};$$

$$(7) \frac{\left(5 - 3\frac{1}{2}\right) \times 2\frac{1}{4}}{4 \div \left(4 + 1\frac{1}{3}\right)};$$

$$(8) \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \times 6 + 0.5}{2 - 1.25 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)}.$$

$$(9) 3 \times 3.5 \times \frac{2}{3} \times 0.44 \div \left(0.11 \times 0.7 \times 15 \times \frac{2}{3}\right); \text{ (可用}$$

化简繁分数的方法计算)

$$(10) 1\frac{6}{50} \times 3\frac{7}{20} \times 4\frac{5}{8} \div (3.35 \times 4.625 \times 1.12).$$

3. 分数和小数

4

[学习要点] 1. 分数化小数. 可根据分数与除法的关系, 用分子除以分母. 例如 $\frac{3}{5} = 3 \div 5 = 0.6$. 能

除尽时, 就可化为有限小数; 除不尽时, 就不能化为有限小数. 如果分母是10、100、1000、……的分数, 可直接写成小数, 例如

$$\frac{13}{100} = 0.13.$$

2. 小数化分数. 有限小数可直接写成分母是 10、100、1000、……的分数. 例如 $0.17 = \frac{17}{100}$.

循环小数化分数的方法是:

(1) 纯循环小数化分数. 这个分数的分子就是一个循环节的数字所组成的数, 分母的各位数字都是 9, 9 的个数和一个循环节的位数相同. 例如, $0.\dot{5}\dot{1} = \frac{51}{99}$.

(2) 混循环小数化分数. 这个分数的分子就是小数点后面的第二个循环节前面的数字组成的数, 减去不循环部分的数字组成的数所得的差; 分母的头几位数字是 9, 末几位数字是 0, 9 的个数和一个循环节的位数相同, 0 的个数和不循环部分的位数相同. 例如, $0.8\dot{7} = \frac{87-8}{90} = \frac{79}{90}$.

3. 小数化百分数. 只要把小数点向右移动两位, 同时在后面添上百分号%. 例如 $0.375 = 37.5\%$.

[练习指导] 1. 怎样的分数能化为有限小数? 怎样的分数不能化为有限小数? 这只要观察一下化成最简分数后, 如果分母只含 2 或 5 的质因数, 这个分数就能化为有限小数; 如果分母中含有 2 和 5 以外的质因数, 就不能化为有限小数.

2. 分数化小数, 要注意的是当分子的位数比需要移动的小点的位数少时, 需要添“0”补足. 例如 $3\frac{17}{1000} = 3.017$.

3. 分数化百分数. 把分数化为小数, 再按照上述法则把小数化为百分数. 对于一些常见的数据, 应熟记. 如: $\frac{1}{2} =$