体育运动学校试用教材

数 学

第四册

体育运动学校《数学》教材编写组编

体育运动学校试用教材
数　　学
(第四册)
体育运动学校《数学》教材编写组编
人民体育出版社出版
河北新华印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行
*
787×1092毫米 32开本 5 20/32印张 100千字
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷
印数：1—12,600 册
*
统一书号：7015·2447　定价：0.70 元

前 言

为提高体育运动学校的教学质量，加速培养有文化的高水平运动后备人才，遵照1985年全国中专教材规划会议精神和体育运动学校办校方案的规定，编写了这套全国体育运动学校文化课教材。本教材是以普通中学课本的乙种本为蓝本，并参考其它中专教材，根据体育运动学校的实际，作了适当的取舍和必要的修改。

这套《数学》教材共分四册，这是第四册，内容包括复数；直线；圆锥曲线；参数方程、极坐标；统计初步等章节。为了因材施教，使数学教材更富有适应性和稳定性，编写了带“※”号的章节，供教学时根据实际情况选用。本书的习题分练习和习题两类，练习供课堂练习用，习题主要供课堂作业用。此教材供从初中三年级办起的四年制体育运动学校使用，其它学制的体育运动学校也可选用。

本教材由国家体委群体司组织体育运动学校《数学》教材编写组集体编写。参加编写的有（按姓氏笔划排列）：武汉市体育运动学校的冯锡慈、天津市体育运动学校的许致中、吉林省体育运动学校的谷玉兰、辽宁省体育运动学校的张道翰、湖北省体育运动学校的曾庆同。最后经国家教委聘任的全国中等专业学校《数学》学科课程组成员张齐金审查修改定稿。

本书系试用教材。由于编写的时间紧迫，编者的业务水平所限，不妥之处在所难免，恳请大家在试用中提出批评，

予以指正，以便今后作进一步的修订。

体育运动学校《数学》教材编写组

目　　录

第十三章 复　数

一　复数的概念

13.1 数的概念的发展

数的概念是从实践中产生和发展起来的。早在原始社会末期，由于计数的需要，人们就建立起自然数的概念。自然数的全体构成自然数集 N。

随着生产和科学的发展，数的概念也得到发展。

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数法的要求，人们引进了零及负数，把自然数看作正整数，把正整数、零、负整数合并在一起，构成整数集 Z。

为了解决测量、分配中遇到的将某些量进行等分的问题，人们又引进了有理数，规定它们就是一切形如$\frac{m}{n}$的数，其中 $m\in Z$，$n\in N$。这样，就把整数集 Z 扩大为有理数集 Q。显然，$Z\subset Q$。如果把整数看作分母为 1 的分数，那么有理数集实际上就是分数集。

每一个有理数都可以表示成整数、有限小数或循环节不为 0 的循环小数；反过来，整数、有限小数或循环节不为 0 的循环小数也都是有理数。如果把整数、有限小数都看作循环节为 0 的循环小数，那么有理数集实际上也就是循环小数的集合。

为了解决有些量与量之间的比值（例如用正方形的边长

去度量它的对角线所得结果）不能用有理数表示的矛盾，人们又引进了无理数。所谓无理数，就是无限不循环小数。有理数集与无理数集合并在一起，构成实数集 R。因为有理数都可看作循环小数（包括整数、有限小数），无理数都是无限不循环小数，所以实数集就是小数集。

从解方程来看，方程 $x+5=3$ 在自然数集 N 中无解，在整数集 Z 中就有一个解 $x=-2$；方程 $3x=5$ 在整数集 Z 中无解，在有理数集 Q 中就有一个解 $x=\frac{5}{3}$；方程 $x^2=2$ 在有理数集 Q 中无解，在实数集 R 中就有两个解 $x=\pm\sqrt{2}$。但是，数的范围扩充到实数集 R 以后，象 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解，因为没有一个实数的平方等于 -1。在十六世纪，由于解方程的需要，人们开始引进一个新数 i，叫做**虚数单位**，并规定：

（1）**它的平方等于 -1，即**

$$i^2=-1;$$

（2）**实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有的加、乘运算律仍然成立。**

在这种规定下，i 可以与实数 b 相乘，再同实数 a 相加，由于满足乘法交换律及加法交换律，从而可以把结果写成 $a+bi$。这样，数的范围又扩充了，出现了形如 $a+bi\ (a, b\in R)$ 的数，人们把它们叫做**复数**。全体复数所成的集合，一般用字母 C 来表示。❶

在这种规定下，i 就是 -1 的一个平方根。因此，方程 $x^2=-1$ 在复数集 C 中就至少有一个解 $x=i$。

---

❶ C 是英文词组 Complex numbers（复数）的第一个字母。

十八世纪以后，复数在数学、力学和电学中得到了应用。从此对它的研究日益展开。现在复数已成为科学技术中普遍使用的一种数学工具。

13.2 复数的有关概念

复数 $a+bi$（a，$b\in R$。以后说复数 $a+bi$ 时，都有 a，$b\in R$），当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时，叫做**虚数**，当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，叫做**纯虚数**；a 与 b 分别叫做复数 $a+bi$ 的**实部与虚部**。例如，$3+4i$，$-\frac{1}{2}-\sqrt{2}i$，$-0.5i$ 都是虚数，它们的实部分别是 3，$-\frac{1}{2}$，0，虚部分别是4，$-\sqrt{2}$，-0.5。

显然，实数集 R 是复数集 C 的真子集，即 $R\subset C$。

如果两个复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 的实部与虚部分别相等，我们就说这两个**复数相等**，记作 $a+bi=c+di$。这就是说，如果 a，b，c，$d\in R$，那么

$$a+bi=c+di\Longleftrightarrow a=c,\ b=d,$$

$$a+bi=0\Longleftrightarrow a=b=0.$$

例 已知 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，其中 x，$y\in R$。求 x 与 y。

解：根据复数相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y).\end{cases}$$

$$\therefore\qquad x=\frac{5}{2},\ y=4.$$

从复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z=a+bi$，都可以由一个有顺序的实数对 $(a,\ b)$ 唯一确定。这就使我们

能借用平面直角坐标系来表示复数 $z=a+bi$。如图 13-1，点 Z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a, b)$ 来表示。这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做**复平面**，x 轴叫做**实轴**，y 轴除去原点的部分叫做**虚轴**（因为原点表示实数 0，原点不在虚轴上）。表示实数的点都在实轴上，表示纯虚数的点都在虚轴上。

很明显，按照这种表示方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应。由此可知，复数集 C 和复平面内所有的点所成的集合是一一对应的。这是复数的一个几何意义。

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**（当虚部不等于 0 时也叫做互为**共轭虚数**）。复数 z 的共轭复数可以用 $\bar{z}$ 来表示，也就是说，复数 $z=a+bi$ 的共轭复数是 $\bar{z}=a-bi$。显然，复平面内表示两个互为共轭复数的点 Z 与 $\bar{Z}$ 关于实轴对称（图 13-2），而实数 a（即虚部为 0 的复数）的共轭复数仍是 a 本身。

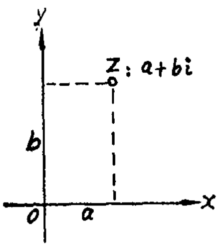


图 13-1

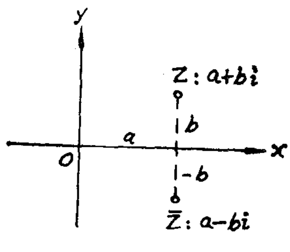


图 13-2

两个实数可以比较大小。但两个复数，如果不全是实数，就不能比较它们的大小。关于这个命题的证明，本书从略。

练习

1．如果 a，$b\in R$，在什么情况下，$a+bi$ 是实数？是虚数？是纯虚数？各举一些例子。

2．说出下列数（其中 i 是虚数单位）中，哪些是实数，哪些是纯虚数，哪些是复数：

$$2+\sqrt{7}，\ 0.618，\ \frac{2}{7}i，\ 0，\ i，\ i^2，$$

$$5i+8，\ 3-9\sqrt{2}\,i，\ (1-\sqrt{3})i，\ 2-\sqrt{2}\,i.$$

3．说出下列复数的实部与虚部：

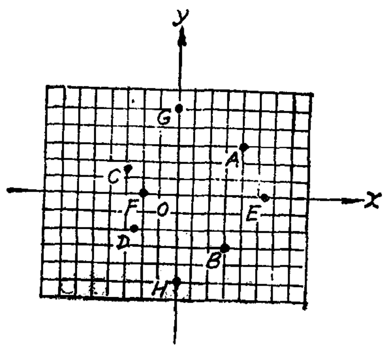
$$-5+6i，\quad \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i，\ -\sqrt{3}，\ i，\ 0.$$

4．求适合下列方程的 x 与 $y(x,\ y\in R)$ 的值：

(1) $(3x+2y)+(5x-y)i=17-2i$；

(2) $(3x-4)+(2y+3)i=0$.

5．说出图中复平面内各点所表示的复数（每个小正方格子边长为 1）：



第5题

6. 在复平面内描出表示下列复数的点：

(1) $2+5i$；　(2) $-3+2i$；

(3) $\frac{1}{2}-4i$；　(4) $-i-3$；

(5) 5；　(6) $-3i$；

(7) $6i$；　(8) -2；

(9) $1-\sqrt{2}i$；　(10) $\sqrt{3}$。

7. 设复数 $z=a+bi$ 和复平面内的点 $Z(a, b)$ 对应，a，b 必须满足什么条件，才能使点 Z 位于：

(1)实轴上？

(2)虚轴上？

(3)上半平面（不包括实轴)？

(4)右半平面（不包括原点和虚轴)？

8. 说出下列复数的共轭复数，并在复平面内把每一对复数表示出来：

$$4-3i,\ -1+i,\ -5-12i,\ 4i+\frac{1}{2},\ 4i,\ -\sqrt{5}i.$$

9. 说出复数 $-\frac{1}{3}$，0，π 的共轭复数。

10. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) $0i$ 是纯虚数；

(2) 原点是复平面内直角坐标系的实轴与虚轴的公共点；

(3) 实数的共轭复数一定是实数，虚数的共轭复数一定是虚数。

13.3 复数的向量表示

在物理学中，我们经常遇到力、速度、加速度、电场强度

等，这些量，除了要考虑它们的绝对值大小以外，还要考虑它们的方向。我们把这种既有绝对值大小又有方向的量叫做**向量**.向量可以用有向线段来表示，线段的长度就是这个向量的绝对值（叫做这个**向量的模**）.线段的方向（用箭头表示）就是这个向量的方向。模相等且方向相同的向量，不管它们的起点在哪里，都认为是**相等的向量**。在这一规定下，向量可以根据需要进行平移。模为零的向量（它的方向是任意的）叫做**零向量**。规定所有零向量相等。

复数可以用向量来表示。如图13-3，设复平面内的点 Z 表示复数 $z=a+bi$，连结 OZ，如果我们把有向线段 OZ（方向是从点 O 指向点 Z）看成向量，记作 $\overrightarrow{OZ}$，就把复数同向量联系起来了。很明显，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 是由点 Z 唯一确定的；反过来，点 Z 也可由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定。因此，复数集 C 与复平面内所有以原点 O 为起点的向量所成的集合也是一一对应的。为方便起见，我们常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$。此外，我们还规定，相等的向量表示同一个复数。

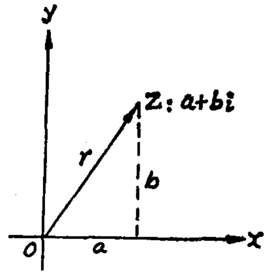


图 13-3

图 13-3 中的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模（即有向线段 OZ 的长度）r 叫做**复数 $Z=a+bi$ 的模**（或**绝对值**），记作$|z|$ 或 $|a+bi|$。如果 $b=0$，那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模就等于$|a|$（即 a 在实数意义上的绝对值）.容易看出，

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

例 1 求复数 $z_1=3+4i$ 及 $z_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\,i$ 的模，并

且比较它们的模的大小.

解: $|z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}.$$

$\because$ $$5 > \frac{3}{2},$$

$\therefore$ $$|z_1| > |z_2|.$$

例 2 设 $z \in C$, 满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形?

(1) $|z| = 4$; (2) $2 < |z| < 4$.

解: (1) 复数 z 的模等于 4, 就是说, 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 (即点 Z 与原点 O 的距离) 等于 4, 所以满足条件 $|z| = 4$ 的点 Z 的集合是以原点 O 为圆心, 以 4 为半径的圆.

(2) 不等式 $2 < |z| < 4$ 可化为不等式组

$$\begin{cases} |z| < 4, \\ |z| > 2. \end{cases}$$

不等式 $|z| < 4$ 的解集是圆 $|z| = 4$ 内部所有的点组成的集合, 不等式 $|z| > 2$ 的解集是圆 $|z| = 2$ 外部所有的点组成的集合, 这两个集合的交集, 就是上述不等式组的解集, 也就是满足条件 $2 < |z| < 4$ 的点 Z 的集合. 容易看出, 所求的集合是以原点 O 为圆心, 以 2 及 4 为半径的圆所夹的圆环, 但不包括圆环的边界(图13-4).

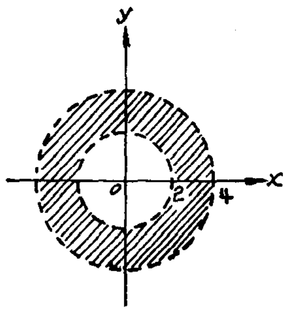


图 13-4

练　习

1. 已知复数 $\sqrt{3}+i$，$-2+4i$，$-2i$，4。

(1) 在复平面内描出表示这些复数的点；

(2) 在复平面内画出表示这些复数的向量；

(3) 求各复数的模。

2. 求证复平面内分别和复数 $z_1=1+2i$，$z_2=\sqrt{2}+\sqrt{3}i$，$z_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，$z_4=-2+i$ 对应的四点 Z_1,Z_2，Z_3,Z_4 共圆。

习　题　一

1. 填空：

(1) 复数集是实数集与虚数集的____；

(2) 实数集与虚数集的交集是____；

(3) 纯虚数集是虚数集的____；

(4) 设复数集 C 为全集，那么实数集 R 的补集是____。

2. $m(m\in R)$取什么值，复数$(m^2-3m-4)+(m^2-5m-6)i$ 是

(1) 实数？　　(2) 纯虚数？　　(3) 零？

3. 求适合下列方程的 x 与 y $(x,\ y\in R)$ 的值：

(1) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(5x+\frac{2}{3}y\right)i=-4+16i$；

(2) $(x+y)-xyi=24i-5$；

(3) $(x^2-y^2)+2xyi=8+6i$；

(4) $2x^2-5x+2+i(y^2+y-2)=0$。

4. 已知复数

$$1,i,\ 6-8i,1+i,\ 2-\sqrt{2}i,\ -4-6i,\ 3\frac{1}{2},-\sqrt{3}i.$$

(1) 在复平面内描出表示这些复数的点；

(2) 求各数的共轭复数，并且描出和这些共轭复数对应的点。

5. 画出表示第 4 题中各复数及其共轭复数的向量，并求每一个复数及其共轭复数的模。

6. 求证对任何 $z\in C$，有 $|z|=|\bar{z}|$。

7. 比较复数 $z_1=-5+12i$，$z_2=-6-6\sqrt{3}i$ 的模的大小。

8. 已知 $|x+yi|=1$，求表示复数 $x+yi$ 的点的轨迹。

9. 设 $z\in C$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $|z|=3$； (2) $|z|>3$；

(3) $|z|<3$； (4) $2\leqslant|z|<5$。

10. 设 $z=a+bi$，满足下列条件的点 Z 的集合是什么图形？

(1) $0<|a|<2$； (2) $a>0$，$b>0$，$a^2+b^2<16$。

二 复数的运算

13.4 复数的加法与减法

复数的加法规定按照以下的法则进行：设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么它们的**和**

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

很明显，两个复数的和仍然是一个复数。

容易验证，复数的加法满足交换律、结合律，即对任何 z_1，z_2，$z_3\in C$，有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

现在我们来看复数加法的几何意义。

从物理学知道，要求出作用于同一点 O、但不在同一直线上的两个力 $\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 的合力，只要用表示 $\vec{F}_1$ 与 $\vec{F}_2$ 的向量为相邻的两边画一个平行四边形，那么，平行四边形中，以力的作用点 O 为起点的那条对角线所表示的向量就是合力 $\vec{F}$（图 13-5(1)）。这个法则通常叫做向量加法的平行四边形法则。

复数用向量来表示，如果与这些复数对应的向量不在同一直线上，那么这些复数的加法就可以按照向量加法的平行四边形法则来进行。下面我们来证明这个事实。

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 分别与复数 $a+bi$ 及 $c+di$ 对应，且 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 不在同一直线上（图 13-5(2)）。以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 及 $\overrightarrow{OZ_2}$ 为两条邻边画平行四边形 OZ_1ZZ_2，画 x 轴的垂线 PZ_1，QZ_2 及 RZ，并且画 $Z_1S\perp RZ$。容易证明

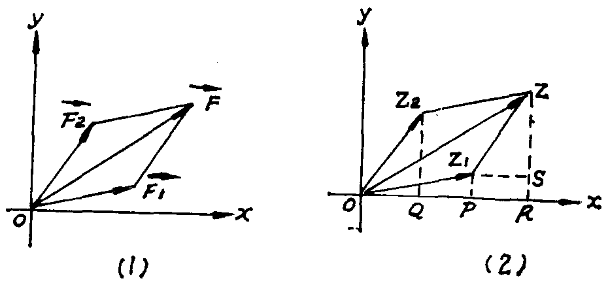


图 13-5

$$\triangle ZZ_1S\cong\triangle Z_2OQ,$$

并且四边形 Z_1PRS 是矩形，因此

$$OR=OP+PR=OP+Z_1S$$
$$=OP+OQ=a+c,$$

$$RZ = RS + SZ = PZ_1 + QZ_2 = b + d.$$

于是，点 Z 的坐标是$(a+c,\ b+d)$，这说明 $\overrightarrow{OZ}$ 就是与复数$(a+c)+(b+d)i$ 对应的向量。

由此可知，求两个复数的和，可以先画出与这两个复数对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，如果 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$不在同一直线上，再以这两个向量为两条邻边画平行四边形，那么与这个平行四边形的对角线 OZ 所表示的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 对应的复数，就是所求两个复数的和。

如果 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 在同一直线上，我们可以画出一个"压扁"了的平行四边形，并据此画出它的对角线来表示 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 的和。

总之，复数的加法可以按照向量的加法法则来进行，这是复数加法的几何意义。

下面再来看复数的减法。

复数的减法规定是加法的逆运算，即把满足

$$(c+di)+(x+yi)=a+bi$$

的复数 $x+yi$，叫做复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的**差**，记作$(a+bi)-(c+di)$。根据复数相等的定义，有

$$c+x=a, \qquad d+y=b,$$

由此

$$x=a-c, \qquad y=b-d,$$

所以

$$x+yi=(a-c)+(b-d)i,$$

即

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

这就是复数的减法法则。由此可见，两个复数的差是一个唯一确定的复数。