高等教育教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

工程类数学教材编写组

高等教育出版社

高等教育教材

高等数学

工程类数学教材编写组

高等教育出版社

内容提要

本书为工程类高等数学教材，遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”以及“必需、够用为度”的原则，介绍了最基本的知识和解决问题的方法。本书适用于部分本科学生和高职、高专学生。

内容包括：极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；微分方程；级数；空间解析几何与向量代数；多元函数微分学；多元函数积分学等共十章。并附有 Mathematica 使用简介、习题答案等内容。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／工程类数学教材编写组编著．—北京：高等教育出版社，2003.5

ISBN 7-04-012823-3

Ⅰ．高… Ⅱ．上… Ⅲ．高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 031558 号

责任编辑 蒋锦梁　　**封面设计** 吴　昊　　**责任印制** 蔡敏燕

书　名 高等数学

编　著 工程类数学教材编写组

出版发行 高等教育出版社

社　址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100011

总　机 010-82028899

传　真 021-56965341

购书热线 010-64054588

021-56964871

免费咨询 800-810-0598

网　址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

http://www.hepsh.com

排　版 南京理工排版校对公司

印　刷 上海市印刷七厂

开　本 787 × 1092　1/16

印　张 24.5

字　数 610 000

次 2003 年 6 月第 1 版

次 2004 年 1 月第 4 次

价 24.50 元

凡购买高等教育出版社图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在所购图书销售部门联系调换。

工程类数学教材

编　委　会

（以姓氏笔画为序）

编 者 的 话

根据2000年教育部《应用数学基础课程基本要求》和1996年国家教委颁布的高等工程学校《高等数学课程教学基本要求》，我们编写了此教材，供部分本科学生和高职、高专学生使用。

本教材遵循"拓宽基础，强化能力，立足应用"与"必需、够用为度"的原则编写。强调与计算机应用相结合，书中编写了 *Mathematica* 软件的使用简介。教师应在教学中适当安排时间组织数学实验，以便学生掌握该软件，解决相关问题。

为把学生培养成有较宽的数学基础，具有创新意识，懂得管理，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化实践能力培养。教材加强了例题和习题的编写，使数学理论和实际应用结合得更紧密。教材渗透了数学建模思想，整体上有一定的创新。

教材展示了数学广泛的应用，编写了大量新颖的例题、习题，其中有许多数学在其他学科中应用的题目，例如，在考古学、经营管理、人口问题、环境保护、中华优秀文化遗产的有关计算。这些题目有助于开阔学生视野，启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而不仅会学数学，也会用数学。

教材富有弹性，大部分内容是用宋体印刷的，少部分内容是用楷体印刷的，有的部分加有"*"号。楷体或整节加有"*"号的内容，供教师根据专业的特点与学生的实际选用。本书立足"好教、好学"，每章复习题分A组和B组两组题，A组为基本题，B组供学生选用。在内容选择和文字叙述上，始终贯穿编写原则，力求使本教材成为师生欢迎的教材。

本书由聂晓俊任主编，黎介忠、梅挺任副主编，张慧、刘秀红、徐红英、赵冰、梁秀琼、赵庆樱、何沅湄参加编写，由魏贵民任主审，王开清、刘宗贵任副主审，王新庄、廖远芳参加审稿。

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便我们进一步修订提高。

工程类数学教材编写组

2003年5月

目　　录

第一章　极限与连续

极限是学习微积分的理论基础.连续函数是微积分研究的主要对象.本章讨论函数的极限与函数的连续性.

§1-1　初 等 函 数

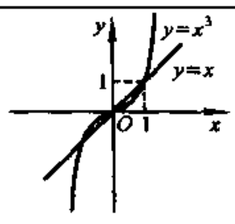
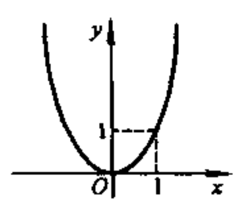
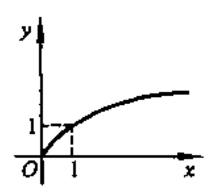
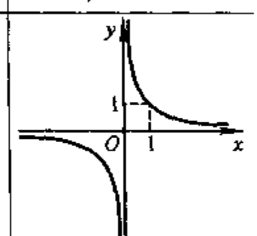
一、基本初等函数

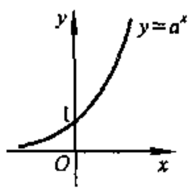
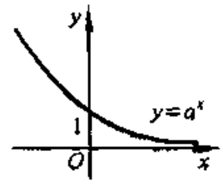
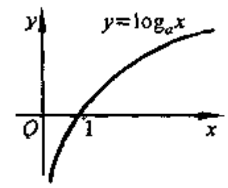
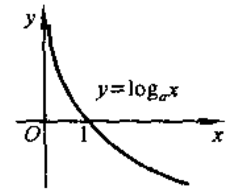
我们已经学过函数的定义,讨论了函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性等函数几何特性.为了学习方便,我们复习一下函数的有关知识.

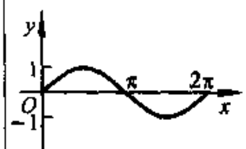
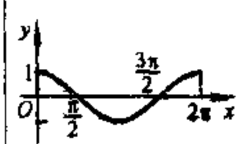
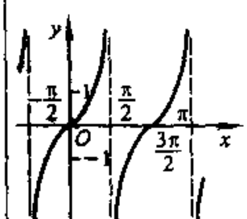
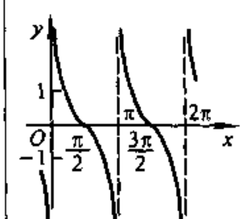
设 D 是一个数集,如果对属于 D 的每一个数 x,按照某个对应关系 f,y 都有唯一确定的值和它对应,则 y 就称为定义在数集 D 的 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$,x 称为**自变量**,数集 D 称为函数的**定义域**.

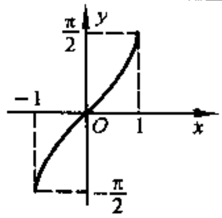
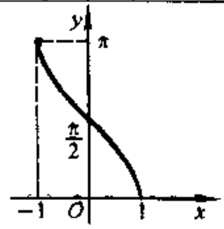
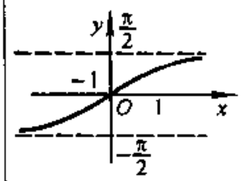
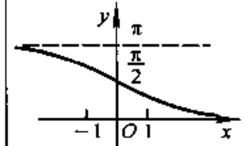
在函数 $y=f(x)$ 中,如果 x 在定义域 D 中取定某一个数值 x_0 时,与之对应的 y 的数值 $y_0=f(x_0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0(x_0\in D)$ 时的函数值.当 x 取遍 D 中的一切实数值时,与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数统称为**基本初等函数**(basic elementary functions).为了便于应用,将它们的定义域、值域、图像和主要性质列表如下.

函　数	幂　函　数　$y=x^{\mu}$			
	$\mu=1,3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图　像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增	在 $(-\infty,0]$ 内单调减 在 $[0,+\infty)$ 内单调增	单调增	在 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 内分别单调减

函　数	指数函数 $y=a^x$　$(a>0,\ a\neq 1)$		对数函数 $y=\log_a x$　$(a>0,\ a\neq 1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图　像				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值　域	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

函　数		$y=\sin x$ (正弦函数)	$y=\cos x$ (余弦函数)	$y=\tan x$ (正切函数)	$y=\cot x$ (余切函数)
图　像					
定义域		$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$
值　域		$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性		奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性		$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	单调增	单调减	单调增	单调减
	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	单调减	单调减	单调增	单调减
	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	单调减	单调增	单调增	单调减
	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	单调增	单调增	单调增	单调减

函　数	$y=\arcsin x$（反正弦函数）	$y=\arccos x$（反余弦函数）	$y=\arctan x$（反正切函数）	$y=\operatorname{arccot} x$（反余切函数）
图　像				
定义域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[0, \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0, \pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

表示函数通常用表格、图像和解析式三种方法.

我们不仅要会从函数的解析式出发，列表、描点作函数图像；会从解析式、数表认识事物的运动变化；也要会从图像认识事物的运动变化，提高识图的能力.

例 1　图 1-1 是钢材从热轧机下来后的温度曲线. T_1℃是钢材热轧时温度，T_0℃是周围环境温度，说明钢材热轧后温度的变化.

解　由牛顿冷却定律，热轧后钢材温度与周围环境温度相差较大，开始时钢材迅速冷却，冷却到与周围环境温度相差不大后，就缓慢冷却，缓慢地接近周围温度.

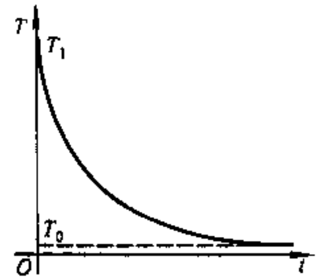


图 1-1

二、复合函数

在实际问题中，我们常常遇到由几个简单的函数构成一个较复杂函数的问题. 例如，设有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 竖直上抛，在不考虑空气阻力的前提下，求动能与时间 t 的函数关系.

由物理学知，如果物体的运动速度为 v，则其动能 E 与速度 v 之间的函数关系为

$$E=\frac{1}{2}mv^2, \tag{1}$$

而竖直上抛运动物体的速度 v 与时间 t 之间的函数关系为

$$v=v_0-gt, \tag{2}$$

其中 g 为重力加速度. 将(2)式代入(1)式得

$$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2,\quad t\in\left[0, \frac{v_0}{g}\right]. \tag{3}$$

(3)式为动能 E 与时间 t 之间的关系，即动能 E 为时间 t 的函数. 下面我们就讨论这类函数.

定义 1　设函数 $y=f(u)$，而 u 是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，此时 y（通过 u 的联系）也是 x 的函数，我们称此函数为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**(composite function)，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**(intermediate argument).

例 2 将函数 y 表示成 x 的复合函数：

(1) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = 3 + x$;　　　　(2) $y = \ln u$, $u = 2 + v^2$, $v = \sec x$.

解 (1) $y = e^u = e^{\sin v} = e^{\sin(3+x)}$，　即　$y = e^{\sin(3+x)}$；

(2) $y = \ln u = \ln(2 + v^2) = \ln(2 + \sec^2 x)$,即 $y = \ln(2 + \sec^2 x)$.

例 3 指出函数的复合过程,并求其定义域：

(1) $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$；　　　　(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$；

(3) $y = \lg(2 + \tan^2 x)$；　　　　(4) $y = \ln\left(\dfrac{1 - 2\sin x}{3 + 2\cos x}\right)$.

解 (1) $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y = u^2$, $u = \arcsin v$, $v = \dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合成的. 要使 $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义,只须 $\arcsin \dfrac{1}{x}$ 有意义,应 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, 即 $|x| \geqslant 1$. 因此 $y = \left(\arcsin \dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 - 3x + 2$ 两个函数复合成的. 要使 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 有意义,只须 $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$, 解此不等式得 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的定义域为 $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

(3) $y = \lg(2 + \tan^2 x)$ 是由 $y = \lg u$, $u = 2 + v^2$, $v = \tan x$ 这三个函数复合而成. 当 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$时, $\tan x$ 不存在,当 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 时, $2 + \tan^2 x > 0$,因此 $y = \lg(2 + \tan^2 x)$ 的定义域为

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z};\text{或}\ \left(k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

(4) $y = \ln\left(\dfrac{1 - 2\sin x}{3 + 2\cos x}\right)$ 是由 $y = \ln u$, $u = \dfrac{1 - 2\sin x}{3 + 2\cos x}$ 两个函数复合而成,由于 $3 + 2\cos x > 0$, 要使函数 y 有意义,只须 $1 - 2\sin x > 0$, 即 $\sin x < \dfrac{1}{2}$, 因此,函数 $y = \ln\left(\dfrac{1 - 2\sin x}{3 + 2\cos x}\right)$ 的定义域为

$$\left(2k\pi - \frac{7}{6}\pi,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

应当指出：(1) 并不是任何两个函数都可以复合成一个函数. 例如 $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个函数,其原因是 u 的值域为 $[2, +\infty)$, 它与 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集为空集,即 $u = 2 + x^2$ 的任何函数值都超出了 y 的定义域.

(2) 从例 3 可见,分析一个复合函数的复合过程时,每个层次都应是基本初等函数[例 3(1)]或常数与基本初等函数的四则运算式[例 3(2)、(3)、(4)]；当分解到常数与基本初等函数的四则运算式(称为**简单函数**)时,就不再分解了.

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的函数称为**初等函数**(elementary function).

由于基本初等函数都是用一个式子表示的,所以由基本初等函数与常数经过有限次四则运

算和有限次复合所得的初等函数能用一个式子表示.

例如,函数 $y = 3\sin(x^2 - 1)$, $y = e^{2x}\ln x$, $y = \sqrt{x} + \tan 3x$, $y = 5\arctan 3x^2 - \ln 3$, $y = a\cos^3 x\sqrt{e^{2x}}$ 等都是初等函数.初等函数是最常见的函数,它是微积分研究的主要对象.

分段函数 $y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 即 $y = \sqrt{x^2} = |x|$, 它是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x^2$ 复合而成的,因此它是一个初等函数.

而分段函数 $y = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - x^3, & x > 0, \end{cases}$ 不能用一个式子表示,因此它不是初等函数(如图 1-2).

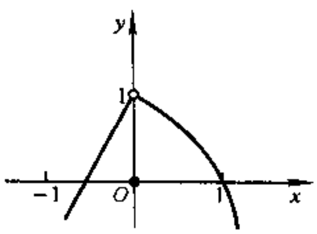


图 1-2

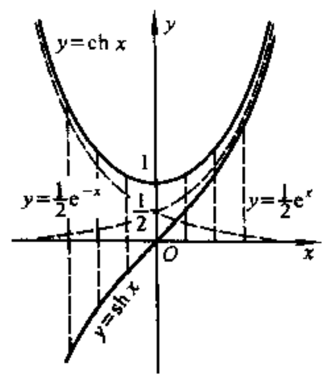


图 1-3

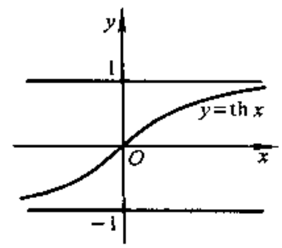


图 1-4

下面,我们简单介绍在应用中常见的双曲函数.

双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, **双曲余弦** $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, **双曲正切** $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

易见,它们的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$,其图像如图 1-3、1-4所示.可以证明:双曲正弦和双曲正切为奇函数,双曲余弦为偶函数.

四、建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时,往往需要先把变量之间的函数关系表示出来,才方便进行计算和分析.

例 4 某罐头厂要生产容积为 $V(\text{cm}^3)$的圆柱形罐头盒,将它的表面积表示成底半径的函数,并确定它的定义域.

解 设圆柱的底半径为 r,高为 h,表面积为 S.

因为 $V = \pi r^2 h$, 于是 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,根据圆柱表面积公式有 $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,所以有 $S = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. 其定义域为 $(0, +\infty)$ (实际上应为 $(0, a]$, $a > 0$).

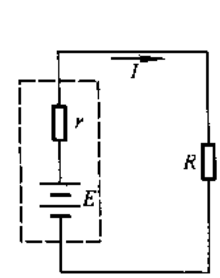


图 1-5

例 5 如图 1-5 所示,电源的电压为 E,内阻为 r,负载电阻为 R,试建立输出功率 P 与负载电阻 R 的函数关系.

解 设电路中的电流为 I,由电学知 $P = I^2R$, 根据闭合电路的欧姆定

律有 $I=\dfrac{E}{R+r}$，代入上式得 P 与 R 的函数关系为

$$P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R \qquad (R>0).$$

例 6 某运输公司规定一吨货物的运价为：在 a 公里内，每公里 k 元；超过 a 公里，每增加一公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元. 试表示一吨货物的运费 y 和里程 s 之间的函数关系.

解 当里程在 a 公里内 $(0\leqslant s\leqslant a)$ 时，运费 $y=ks$；当里程超过 a 公里 $(s>a)$，则超过的里程为 $(s-a)$ 公里时，此时运费为

$$y=ka+\frac{4}{5}k(s-a),$$

于是

$$y=\begin{cases} ks, & 0\leqslant s\leqslant a, \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a), & s>a. \end{cases}$$

这里，y 与 s 的函数关系是用分段函数表示的，函数的定义域为 $[0,+\infty)$.

建立实际问题的函数关系，首先应理解题意，分析问题中的量，找出常量、变量，选定自变量，根据问题所给的几何特性、物理规律或其他知识建立变量间的等量关系，整理化简得函数式. 有时还要根据给定条件确定函数式中的常数数值，然后根据题意，写出函数定义域.

实际问题的函数关系，就是该实际问题的一个数学模型. 建立实际问题的函数关系，就是为了用函数方法解决实际问题. 一般地，用数学方法解决实际问题，首先要对问题的实际背景进行深入了解，摸清楚问题的规律，并用数字、图表、公式等表示出来，就得到数学模型. 数学模型只是对现实事物的某种属性的一种模拟，需不断验证修改，才能使其与实际情况拟合得更好. 根据数学模型，就可对所论问题进行分析讨论. 数学模型是多种多样的，函数关系只是数学模型的一种.

习题 1-1

1. 判断题：

(1) $y=2\sin x$ 是基本初等函数； ( )

(2) $y=a^{2x}$ 不是基本初等函数； ( )

(3) $y=\arccos u,\ u=1+2^x$ 的复合函数是 $y=\arccos(1+2^x)$； ( )

(4) 分段函数都是初等函数. ( )

2. 求函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$； (2) $y=\log_2(3x+1)+\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$； (3) $y=\begin{cases} 2x+1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & 1<x<2, \\ -x, & x>2; \end{cases}$

(4) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{2x}}{3}+7e^{2x}$； (5) $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$； (6) $y=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{\lg x}$.

3. 判定函数的奇偶性：

(1) $y=x^2-3\cos 2x$； (2) $y=x(x-1)(x+1)$； (3) $y=2^x+1$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (5) $y=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$

4. 已知 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，求 $f(-x)$、$f\left(\frac{1}{x}\right)$、$f(a+1)$、$f[f(x)]$ 的值.

5. 作函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0,\\ \pi, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$ 的图像，求 $f(-3)$、$f(0)$、$f(a^2+2)$、$f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的值

6. 将 y 表示为 x 的函数：

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=x^3-1$;　　(2) $y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=x+\frac{\pi}{3}$;

(3) $y=e^u$, $u=v^2$, $v=\cot x$;　　(4) $y=\arccos u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\frac{x-a}{b-a}$.

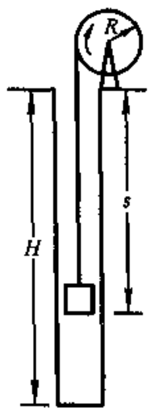
7. 分析函数的复合过程：

(1) $y=(1+x)^5$;　　(2) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;　　(3) $y=\frac{1}{(1-x^2)^3}$;

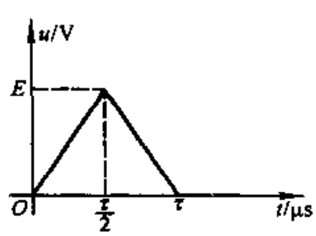
(4) $y=3^{2\cos^2 x}$;　　(5) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{\ln(3x-2)}}$;　　(6) $y=(1+\arctan x^2)^3$.

8. 矿井深 H(m)，用卷筒半径为 R(m)的卷扬机从井底吊起重物. 设卷筒以等角速度 ω(rad/s)转动(如图)，求起吊过程中重物底部离地面的距离 s 与时间 t 的函数关系式.

9. 已知一个单三角脉冲电压，其波形如图所示，建立电压 u(V)与时间 t(μs)之间的函数关系式.



第 8 题图

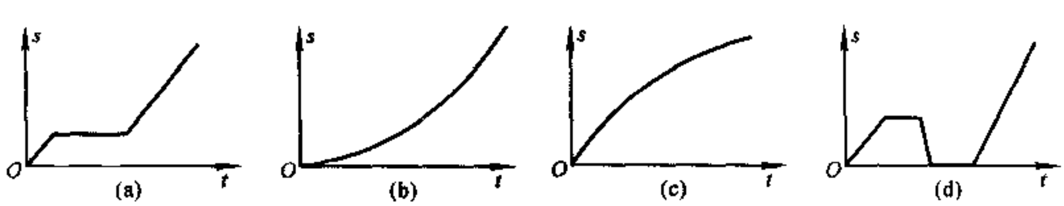


第 9 题图

10. 证明在区间 $(0,+\infty)$ 内，函数 $y=\lg x$ 是单调增加的；函数 $y=\frac{1}{x}$ 是单调减少的.

11. 一物体作直线运动，已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反. 当物体以 1 m/s 的速度运动时，阻力为 1.96×10^{-2}N，建立阻力与速度之间的函数关系.

12. 图中哪几个图像与下述三件事分别吻合得最好？并为剩下的那个图写出一件事.



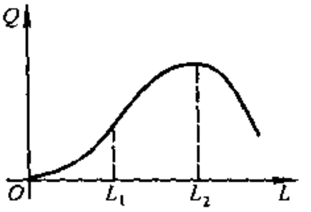
第 12 题图

(1) 我离家不久，发现自己把公文夹忘在家里，于是立即返回家取了公文夹再上路.

(2) 我驾车一路以常速行驶，只是在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间.

(3) 我出发后，心情轻松，边驾车边欣赏四周景色，后来为了赶路便开始加速.

13. 描述图中装配线的情况，该装配线的产量 Q 是劳动力 L 的函数.



第 13 题图

§1-2 函数的极限

极限概念是学习微积分的基础，必须掌握好. 我们首先讨论数列(整标函数) $x_n = f(n)$, $n \in \mathbf{Z}^+$ 的极限，然后讨论函数 $y = f(x)$ (当 $x \to \infty$ 或 $x \to x_0$ 时)的极限.

一、数列 $x_n = f(n)$ 的极限

考察几个数列，当 n 无限增大时，x_n 的数值的变化趋势：

(1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \cdots$;

(2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$;

(3) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$;

(4) $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{n-1}, \cdots$.

为清楚起见，我们把这四个数列的前 4 项分别在数轴上表示出来(图 1-6(1)、(2)、(3)、(4)).

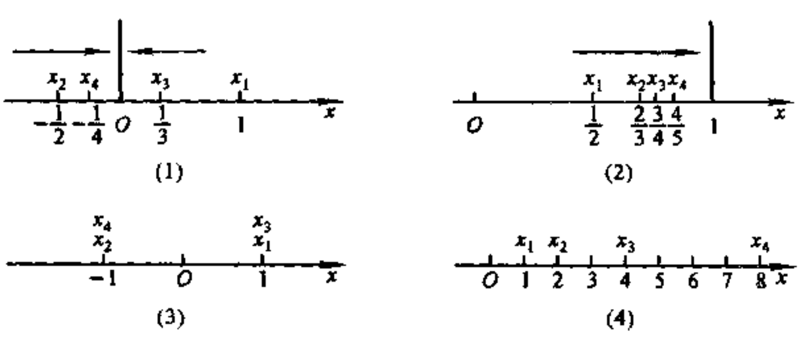


图 1-6

四个数列反映出的数列变化趋势，它们大体分为两类：当 n 无限增大时，一类 x_n 的数值无限接近于某一个常数；另一类则不能保持与某个常数无限接近. 数列(1)、(2)属于前一类，从图 1-6 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 无限地靠近点 $x = 0$；数列 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 无限地靠近点 $x = 1$. 数列(3)、(4)则属于后一类，当 n 无限增大时，数列(3)的数值在 $x = 1$ 与 $x = -1$

来回跳动;数列(4)的数值则无限增大,它们都不能保持与某个常数无限接近.我们主要讨论前一类,对此有定义.

定义 1 如果当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$),数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为**数列 x_n 的极限**(limit of a number sequence),记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或 } x_n \to A\ (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

由定义 1 及图 1-6 的(1)、(2)知,当 $n\to\infty$ 时,数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的极限为 0, $x_n=\frac{n}{n+1}$ 的极限为 1.它们可分别记为

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0 \quad \text{与} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

如果 $n\to\infty$ 时,x_n 无限接近的常数 A 不存在,则 x_n 的极限不存在.例如 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

应当指出,"数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A",是指 x_n 与 A 的距离 $|x_n-A|$ 无限变小,即 $|x_n-A|$ 可以小到任意小的程度.

例如已知数列 $x_n=\frac{n-1}{n+1}$,问 n 为何值时有:(1) $|x_n-1|<\frac{1}{10\,000}$; (2) $|x_n-1|<\varepsilon$.

因为 $\quad |x_n-1|=\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|=\frac{2}{n+1}$,于是

(1) 要使 $|x_n-1|<\frac{1}{10\,000}$,则须 $\frac{2}{n+1}<\frac{1}{10\,000}$,即 $n+1>20\,000$, $n>19\,999$;

(2) 要使 $|x_n-1|<\varepsilon$. 则须 $\frac{2}{n+1}<\varepsilon. n+1>\frac{2}{\varepsilon}$, $n>\frac{2}{\varepsilon}-1$,记$\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$表示$\frac{2}{\varepsilon}-1$的整数部分(例如$[198.9]=198$),令 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$,只要 $n>N$ 时,就有 $|x_n-1|<\varepsilon$.

由此我们有,数列 x_n 以常数 A 为极限的"$\varepsilon-N$"定义:

定义 1′ 对于任意小的正数 ε,如果存在一个正整数 N,当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 x_n,当 $n\to\infty$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

例如上例中,(1)中的 N 就是 19 999; (2)中的 N 就是$\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$.

例 1 考察数列的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$; (2) $x_n=-\frac{1}{2^{n-1}}$.

解 (1) 当取 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 时,数列 $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$ 的各项依次为 $1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \cdots$,若把它们表示在数轴上,则如图 1-7(1)所示.由图形及此数列的特点可知,当 n 无限增大时,$x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$ 无限接近于 2,所以由数列极限的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)=2.$$

(2) 当取 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 时,$x_n=-\frac{1}{2^{n-1}}$ 的各项依次为 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$,若把它们表示在数轴上,则如图 1-7(2)所示.由图形及此数列的特点可知,当 n 无限增大时,