



数学信箱

比和比例

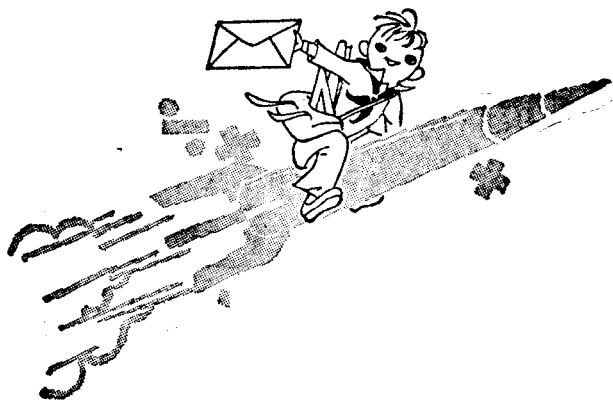
王文林 王明欢

上海教育出版社

数学信箱

比 和 比 例

王文林 王明骥



上海教育出版社

数 学 信 箱

比 和 比 例

王文林 王明驷

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 67,000

1986 年 3 月第 1 版 1986 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—15,800 本

统一书号: 7150·3581 定价: 0.47 元

给 小 读 者

数学是一门严密的科学，每一个计算法则，每一条结论，都是有根有据的，来不得半点虚假。我们学习数学，不能光顾着算，一定要弄懂道理。学习中要多问几个“为什么”，问题不弄清楚，决不罢休。学问学问，就是要一面学一面问，能学能问的人必将有所发现，不断前进。

许多小朋友经常来信，提出各种各样的数学问题，这是十分令人可喜的。我们选取了一部分问题，分门别类，逐一解答，编成了这套《数学信箱》。我们希望，它在加深理解小学数学内容，扩大数学知识和活跃思路等方面，将对你有所帮助。至于教材中已讲得比较清楚的问题，一般就不选进去了。

编这样的读物，我们经验不足，问题一定很多。你有什么意见和建议，欢迎来信，以便不断改进。

目 录

1. 足球比赛中的 3 比 2 与数学中的 3:2, 意义 有什么不同?	1
2. 两个同类量的比表示什么?	4
3. 两个不同类的量也可以比吗?	5
练习一	7
4. 男、女同学各有多少人?	8
5. “比”和“除法”、“分数”是一回事吗?	10
6. 比的前项、后项和比值的关系怎样?	12
7. 比有哪些性质?	14
8. 化简比和求比值有什么区别?	17
练习二	20
9. 绘图时怎样选用适当的比例尺?	21
10. 什么是可比数? 什么是不可比数?	24
11. 直角三角形的三条边, 可以组成几个比?	27
12. 什么叫反比?	30
练习三	33
13. 什么叫连比?	34
14. 平均分配和按比例分配有什么关系?	37

15. 怎样把线段按比例分配?	40
-----------------------	----

练习四	44
-----------	----

16. 比例和比有哪些联系和区别?	45
-------------------------	----

17. 在比例中, 内项乘积与外项乘积为什么相等?	47
---------------------------------	----

18. 成比例的四个数最多能写成几个比例式?	50
------------------------------	----

练习五	53
-----------	----

19. 怎样的长方形对折、对折、……后只是大小不同 而形状不变?	55
---	----

20. 什么叫黄金分割?	58
--------------------	----

21. 从比例 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 可以推出哪些定理?	62
---	----

22. 圆面积与圆的半径成正比例吗?	68
--------------------------	----

23. 长方体的体积一定时, 底面积与高成反比例吗?	72
----------------------------------	----

练习六	75
-----------	----

24. 在正、反比例中怎样找“一定”的量?	77
-----------------------------	----

25. 怎样运用正、反比例解应用题?	81
--------------------------	----

26. 路程一定, 速度的比与时间的比关系怎样?	84
--------------------------------	----

27. 怎样测量旗杆的高度?	89
----------------------	----

练习七	92
-----------	----

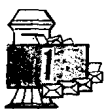
28. 怎样用图表示正、反比例?	94
------------------------	----

29. 如果 y 与 x 这两个量成正比例, 那么 y 与 $\frac{1}{x}$ 成什么比例?	97
---	----

30. 自行车为什么能行驶得飞快?	102
-------------------------	-----

31. 两站相距多少公里?	104
---------------------	-----

32. 什么是复比例问题?	108
33. 什锦糖是怎样配制的?	111
练习八	113
综合练习	116
练习答案	118



足球比赛中的 3 比 2 与数学中的 3:2, 意义有什么不同?

我们在足球比赛中经常能看到 3 比 2 这样的比分。这个 3 比 2 与数学中的 3:2 的含义有什么不同呢?

在我们的日常生活中,经常要比较两件或几件事物在质量上或数量上的差别。例如,我们常说,与旧中国相比较,新中国在各方面都起了翻天覆地的变化(这个变化既包含着质的变化,也包含着数量上的变化)。

在数学中,我们也常常要进行比较,但它只是反映两件或几件事物在数量上的差别。

在数学里,考察两件事物在数量上的差别有两种方法:

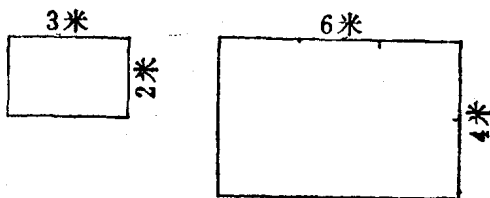
一是用减法。就是说一事物比另一事物多(或少)多少。

足球赛中的 3 比 2,是指一个球队进了 3 个球,得 3 分,另一个球队进了 2 个球,得 2 分,两队相差 1 个球或相差 1 分($3-2=1$)。一胜一负,十分清楚。

另一是用除法。就是说一事物是另一事物的

几倍(或几分之几)。

例如,一个长方形长3米,宽2米,问长是宽的几倍,或宽是长的几分之几。我们由 $3 \div 2 = 1.5$,可以知道长是宽的1.5倍;或由 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$,可以知道宽是长的三分之二。这时,我们也可以说长与宽的“比”是3比2,记作3:2;或者说宽与长的“比”是2比3,记作2:3。



又如,一个长方形长6米,宽4米。我们可以把长平均分成3份,宽分成与长每份相等的2份。这时,长与宽的“比”同样是3:2,宽与长的比是2:3。

由3:2(或2:3),我们就可以清楚地知道这个长方形的长与宽的数量之间的关系了。数学里所说的两个数的“比”,指的就是两数相除的情况。就是说,“两个数相除又叫做两个数的比”。

在比式

3:2

中,“:”叫做比号,比号前面的那个数叫做比的前项,比

号后面的那个数叫做比的后项。比的前项除以后项所得的商,叫做比值。即

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & : & 2 & = & 1.5. \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{前} & & \text{后} & & \text{比} \\ \text{项} & \text{号} & \text{项} & & \text{值} \end{array}$$

对两个事物在数量上进行比较,有时用减法比较方便,例如,比较两个小朋友的身长、体重或年龄等等。有时用“比”更能说明问题,例如,五十年代世界上诞生了第一架电子计算机,它的重量约 30 吨,即 30000 千克左右;而目前与它功能差不多的电子计算机,重量只有 0.5 千克左右。怎样比较它们的重量呢?如果用减法算,它们相差 $30000 - 0.5 = 29999.5$ 千克。看了这个数很难使人有一个清晰的印象。况且约重 30 吨本身是一个近似数,误差几千克是完全可能的,就算它误差 1 千克吧,就比 0.5 千克要大。因此所求的差 29999.5 千克是说明不了什么问题的。

如果改用“比”的方法,因为 $30000 : 0.5 = 60000$,即第一架电子计算机的重量约是目前相同功能计算机重量的六万倍,或者说现在的仅是过去的六万分之一。一重一轻,相差多么悬殊!这样对当前科学技术的飞速进步就深深地印入了人们的脑海中了!



两个同类量的比表示什么？

在生产和生活中，会遇到各种各样的量，如长度、重量、面积、体积、速度、时间等等。如果有两个量都是表示长度，或都是表示时间等等，那么这两个量就是同类的，我们叫它们是同类量。如果一个量表示长度，另一个量表示时间，那么它们就是不同类的量。

两个同类量之间相比的情况是很多的：

例如，汽车行驶速度与人行步行速度之比是 $8:1$ ，就是说，在汽车行驶 8 公里的时间里，人只能步行 1 公里。这也就是说，汽车速度是人行步行速度的 8 倍。

又如，某种农药稀释的水剂是 $1:200$ ，就是说，这个水剂是按 1 千克农药加 200 千克水稀释而成的。这也就是说，农药的重量是水的重量的二百分之一。

再如，一张地图上的比例尺是 $1:1500000$ ，就是说，在这张地图上距离 1 厘米相当于实际距离 15 公里。这也就是说，图上距离是实际距离的一百五十万分之一。

这些例子都告诉我们，如果有甲、乙两个同类量，那么由比的意义可以知道，甲量与乙量的比表示的是

“甲量是乙量的几倍或几分之几”。因此，两个同类量的比，实质上是描述这两个量之间的倍数关系。

应该注意的是，在求两个同类量的比时，表示这两个量的数，应该具有同样的计量单位。例如两个长度的比，或者都用米，或者都用分米，不允许一个用米而另一个用分米。如20分米与5米的比不是 $20:5$ ，而应该是 $2:5$ ，或 $20:50$ 。即或者统一为米，把20分米化为2米；或者统一为分米，把5米化成50分米。



两个不同类的量也可以比吗？

两个同类量相比，它表示的是这两个量之间的倍数关系。那么，两个不同类的量也可以比吗？譬如说，“4支枪与2个人”能不能比？“20厘米与5秒钟”能不能比？如果能比，它们的比的实际意义又是什么呢？

我们知道，“两个数相除又叫做两个数的比”。这样，对于“4支枪与2个人”，就可以把枪的支数4与人的个数2相比， $4:2$ 就表示“枪数是人数的几倍”。而“20厘米与5秒钟”这样两个不同类的量能不能比呢？这就要看我们的问题是怎样提的。如果说一个物体在5秒钟内移动了20厘米的路程，要求物体的移动速

度，那么我们就说 20 厘米与 5 秒钟是可以比的，根据比的意义可以知道，它们比的结果就是这个物体的移动速度。 $20:5=4$ ，即这个物体的移动速度为每秒 4 厘米。在这个问题中，20 厘米表示物体移动的“路程”，5 秒钟表示物体移动的“时间”，它们的比就是这个物体的移动“速度”。这也就是说，这两个不同类量（路程与时间）的比产生了一个新的量（速度）。

至于上面所说的“4 支枪与 2 个人”，作为不同类量的比，也可以认为是产生了一个新的量：“每人几支枪”。又如 10 本书与 5 个人的比，作为不同类量的比 $10:5$ ，可以产生一个新的量：每人几本书。因此，它们的比也是有意义的。但并不是任意的两个不同类的量相比都能产生一个新的量的。例如，5 支枪与 2 条鱼，作为不同类量的比就没有什么意义了。

这些例子告诉我们，在实际应用中，我们是在要引入新的量的情况下才用到两个不同类量的比。这时，所求的比值是一个名数，而它的计量单位是按照所引入的新的量的实际意义来确定的。

由此可见，根据实际的需要，两个不同类的量也可以相比，但这要服从于“引入一个新的量”的需要。这个引入的“新的量”就体现了相比的两个不同类量之间的数量关系和相互联系。

练习一

1. 填充:

(1) 甲数是乙数的 2 倍, 甲数与乙数的比是_____; 乙数与甲数的比是_____。

(2) 5 亩地产小麦 3000 斤, 总产量与亩数的比是_____。

2. 甲、乙两数的比是 7:13:

(1) 分别写出甲、乙两数与它们和的比;

(2) 分别写出甲、乙两数与它们差的比。

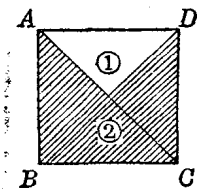
3. 从甲地到乙地, 慢车要 5 小时, 快车要 4 小时, 写出:

(1) 慢车与快车行车时间的比;

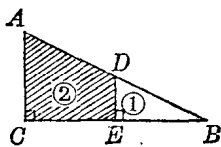
(2) 慢车与快车行车速度的比。

4. 有两个正方体, 它们棱长的比是 1:2, 求它们的表面积的比以及体积的比。

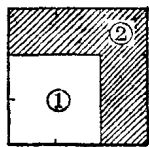
5. 指出下列图形中①、②两部分面积的比:



$ABCD$ 是正方形



$AD = DB, CE = EB$





男、女同学各有多少人？

曾经有一位小朋友根据一道题中的关系语：“一个班上男同学与女同学人数的比是 5:3”，就认定这个班上的男同学有 5 人，女同学有 3 人。你认为他想得对吗？

当你看了前面三题，真正理解了比的意义之后，就会知道，这样的理解是不正确的。关于这一点，我们从比的一条基本性质中也可以得到说明。

比有一条重要的性质：

比的前项和后项都乘以或者都除以一个相同的数（零除外），比值不变。即

如果 $a:b=c$ ，那么

$$am:bm=c(m\neq 0);$$

$$\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=c(n\neq 0)。$$

这个性质告诉我们，把比的前项与后项同乘以一个不等于零的数，所得的比与原来的比相等。如果比的前项与后项有公约数，那么可以用公约数分别去除前项与后项，所得的比与原来的比也相等。例如 30:

18, 可将前项与后项分别除以它们的公约数 6,

$$30:18=(30\div 6):(18\div 6)=5:3。$$

如果比的前项与后项是分数(或小数), 可以根据这个性质, 用它们的最小公分母去乘各项, 化成整数比, 然后用它们的最大公约数去除前项与后项, 化成最简的整数比。例如,

$$\begin{aligned}\frac{5}{8}:\frac{5}{6}&=\left(\frac{5}{8}\times 24\right):\left(\frac{5}{6}\times 24\right)=15:20 \\&=(15\div 5):(20\div 5)=3:4。 \end{aligned}$$

所以, 这个性质在化简比的时候有很重要的作用。

说到这里也许你已经明白, 如果一个班上男、女同学的人数之比是 5:3, 并不能就说这个班上的男同学只有 5 人, 女同学只有 3 人。也可能男同学是 $5\times 6=30$ (人), 女同学是 $3\times 6=18$ (人); 或者男同学是 $5\times 7=35$ (人), 女同学是 $3\times 7=21$ (人);……。因为 30:18, 35:21, ……化简后也是 5:3。因此, 这个 5:3 仅仅说明了这个班上的男同学人数是女同学人数的 $\frac{5}{3}$ 倍; 或者说, 这个班男同学人数占全班人数的 $\frac{5}{8}$, 女同学人数占全班人数的 $\frac{3}{8}$ 。单凭 5:3 是不能确定男同学和女同学的人数的。

请你想想, 如果知道全班人数是 48 人, 那么根据

男、女同学的人数之比是5:3,你能知道男、女同学各有多少人吗?



“比”和“除法”、“分数”是一回事吗?

有的小朋友说,因为两个数相除又叫做两个数的比,那么 $5 \div 2$ 就是5:2,所以除法就是比,比也就是除法,“除法”和“比”是一回事。“比”和“除法”究竟是不是一回事呢?

根据比的意义,比和除法、分数的确有着密切的联系。它们的联系可以简单归纳成下表:

比	前 项	比 号(:)	后 项	比 值
除 法	被 除 数	除号($\div$)	除 数	商
分 数	分 子	分数线($-$)	分 母	分 数 值

从上表可以看出, $a:b$ 的比值与 $a \div b$ 、 $\frac{a}{b}$ 的结果是相等的(指数值)。为了方便,我们也常常把 $a:b$ 写作 $\frac{a}{b}$ (当然也还是读成 a 比 b)。

此外,比、除法、分数的密切联系从它们所用的符号上也可以看出来。比号“:”与分数线“—”并起来