实变函数与泛函分析

（第二版）·下册

郭大钧　黄春朝　梁方豪　韦忠礼　编

SHIBIANHANSHUYU
FANHANFENXI

山东大学出版社
Shandong University Press

实变函数与泛函分析

（第二版）

下册

郭大钧　黄春朝　梁方豪　韦忠礼　编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/郭大钧等编. —2 版. —济南:山东大学出版社,2005.7

ISBN 7—5607—2987—8

Ⅰ. 实...

Ⅱ. 郭...

Ⅲ. ①实变函数—高等学校—教材②泛函分析—高等学校—教材

Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 062009 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

山东旅科印务有限公司印刷

850×1168 毫米　1/32　　18.875印张　　474千字

2005 年 7 月　第 2 版　2005 年 7 月第 2 次印刷

印数:5001—7000 册

定价:36.80 元(全两册)

目　录

下　册

第七章 距离空间·赋范线性空间

§7·1 距离空间的定义及例

在数学分析中主要是研究有限维欧几里德空间及其上的函数的分析性质. n 维欧几里德空间有许多基本概念,如球、开集、导集、闭集、极限等等,利用这些概念又产生了 R^n 上函数的有界性、连续性、函数列的收敛性、一致收敛性等等重要的数学概念. 我们知道,所有这些概念都可以基于 R^n 中两点 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 与 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 间的距离

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}$$

来定义. 例如,当我们说 R^n 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于一点 $x\in R^n$,那就是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$. 所以,"距离"这个概念在数学分析中起着根本的作用. 现在,我们将"距离"这个概念抽象出来移植到一般的抽象集合上去,从而得出距离空间的概念.

定义1 设X是一个集合,如果按某一法则对于X中任意二元素 x,y 都有一个非负实数 $\rho(x,y)$ 与之对应,且满足下列条件:

(i) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,

则称 $\rho(x,y)$ 是 x **与** y **间的距离**,且称 $X\times X$ 上的函数 $\rho=\rho(\cdot,\cdot)$ 为 **X 上的一个距离**,并称 X 按 ρ 成为一个**距离空间(或度量空间)**,

记作(X,ρ).

在不引起混淆的情况下,往往简单地说X是一距离空间,并形象地把X的元素称为"点",把X的子集称为"点集".

距离ρ所应满足的条件(i),(ii),(iii)通常称为距离三公理.公理(iii)也称三角不等式或三角形公理.在R^3中三角不等式即表示"三角形任一边之长不超过其余二边长之和"——这正是"三角形公理"这个术语的来源.

定义2 设X是以ρ为距离的距离空间.如果$\{x_n\}\subset X$,$x\in X$,有

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0,$$

则称点列x_n**趋于(收敛于)**x,或称x是x_n的**极限**,记作

$$x_n\to x \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

有极限的点列称作**收敛列**;如果$\{x_n\}\subset X$,有

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m)=0, \tag{7·1·1}$$

则称$\{x_n\}$是一个**基本列**,或称点列$\{x_n\}$是**本来收敛的**,基本列也称作Cauchy列.

显然,收敛列必是基本列.事实上,如果$x_n\to x$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数N,使当$n>N$时$\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$,于是当$n$,$m>N$时

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x)<\varepsilon,$$

故(7·1·1)式成立.但其逆一般不成立,即在一个距离空间中基本列未必收敛.

例如,取X为R^1中除去原点后所成之集,按距离

$$\rho(x,y)=|x-y|,$$

X是一距离空间,

$$x_n=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

是 X 中一基本列，但它在 X 中无极限(因 $0 \overline{\in} X$).

定义 3　如果距离空间 X 中任一基本列都有极限，则称 X 是**完备距离空间**.

例如，由 Cauchy 收敛准则，n 维欧几里德空间 R^n 是完备距离空间.

我们看到，在距离空间中极限的概念是通过距离来定义的. 但是应当注意，一个非空集 X，当它不仅含有一个点时，可以在 X 上定义不同的距离，而且一般地说不同的距离所决定的收敛是不一样的.

例如，在 R^1 中可以定义距离

$$\rho_1(x,y) = |x-y|,$$

也可以定义距离

$$\rho_2(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = y, \\ 1, & \text{当 } x \neq y, \end{cases}$$

点列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 在 ρ_1 下是一收敛列，它以 0 为极限，但在 ρ_2 下却不是收敛列，甚至不是基本列.

如果集合 X 上的两个距离 ρ_1、ρ_2 所决定的收敛相同，我们就说 ρ_1 与 ρ_2 等价. 更确切地说，我们有

定义 4　称集合 X 上的两距离 ρ_1、ρ_2 是等价的，是指对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$ 及任一点 $x_0 \in X$，

$$\rho_1(x_n,x_0) \to 0 \Longleftrightarrow \rho_2(x_n,x_0) \to 0.$$

例 7·1·1　在实数集 R^1 中定义

$$\rho_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \qquad \forall\, x、y \in R^1,$$

则 ρ_1 是 R^1 上的一个距离.

事实上，距离公理中的(i)，(ii) 显然成立. 下证(iii) 成立：由于函数 $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ 是$(0,\infty)$ 上的单调增加函数，再由

$$|x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$$

即得

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|}\leqslant\frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$
$$\leqslant\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|},\quad(7\cdot1\cdot2)$$

所以

$$\rho_1(x,y)\leqslant\rho_1(x,z)+\rho_1(z,y).$$

容易看出,这里定义的距离 $\rho_1(x,y)$ 与通常在 R^1 中定义的距离

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

是等价的. 但在以后如不加声明,凡说 R^1 中距离都是指

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

例 7·1·2 空间 $S(E)$. 设 E 是 R^n 中可测集且 $0<mE<+\infty$. 把一切在 E 上几乎处处取有限值的可测函数所成之集记为 $S(E)$,并且把 $S(E)$ 中凡几乎处处相等的函数看成同一个元素,在 $S(E)$ 上定义距离

$$\rho(f_1,f_2)=\int_E\frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{1+|f_1(x)-f_2(x)|}\mathrm{d}x,\ \forall f_1,f_2\in S(E),\quad(7\cdot1\cdot3)$$

则 $S(E)$ 成为一个完备的距离空间. $S(E)$ 可简记作 S.

证明 ρ 显然满足距离公理(i)和(ii),下证满足(iii):由(7·1·2)式知对任 $f_1,f_2,f_3\in S$ 有

$$\frac{|f_1-f_2|}{1+|f_1-f_2|}\leqslant\frac{|f_1-f_3|}{1+|f_1-f_3|}+\frac{|f_2-f_3|}{1+|f_2-f_3|},$$

两边在 E 上积分即得 $\rho(f_1,f_2)\leqslant\rho(f_1,f_3)+\rho(f_2,f_3)$.

由第五章习题知,S 中 $f_n\to f$ 等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$. 类似地可以证明 S 中 $\{f_n\}$ 为基本列等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 为"依测度基本列", 即对任意 $\varepsilon>0$ 都有

$$\lim_{m,n\to\infty} mE[\,|f_n - f_m| \geqslant \varepsilon] = 0\,.$$

由第四章习题知依测度基本列等价于依测度收敛列. 这就说明 S 是完备的. ▌

例 7·1·3　空间 s. 一切实数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 所成之集记为 s. 在 s 中定义距离

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}, \qquad (7·1·4)$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 及 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$ 是 s 中任意的点, 则 s 成为一个完备的距离空间. 并且在 s 中 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots)$ 收敛于 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 等价于对每个固定的自然数 i 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$. 请读者参照例 7·1·2 来完成证明.

例 7·1·4　离散距离空间. 设 X 是一个非空集合, 在 X 上定义

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq y \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x = y \text{ 时}, \end{cases} \qquad (7·1·5)$$

则 X 按 ρ 成为一个完备的距离空间(证明留作习题), 我们称此(X, ρ) 是一个**离散距离空间**(简称离散空间).

§7·2　赋范线性空间的定义及例

定义 1　设 E 是一个非空集合, K 表示复(或实)数域. 如果

(i) E 是一个加法群(Abel 群), 即定义了 E 中每两个元素 x, y 的加法运算, $x + y \in$ E, 满足:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) E 中存在零元素 θ, 使对任何 $x \in$ E 均有 $x + \theta = x$;

4) 对任一 $x \in$ E, 存在加法逆元 $-x$ 使 $x + (-x) = \theta$,

(ii) 定义了 K 中每个数 α 与 E 中每个元素 x 的乘法运算, $\alpha x \in$

E,满足：

1) $1x = x$;

2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

则称 E 是一个**复(或实)线性空间**.

注 1 我们通常把 $x+(-y)$ 写作 $x-y$,且在不致引起混淆的情况下把 E 中的零元素 θ 写作 0.

注 2 今后凡说“线性空间”而前面不标出“复”、“实”字样时,意指此线性空间既可以是复的也可以是实的.

我们约定今后凡说到数是指实数或复数,而不再指 $\pm\infty$.

例 7・2・1 数列空间. 设 K 是实数域,Q 是某些实数列所组成的集(Q $= \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)\}$). 定义 Q 中两元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 与 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$ 的加法以及数 $\alpha \in K$ 与元素 x 的乘法如下：

$$\left.\begin{aligned} x + y &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots) \\ \alpha x &= (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots) \end{aligned}\right\}. \qquad (7\cdot 2\cdot 1)$$

若当 $x, y \in$ Q,$\alpha, \beta \in K$ 时恒有 $\alpha x + \beta y \in$ Q,则 Q 成为 K 上的一个线性空间. 此线性空间称为**实的数列空间**. 类似地可定义**复的数列空间**(这时 K 为复数域,Q 中元素为复数列).

例 7・2・2 函数空间. 设 K 为实数域,Ω 为 R^n 中的一个点集,F 是 Ω 上某些实值函数所组成的集(F $= \{f\}$). 定义 F 中两元素 f 与 g 的加法以及数 $\alpha \in K$ 与 f 的乘法如下：

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad (\forall x \in \Omega) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha \cdot f(x) \qquad\quad (\forall x \in \Omega) \end{aligned}\right\} \qquad (7\cdot 2\cdot 2)$$

(即函数普通意义的加法及数乘运算). 若当 $f, g \in$ F,$\alpha, \beta \in K$ 时恒有 $\alpha f + \beta g \in$ F,则 F 成为 K 上的一个线性空间,此线性空间称为**实的函数空间**. 类似地可定义**复的函数空间**(这时 K 为复数域,F 中元素为 Ω 上的复值函数).

注 1　今后若说到某具体数列空间、函数空间而未说明是“实的”还是“复的”时，意指实、复均可. 但为叙述上的方便我们往往只就“实的”情况来证明有关结论.

注 2　R^n 中点集 Ω 上的复值函数 $f(x)$ 必可唯一地表成

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是 Ω 上的实值函数. 当 f_1，f_2 均为可测函数时称 f 是**可测函数**. 当 f_1、f_2 均为可积函数时称 f 是**可积函数**，并且规定

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_1(x)\mathrm{d}x + i\int_\Omega f_2(x)\mathrm{d}x.$$

又当 $|f_1(x) + if_2(x)|$ 为 p 幂可积函数时称可测函数 $f(x)$ 是 **p 幂可积函数**等等.

定义 2　设 E 是一个复(或实)线性空间，如果在 E 上定义了一个实值函数 $\|\cdot\|$，它满足下面的“范数公理”：

(i) $\|x\| \geqslant 0$；$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$，

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$　$(\alpha \in K)$，

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，

则称 $\|x\|$ 为**元素 x 的范数**，且称 $\|\cdot\|$ 是 **E 上的一个范数**，并称 E 按 $\|\cdot\|$ 成为一个复(或实)**赋范线性空间**(简称复(或实)**赋范空间**).

对赋范线性空间 E，定义

$$\rho(x,y) = \|x - y\| \qquad (\forall x,y \in \mathrm{E}),$$

容易验证 $\rho(x,y)$ 是 E 上的距离. 此 $\rho(\cdot,\cdot)$ 称为**范数 $\|\cdot\|$ 所导出的距离**.

今后凡说赋范线性空间上的距离均指其范数所导出的距离，并在此意义下说赋范线性空间是距离空间.

定义 3　如果赋范线性空间 E 按范数所导出的距离是一个完备的距离空间，则称 E 是一个 **Banach 空间**(或 **B－型空间**).

下面举一些赋范线性空间的例子,这些例子在泛函分析及其应用中都是很重要的.

例 7·2·3 n 维欧氏空间 R^n. 设

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in R^n,\alpha\in R^1,$$

定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n),$$

并定义 x 的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\qquad(7\cdot 2\cdot 3)$$

显然 R^n 成为一个 Banach 空间,并且 $\|\cdot\|$ 导出的距离即欧氏距离.

例 7·2·4 连续函数空间 $C[a,b]$. 考察闭区间 $[a,b]$($a<b$)上连续函数 $f(x)$ 的全体所成的集合 $C[a,b]$. 在其中两函数的"加法"以及数与函数的"乘法"按普通的意义定义,那么 $C[a,b]$ 成一线性空间(请予验证),其中函数的范数按下式定义

$$\|f\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\qquad(7\cdot 2\cdot 4)$$

则 $C[a,b]$ 成一 Banach 空间.

事实上,范数的三个公理显然是满足的(请予验证),我们只需再证明完备性. 首先注意,在 $C[a,b]$ 中的收敛

$$\rho(f_n,f)=\|f_n-f\|\to 0$$

意味着函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

设 $\{f_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中一基本列,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n,m>N$ 时

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon,$$

依范数定义(7·2·4),对任一 $x\in[a,b]$ 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|,$$

从而当 $n,m>N$ 时有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b].$$

由此可知，$f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于某连续函数 $f(x)$，亦即

$$\rho(f_n,f)\to 0,\ (n\to\infty).$$

$C[a,b]$ 的完备性得证.

例 7·2·5　空间 $C^m[a,b]$. 考察闭区间$[a,b]$($a<b$) 上 m 次连续可微的函数 $f(x)$ 的全体所成之集 $C^m[a,b]$. 在其中两函数的"加法"以及数与函数的"乘法"按普通的意义定义，那么 $C^m[a,b]$ 成一线性空间，其中函数 $f(x)$ 的范数按下式定义

$$\|f\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|+\cdots+\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(m)}(x)|,\tag{7·2·5}$$

则 $C^m[a,b]$ 成为一个 Banach 空间.

例 7·2·6　空间 m. 一切有界数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 所成之集记为 m. $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 的"加法"及数 α 与 x 的"乘法"按(7·2·1) 来定义，而范数按下式定义

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i|,\tag{7·2·6}$$

则 m 成为一个 Banach 空间.

例 7·2·5、例 7·2·6 可仿例 7·2·4 证明之，把它们留给读者.

例 7·2·7　空间 M(E). 设 E 是 R^n 中的可测集. 令 M(E) 表示 E 上本质有界的可测函数的全体（即对每一 $f(x)\in$ M(E) 都有 $L>0$ 使 $|f(x)|\leqslant L$, $a.e.$)，并且把 M(E) 中凡几乎处处相等的函数看成同一元素. 对 $f(x)\in$ M(E) 定义

$$\|f\|=\inf\{L\mid |f(x)|\leqslant L,\ a.e.\},\tag{7·2·7}$$

则按普通函数的加法与数乘运算 M(E) 是一线性空间，且按(7·2·7) 式所定义的范数 M(E) 为一个 Banach 空间. M(E) 可简记作 M.

我们指出，对每一 $f\in$ M 必存在 $e\subset E$, $me=0$，使

$$\|f\|=\sup_{x\in E\setminus e}|f(x)|.$$

事实上，对每一自然数 n，$|f(x)|\leqslant\|f\|+\dfrac{1}{n}$, $a.e.$，因此

存在 $e_n \subset E, me_n = 0$,使当 $x \in E \setminus e_n$ 时有

$$|f(x)| \leqslant \|f\| + \frac{1}{n},$$

令 $e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$,则 $me = 0$,且当 $x \in E \setminus e$ 时有

$$|f(x)| \leqslant \|f\| + \frac{1}{n}, \qquad n = 1,2,\cdots$$

从而当 $x \in E \setminus e$ 时 $|f(x)| \leqslant \|f\|$,但显然不能有

$$\sup_{x \in E \setminus e} |f(x)| < \|f\| \qquad \text{(否则与(7·2·7)矛盾)},$$

故

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus e} |f(x)|.$$

利用上面指出的结论,不难证明 M 是 Banach 空间(留给读者作练习).

例 7·2·8 空间 $L^p(E)(p \geqslant 1)$. 设 E 是 R^n 中的可测集,我们把 E 上的一切 p 幂可积函数 $f(x)$ 所成之集记为 $L^p(E)$,并且把 $L^p(E)$ 中凡几乎处处相等的函数看成同一元素,在 $L^p(E)$ 中两函数的"加法"及数与函数的"乘法"按普通意义定义,而范数按下式定义

$$\|f\| = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \qquad (7 \cdot 2 \cdot 8)$$

则 $L^p(E)$ 成一 Banach 空间. $L^p(E)$ 可简记作 L^p.

证明　显然 L^p 是线性空间. 以下证明(7·2·8)式确实是定义了 L^p 上的范数. 范数公理(i)、(ii)显然满足. 当 $p = 1$ 时范数公理(iii)也显然满足. 下设 $p > 1$,并设 $q = \dfrac{p}{p-1}$ (即 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$)来证范数公理(iii)也满足. 分如下几步进行:

1°. 证明对任意 $A \geqslant 0, B \geqslant 0$ 有

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \qquad (7 \cdot 2 \cdot 9)$$

当 $AB = 0$ 时,(7·2·9)式显然成立. 当 $AB > 0$ 时,考虑函数

$$\varphi(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}-x\ (x\geqslant 0).$$

由于 $\varphi'(x)=x^{p-1}-1$,故当 $x<1$ 时 $\varphi'(x)<0$,当 $x>1$ 时 $\varphi'(x)>0$,因此 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 达到最小值 0,即对任一 $x\geqslant 0$, $\varphi(x)\geqslant 0$.

令 $x=AB^{-q/p}$,则

$$\frac{A^pB^{-q}}{p}+\frac{1}{q}-AB^{-q/p}\geqslant 0.$$

以 B^q 乘上式并注意到 $q-\frac{q}{p}=q(1-\frac{1}{p})=1$,即得(7・2・9)式.

2°. 证明若 $f\in L^p$, $g\in L^q$,则 $fg\in L^1$,且

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \tag{7・2・10}$$

不失一般性可设　$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x>0$,　$\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x>0$.

令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}},\quad \psi(x)=\frac{g(x)}{\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}},$$

由(7・2・9)式,

$$|\varphi(x)\psi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q},$$

因而 $\varphi(x)\psi(x)\in L^1$,从而 $f(x)g(x)\in L^1$ 且

$$\int_E|\varphi(x)\psi(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E\frac{|\varphi(x)|^p}{p}\mathrm{d}x+\int_E\frac{|\psi(x)|^q}{q}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_E|\varphi(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|\psi(x)|^q\mathrm{d}x=1$$

及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 即知(7・2・10)式成立.