

惯性仪表原理

冯振声 王妍 编著

兵器工业出版社



惯性仪表原理

冯振声 王 妍 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书采用力学和自动控制工程相结合的观点和方法,比较系统和完整地阐述了惯性仪表的基本理论及其应用。全书共七章。第一章介绍力学基础知识;第二章阐述陀螺仪的基本理论;第三章至第五章研究二自由度姿态陀螺仪表,单自由度陀螺仪表及陀螺平台系统的工作原理、职能要求、数学模型、传递函数及性能分析等基本内容;第六章介绍惯导系统的基本知识,研究几种典型加速度表,并介绍几种新型陀螺仪;第七章阐述惯性仪表的测试。

本书主要作为飞行器控制、制导和测试等专业的研究生和高年级学生的教材,也可供院校、研究所和部队从事飞行器工程的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

惯性仪表原理/冯振声,王妍编著. —北京:兵器工业出版社,1997.4
ISBN 7-80132-185-5

I. 惯… II. ①冯…②王… III. 陀螺仪-理论 IV. TN965

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 05544 号

兵器工业出版社 出版发行

(北京市海淀区车道沟10号)

各地新华书店经销

中国人民解放军军械工程学院印刷厂印装

开本: 787×1092 1/16 印张: 17.5 字数: 430 千字

1997年4月第1版 1997年4月第1次印刷

印数: 1~800 定价: 25.00 元

前 言

惯性仪表，其广义指的是作用原理建立在适用于惯性空间的牛顿定律基础之上的所有仪表。我们这里所说的惯性仪表，是专指用于飞行器惯性制导系统及姿态控制系统中的惯性仪表：陀螺仪表、陀螺平台及加速度表。

飞行器相对于某一参考系作一般运动时具有六个运动自由度，包括飞行器质心平移运动的三个线自由度及飞行器绕其质心转动运动的三个角自由度。当参考系为直角坐标系 $OXYZ$ 时，通常用飞行器质心相对参考系的三个坐标值 X 、 Y 及 Z 来表征其三个线自由度参数；用飞行器绕其质心相对参考系的三个姿态角 θ （俯仰角）、 ϕ （偏航角）及 γ （滚动角）来表征其三个角自由度参数。显然，我们可以用上述六个参数来描述飞行器相对于参考系的运动，即用三个线自由度参数 X 、 Y 及 Z 来描述飞行器相对参考系的飞行轨迹，用三个角自由度参数 θ 、 ϕ 及 γ 来描述飞行器相对参考系的飞行姿态。

对飞行器的运动分析表明，研究飞行器运动的核心问题基于下述两个条件：

1. 在飞行器上实现一个参考系作为方位基准。根据飞行器的不同飞行任务，这个参考系在各种可能干扰作用下必须保持方位基准不变，或者应当能够按照控制指令信号的要求改变方位基准。

2. 测量和控制飞行器相对于参考系的飞行轨迹及飞行姿态，即测量和控制飞行器相对于参考系的三个线自由度参数及三个角自由度参数。在飞行器的控制系统中，把测量和控制飞行器相对于参考系的飞行轨迹（或质心线坐标）的系统，称之为制导系统；把测量和控制飞行器相对于参考系的飞行姿态（或姿态角）的系统，称之为姿态控制系统。因此，第二个条件可以概述为飞行器必需具有制导系统及姿态控制系统。

业已证明，在飞行器上实现参考系作为方位基准的最适合的装置是陀螺仪表及陀螺平台；同时，陀螺仪表（或陀螺平台）和加速度表还将完成测量飞行器相对参考系的飞行轨迹及飞行姿态的功能。因此，无论在导弹的惯性制导系统及姿态控制系统，还是在卫星、宇宙飞船以及它们的运载工具的惯性制导系统及姿态控制系统中，惯性仪表都是必不可缺的关键性测量元件。

就目前惯性仪表在飞行器惯性制导系统及姿态控制系统中的应用而言，陀螺仪表及陀螺平台仍然是以经典的高速旋转刚体力学为基础的固体转子陀螺仪；而加速度表则是振动质量式、力平衡式及陀螺摆式以及它们的演变形式的固体质量加速度表。尽管这些惯性仪表已广泛应用于飞行器的惯性制导系统及姿态控制系统中，但由于它们的结构形式及工艺原因，很难达到理想的惯性级的精度要求。

在某种程度上可以说惯性仪表技术正处于根本变革的边缘。近代物理学的进展，尤其是在固体物理方面，正在连续不断地被用到惯性仪表技术中去。例如，利用原子核完全的惯性性质而做成的粒子陀螺仪；利用接近热力学温度零度时的电阻本性而做成的低温超导体陀螺仪；利用象光速那样的某些绝对常数而做成的激光陀螺仪等。尽管这些仪表至今还不能和以

经典力学原理为基础的惯性仪表进行有利的竞争，但在不久的将来，它们将达到理想的惯性级的精度，并具有付诸实现的极大潜在可能性。

本书主要作为飞行器控制、制导和测试等专业的研究生和高年级学生的教材，也可供院校、研究所和部队从事飞行器工程的科技人员参考。考虑到他们的基础知识和专业要求，书中力图采用力学和自动控制工程相结合的观点及方法，来分析研究飞行器惯性制导系统及姿态控制系统中所应用的以经典力学为基础的惯性仪表，即陀螺仪、陀螺平台及加速度表的工作原理，系统对它们的职能要求以及对它们的性能进行分析。

经典力学，尤其是刚体定点转动动力学，是惯性仪表理论的基础。数学和反馈控制理论是研究惯性仪表理论不可缺少的工具，我们可视它们为一种定量的语言，用以描述惯性仪表工作过程中诸物理量之间的关系，而且提供一种研究、表达惯性仪表性能的方法。

全书共分七章。第一章是从惯性仪表理论的应用实际出发，编写了力学基础知识的内容，供读者在学习惯性仪表理论之前阅读，以期有所受益，而不是为了专门的力学训练而作详尽的严格叙述。第二章中，从工程应用角度，阐述了二自由度陀螺仪的基本理论，将为以后各章分析研究各种类型的惯性仪表打下必要的理论基础。第三章至第五章，研究了二自由度姿态陀螺仪表、单自由度陀螺仪表及陀螺平台系统的工作原理、职能要求、数学模型、传递函数及性能分析等基本内容。第六章中，简要介绍了惯性导航的基本知识，研究了几种典型加速度表，并对陀螺仪的发展及几种新型陀螺仪做了一般性的介绍。最后一章，介绍了陀螺仪测试的基本知识。全书篇幅较大，涉及惯性仪表的内容较广，这将有利于对教学内容的选取，亦便于学者自学之用。

本书承南京航空航天大学郭秀中教授审阅，提出许多宝贵意见，在此谨致谢意。同时向为本书出版付出辛勤劳动的其他同志表示谢意。本书第一章部分内容由王妍执笔，其余内容由冯振声执笔，全书最后由冯振声定稿。

限于作者的水平，书中存在的不妥之处，诚挚地期望读者批评指正。

作者

1996年8月

目 录

第一章 力学基础知识	(1)
第一节 质点的运动	(1)
一、参考系及坐标系	(1)
二、自由度及广义坐标	(1)
三、相对运动、牵连运动及绝对运动	(2)
四、质点的运动	(2)
第二节 质点运动微分方程式	(6)
一、在惯性坐标系中质点运动微分方程式	(6)
二、在非惯性坐标系中质点运动微分方程式	(6)
第三节 刚体的运动	(7)
一、作一般运动时, 刚体内的速度及加速度	(7)
二、作复合运动时, 刚体内的速度及加速度	(8)
三、作一般运动时, 刚体在空间位置的确定	(11)
第四节 刚体质心平移运动方程式	(17)
第五节 刚体定点转动运动方程式	(18)
一、转动惯量	(18)
二、刚体的动量矩	(20)
三、动量矩定理	(21)
四、欧拉动力学方程式	(22)
第六节 刚体无外力矩作用时的运动	(23)
一、刚体无外力矩作用时运动的稳定性	(23)
二、潘索图形	(24)
第七节 常用坐标系的选择及其互相间的关系	(27)
一、常用坐标系的选择	(27)
二、各坐标系之间的关系	(29)
第二章 二自由度陀螺仪的基本理论	(35)
第一节 陀螺仪的基本知识	(35)
一、基本陀螺仪	(35)
二、基本陀螺仪的特点	(38)

三、陀螺仪表的分类	(39)
第二节 陀螺仪的基本特性	(40)
一、陀螺仪的进动性	(40)
二、陀螺仪的稳定性	(47)
三、陀螺仪的反作用特性	(50)
第三节 二自由度陀螺仪的运动方程式	(51)
一、不考虑内、外环质量时二自由度陀螺仪的运动方程式	(51)
二、考虑内、外环质量时二自由度陀螺仪的运动方程式	(54)
三、二自由度陀螺仪的技术方程式	(57)
四、二自由度陀螺仪的进动方程式	(60)
第四节 二自由度基本陀螺仪的传递函数及方块图	(60)
一、传递函数	(60)
二、方块图	(62)
第五节 在几种典型输入作用下二自由度基本陀螺仪的动态响应	(63)
一、典型输入及陀尖轨迹	(63)
二、在脉冲函数外力矩作用下陀螺仪的响应——章动运动	(64)
三、在阶跃函数外力矩作用下陀螺仪的响应——正规进动及假正规进动	(67)
四、在正弦函数外力矩作用下陀螺仪的响应——强迫振荡运动	(69)
五、在方波函数外力矩作用下陀螺仪的响应	(71)
第六节 二自由度陀螺仪的漂移误差	(73)
一、由于摩擦力矩而引起陀螺仪的漂移误差	(73)
二、由于不平衡力矩而引起陀螺仪的漂移误差	(77)
三、由于非等弹性变形而引起陀螺仪的漂移误差	(79)
四、由于弹性力矩而引起陀螺仪的漂移误差	(81)
第七节 由于运动方程式中非线性项目的整流作用而引起陀螺仪的漂移误差	(82)
一、由于陀螺仪周期性振荡运动而引起陀螺仪的漂移误差	(83)
二、由于飞行器角振动运动而引起陀螺仪的漂移误差	(85)
第三章 二自由度陀螺仪的应用	(88)
第一节 概述	(88)
一、二自由度陀螺仪特性的应用	(88)
二、二自由度姿态陀螺仪表的主要类型	(90)
第二节 自由陀螺仪	(91)
一、自由陀螺仪的特点及应用	(91)
二、对自由陀螺仪的职能要求	(92)
三、自由陀螺仪的工作原理	(94)
四、自由陀螺仪的误差分析	(101)
第三节 垂直陀螺仪	(106)

一、垂直陀螺仪的特点及应用	(106)
二、垂直陀螺仪的性能分析	(108)
第四节 陀螺方向仪	(122)
一、陀螺方向仪的特点及应用	(122)
二、陀螺罗盘的工作原理	(123)
三、具有阻尼的陀螺罗盘的性能分析	(125)
四、陀螺罗盘的万向环架误差	(127)
第五节 二自由度速率陀螺仪	(129)
一、二自由度速率陀螺仪的特点及应用	(129)
二、二自由度速率陀螺仪的性能分析	(131)
第四章 单自由度陀螺仪及其应用	(134)
第一节 单自由度基本陀螺仪的特性及其应用	(134)
一、单自由度基本陀螺仪的特性	(134)
二、单自由度陀螺仪在飞行器上的应用	(136)
第二节 单自由度陀螺仪的运动方程式及主要类型	(137)
一、单自由度陀螺仪的运动方程式及传递函数	(137)
二、单自由度陀螺仪的主要类型	(141)
第三节 速率陀螺仪	(144)
一、弹簧式速率陀螺仪	(145)
二、电弹簧式速率陀螺仪	(151)
三、弹簧式与电弹簧式速率陀螺仪性能的比较	(153)
第四节 浮子式积分陀螺仪	(154)
一、浮子式积分陀螺仪的工作原理	(154)
二、浮子式积分陀螺仪的运动方程式、传递函数及方块图	(156)
三、浮子式积分陀螺仪的性能分析	(157)
四、浮子式积分陀螺仪的应用	(159)
第五章 陀螺平台系统	(169)
第一节 概述	(169)
一、陀螺平台系统的特点及其应用	(169)
二、陀螺平台的分类	(170)
第二节 单轴陀螺稳定平台	(171)
一、单轴陀螺稳定平台的稳定系统	(171)
二、单轴陀螺稳定平台的初始对准修正系统	(176)
三、单轴陀螺稳定平台系统的性能	(182)
第三节 单轴陀螺惯性平台	(183)
一、单轴陀螺惯性平台系统的方块图及传递函数	(183)

二、单轴陀螺惯性平台系统的性能分析·····	(186)
第四节 三轴陀螺稳定平台·····	(189)
一、概述·····	(189)
二、三轴陀螺稳定平台的工作原理·····	(190)
三、三轴陀螺稳定平台系统方块图·····	(196)
四、三轴陀螺稳定平台系统的运动方程式·····	(196)
第五节 三轴陀螺平台罗盘·····	(201)
一、三轴陀螺平台罗盘的自对准原理·····	(201)
二、三轴陀螺平台罗盘初始对准系统的运动方程式及系统方块图·····	(205)
三、三轴陀螺平台罗盘初始对准系统的性能分析·····	(207)
第六章 惯性导航系统·····	(210)
第一节 惯性导航系统的基本知识·····	(210)
一、惯性导航系统的基本作用原理·····	(210)
二、惯性导航系统的分类·····	(211)
第二节 加速度表·····	(212)
一、概述·····	(212)
二、振动质量式加速度表·····	(213)
三、力(力矩)平衡式加速度表·····	(215)
四、挠性加速度表·····	(220)
五、摆式积分陀螺加速度表·····	(223)
第三节 惯性导航系统中的陀螺仪·····	(228)
一、单自由度液浮陀螺仪·····	(229)
二、单自由度气浮陀螺仪·····	(232)
三、动压气浮自由转子陀螺仪·····	(233)
四、静电自由转子陀螺仪·····	(235)
五、挠性陀螺仪·····	(236)
六、激光陀螺仪·····	(238)
第七章 惯性仪表的测试·····	(241)
第一节 陀螺仪测试的基本知识·····	(241)
一、陀螺仪测试的目的·····	(241)
二、陀螺仪的漂移误差及其数学模型·····	(243)
第二节 陀螺仪的测试方法·····	(245)
一、开路测试法·····	(245)
二、伺服转台测试法·····	(246)
三、力矩反馈测试法·····	(248)
四、闭路测试法中的两种基本类型·····	(249)

五、陀螺仪随机漂移的测试.....	(260)
六、动态环境测试法.....	(265)
参考文献.....	(267)

第一章 力学基础知识

我们是从惯性仪表在飞行器上的应用角度来研究惯性仪表的,因此,作为惯性仪表理论及飞行器运动基础的经典力学,尤其是刚体定点转动动力学,就显得十分重要。本章将对理论力学中与惯性仪表理论及飞行器运动有密切关系的部分,作概括地讨论,以供阅读其他章节参考之用。

第一节 质点的运动

一、参考系及坐标系

运动的相对性表明,一个物体在空间的位置只能相对于另一个物体而确定,这样,后一个物体就构成了描述前一个物体运动时的参考系。因此,在描述物体运动时,必须说明所采用的参考系,这样才能使所描述的运动具有正确的意义。

要精确地表明一个物体在空间的位置时,必须引入两套坐标系分别固定在运动物体上和参考系上,用以代替运动物体及参考系。因此,研究一个物体相对于参考系的运动,就转化成研究物体坐标系相对于参考坐标系的运动了。在实际问题中,物体运动有较为复杂的情形,一个物体相对于某一参考系有相对运动,而这个参考系本身相对于另一参考系亦有运动,甚至后面这个参考系本身仍然可以有运动。这时,我们必须选择几套坐标系,分别固定在运动物体和各参考系上。通常,我们把相对惯性空间静止的参考坐标系称为惯性坐标系或固定坐标系;把相对惯性坐标系有运动的中间参考坐标系称为动坐标系。因此,在研究物体相对惯性坐标系的运动时,就必须考虑如何把物体坐标系相对动坐标系的运动转变成相对于惯性坐标系的运动。

二、自由度及广义坐标

在任意坐标系中,要确定一个物体的位置所需要独立坐标的数目,称为这个物体的运动自由度。例如,支承在内、外环架结构中的陀螺仪转子,它在空间的位置可用三个欧拉角来确定,这三个欧拉角坐标是完全独立的,因此,我们说陀螺仪转子具有三个运动自由度。飞行器作一般运动时,在空间的位置需要六个独立坐标来确定,比如可以用三个直角坐标值和三个欧拉角来确定,故飞行器作一般运动时具有六个运动自由度。

为了完全确定物体的位置而选定的任一组彼此独立的坐标参数,称为这个物体的广义坐标。在具体问题中,广义坐标的选取要看问题的性质和方便,即使同一物体,广义坐标的选取也不是唯一的。例如:为了确定物体上某点 P 的位置,可以选取直角坐标参数 (x, y, z) 作为广义坐标,也可以选取柱面坐标参数 (ρ, θ, Z) 作为广义坐标,还可以选取球面坐标参数 (R, θ, φ) 作为广义坐标。这些广义坐标的含义示于图 1-1。总之,广义坐标是独立变化

的，而且一经确定，物体在空间的位置也就相应地完全被确定了。

在物体只有几何约束的条件下，物体的自由度与广义坐标的数目相等。可见，支承在内、外环架结构中的陀螺仪转子在只有几何约束时，需要三个广义坐标才能完全确定它在空间的位置。当飞行器只有几何约束作一般运动时，则需要六个广义坐标才能完全确定它在空间的位置。

三、相对运动、牵连运动及绝对运动

在研究物体的运动时，经常存在几个参考系，通常总是可以通过物体相对动坐标系的相对运动及动坐标系相对惯性坐标系的运动，来间接地求得物体相对惯性坐标系的运动。由于运动的相互关系，我们必须引入一些专用术语，才能更清楚地描述物体的运动。

相对运动：物体相对动坐标系的运动称为物体的相对运动。其运动位移、速度及加速度等分别称为该物体的相对位移、相对速度及相对加速度，通常加注脚 r 标明。

牵连运动：由于动坐标系相对惯性坐标系运动而引起物体相对惯性坐标系的运动，称为牵连运动。在研究的瞬时与物体相重合而在动坐标系上的一点，其相对惯性坐标系的位移、速度及加速度等分别称为该物体的牵连位移、牵连速度及牵连加速度，通常加注脚 e 标明。

绝对运动：由物体的相对运动及牵连运动组合而成的物体相对惯性坐标系的运动，称为物体的绝对运动。其运动位移、速度及加速度等称为物体的绝对位移、绝对速度及绝对加速度，通常加注脚 a 标明。

四、质点的运动

我们研究质点的一般运动：质点相对某一个刚体运动，而这个刚体又相对惯性坐标系作一般运动。

在图 1-2 中， $IXYZ$ 是惯性坐标系， $Oxyz$ 是和刚体固连的动坐标系。由于刚体在空间作一般运动时是由刚体的质心 O 点作平移运动及刚体绕 O 点的转动运动组合而成，所以动坐标系 $Oxyz$ 相对惯性坐标系 $IXYZ$ 即有平移运动，又有转动运动。刚体绕通过 O 点的任意轴线的转动角用 ω 表示，而 O 点在惯性坐标系 $IXYZ$ 中的位置用 R_0 表示。 P 点相对刚体沿曲线 S 运动，它在动坐标系 $Oxyz$ 及惯性坐标系 $IXYZ$ 中的位置，分别用 R_r 及 R_a 表示。

我们研究 P 点对于惯性坐标系 $IXYZ$ 的绝对运动，可以考虑是由 P 点相对动坐标系 $Oxyz$ 的相对运动，以及动坐标系 $Oxyz$ 对于惯性坐标系 $IXYZ$ 的平移运动及转动运动而引起 P 点的牵连运动组合而成。

(一) 速度合成定理

根据图 1-2 中矢量三角形 IOP ，可以求得 P 点矢径关系式为

$$R_a = R_0 + R_r \quad (1-1)$$

取式 (1-1) 对时间的微分，则得

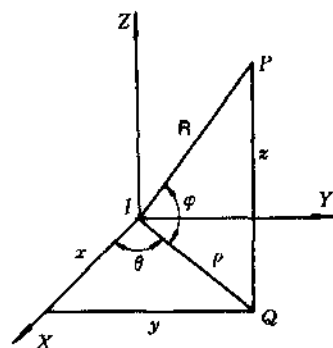


图 1-1 描述质点在空间位置的坐标系

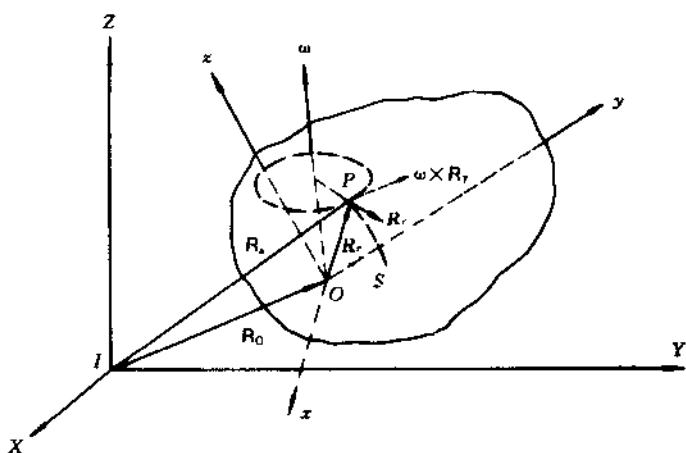


图 1-2 质点的一般运动

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{R}_r}{dt} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 中, 矢径 $\mathbf{R}$ 可以用 P 点在动坐标系 $Oxyz$ 中的直角坐标参数 (x, y, z) 表示, 此时有

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1-3)$$

式 (1-3) 中: $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 是分别沿着 x 、 y 及 z 轴的单位矢量。把式 (1-3) 代入式 (1-2) 的 $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ 中, 则得

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) + \left(x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \right) \quad (1-4)$$

在式 (1-4) 中应用布桑公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

则得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1-7)$$

是质点相对动坐标 $Oxyz$ 的相对速度。

将式 (1-6) 代入式 (1-2), 得

$$\frac{d\mathbf{R}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r \quad (1-8)$$

即

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t \quad (1-9)$$

上两式中 $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ —— 质点 P 的相对速度;

$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt}$ —— 由于动坐标系平移运动引起 P 点的牵连速度;

$\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r$ —— 由于动坐标系转动运动引起 P 点的牵连速度;

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}_r}{dt}$ —— 质点 P 的绝对速度。

式 (1-8) 及 (1-9) 就是质点作一般运动时的速度合成定理, 它表明: 质点的绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和, 而牵连速度包括由动坐标系平移运动而产生的牵连平移速度 $\mathbf{v}_0$ 以及由于转动运动而产生的牵连切线速度 $\mathbf{v}_t$ 。

(二) 哥氏转动坐标定理

我们用任一矢量 $\mathbf{B}$ 来表示运动参数随时间的变化, 它可以是速度、加速度、角速度、动量矩或者其他运动参数, 当动坐标系只有转动而不存在平移运动时, 应用上面同样的研究方法, 也可以获得与式 (1-6) 相同的公式。我们把式 (1-6) 中矢径 $\mathbf{R}_r$ 换成矢量 $\mathbf{B}$, 就得到描述相对运动、牵连运动与绝对运动之间关系的哥氏转动坐标定理

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \quad (1-10)$$

上式表明: 采用动坐标系研究物体相对惯性坐标系运动时, 在惯性坐标系中的某一矢量对时间的矢量微分等于同一矢量在动坐标系中的矢量微分以及动坐标系对惯性坐标系的旋转角速度与该矢量的矢量积之和。

在采用动坐标系来研究物体相对于惯性坐标系运动时, 式 (1-10) 是一个极为重要的公式。例如, 在物体做复合运动, 研究其质点相对某一惯性坐标系的加速度时, 在式 (1-10) 中, 用质点相对惯性坐标系的速度 $\mathbf{v}$ 代替矢量 $\mathbf{B}$, 则可求得质心相对惯性坐标系的加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (1-11)$$

又如, 在研究陀螺仪运动时, 在式 (1-10) 中, 用陀螺仪相对惯性坐标系的动量矩 $\mathbf{H}$ 代替矢量 $\mathbf{B}$, 则求得

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \quad (1-12)$$

(三) 哥氏定理

为了求得 P 点相对惯性坐标系 $IXYZ$ 的绝对加速度, 我们取式 (1-8) 对时间进行微分, 则得

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_r}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{R}_0}{dt^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t} \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R}_r + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}_r}{dt} \quad (1-13)$$

考虑式 (1-5) 至 (1-7), 式 (1-13) 中的

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) \\
&= \left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}\right) \\
&\quad + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r\right) = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r) \tag{1-15}$$

式 (1-14) 中

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \tag{1-16}$$

是质点相对动坐标系 $Oxyz$ 的相对加速度。

将式 (1-14) 及 (1-15) 代入式 (1-13) 中, 则得

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_a}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{R}_o}{dt^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t} \tag{1-17}$$

即

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c \tag{1-18}$$

式中 $\mathbf{a}_a = \frac{d^2 \mathbf{R}_a}{dt^2}$ —— 质点的绝对加速度;

$\mathbf{a}_o = \frac{d^2 \mathbf{R}_o}{dt^2}$ —— 质点的牵连平移加速度;

$\mathbf{a}_r = \frac{\partial^2 \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}^2}$ —— 质点的相对加速度;

$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_m$ —— 质点的牵连转动加速度;

$\mathbf{a}_n = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R}_r$ —— 质点的牵连切向加速度;

$\mathbf{a}_m = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r)$ —— 质点的牵连向心加速度;

$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ —— 质点的哥氏加速度。

式 (1-18) 就是著名的哥氏定理。它可以叙述如下: 质点的绝对加速度等于该点的相对加速度、牵连加速度与哥氏加速度的矢量和。

根据上面的讨论, 我们对式 (1-17) 中各项加速度的物理意义概述如下:

1. 相对加速度 $\frac{\partial^2 \mathbf{R}_r}{\partial \mathbf{x}^2}$ 表明: 动坐标系 $Oxyz$ 相对惯性坐标系 $IXYZ$ 完全不动时, 质点相对动坐标系的相对加速度。

2. 牵连平移加速度 $\frac{d^2 \mathbf{R}_o}{dt^2}$ 表明: 动坐标系 $Oxyz$ 相对惯性坐标系 $IXYZ$ 只有平移运动时, 带动质点运动而产生的牵连平移加速度。

3. 牵连切向加速度 $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{R}_r$ 表明: 质点相对动坐标系 $Oxyz$ 完全不动, 但是动坐标系仍将带动质点一起转动而具有角加速度, 将使质点产生牵连切向加速度。

4. 牵连向心加速度 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_r)$ 表明: 质点相对动坐标系 $Oxyz$ 完全不动, 但是动坐

标系将带着质点作圆周运动, 因而使质点产生牵连向心加速度。

5. 哥氏加速度 $2\omega \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 表明: 哥氏加速度与相对速度 $\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 及牵连角速度 ω 有关。根据式 (1-14) 及 (1-15) 可以看出, 它们是由于两种不同的原因使质点具有哥氏加速度的。首先, 在式 (1-14) 中的一项 $\omega \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 是对速度矢量 $\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 进行微分时产生的。该项表明, 在不同时刻, 质点在动坐标系中的矢径 $\mathbf{R}_r$ 不同, 使质点的牵连切线速度 $\omega \times \mathbf{R}_r$ 随时间而改变, 因而产生了加速度。其次, 在式 (1-15) 的牵连加速度展开式中也产生一项 $\omega \times \frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 。该项表明, 由于动坐标系 $Oxyz$ 的转动角速度 ω 改变了相对速度 $\frac{\partial \mathbf{R}_r}{\partial t}$ 的方向而产生的加速度。

第二节 质点运动微分方程式

在质点动力学问题中, 作用在质点上的外力与质点的运动规律之间的关系是用质点运动微分方程式来描述的, 这种方程式也称为质点的动力学方程式。牛顿运动定律是研究上述方程的基础。

一、在惯性坐标系中质点运动微分方程式

牛顿第二定律表明: 当一物体 (或质点) 受到外力作用时, 该物体所获得的加速度和外力成正比, 和物体本身质量成反比, 加速度的方向与外力方向一致。其关系式为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1-19)$$

式中 $\mathbf{F}$ ——作用在物体 (或质点) 上的外力;

m ——物体 (或质点) 的质量;

$\mathbf{a}$ ——外力作用物体 (或质点) 产生的加速度。

牛顿定律只适用于惯性坐标系。考虑到质点在外力 $\mathbf{F}$ 作用下相对惯性坐标系产生的绝对加速度 $\mathbf{a}_a = \frac{d^2 \mathbf{R}_a}{dt^2}$, 根据式 (1-19) 则可求得质点在惯性坐标系中的运动微分方程式为

$$m\mathbf{a}_a = m \frac{d^2 \mathbf{R}_a}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (1-20)$$

如果用直角坐标参数表示 $\mathbf{W}_a$ 及 $\mathbf{F}$ 时, 式 (1-20) 可以写成

$$m \begin{bmatrix} a_{ax} \\ a_{ay} \\ a_{az} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \frac{d^2 X}{dt^2} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

二、在非惯性坐标系中质点运动微分方程式

如果任一动坐标系, 它相对惯性坐标系的运动不是等速平移运动 (根据力学相对性原理, 相对惯性坐标系作等速平移运动的任一坐标系都是惯性坐标系), 或者有转动运动, 那么这个

动坐标系就不是惯性坐标系了。

由图 1-2 及其研究可知, 当我们研究质点 P 在外力作用下的运动时, 质点相对惯性坐标系的加速度如式 (1-18) 所示, 即

$$a_s = a_o + a_t + a_n + a_c \quad (1-22)$$

式 (1-22) 中, $a_r = \frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2}$ 是质点 P 相对动坐标系的相对加速度, 即质点相对非惯性坐标系的加速度。我们将式 (1-22) 代入式 (1-20), 经整理后, 则得

$$ma_r = m \frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = F - ma_o - ma_t - ma_c = F_{eq} \quad (1-23)$$

式 (1-23) 中的 F_{eq} 称为作用在质点 P 上的等效作用力。如果把式 (1-23) 中的 $(-ma_o)$ 、 $(-ma_t)$ 及 $(-ma_c)$ 分别定义为由于牵连平移加速度、牵连切向及向心加速度、哥氏加速度所引起的惯性力, 则作用在 P 点上的等效作用力就等于外力与所有诸惯性力的矢量和。因此, 式 (1-23) 就是在非惯性坐标系中质点的运动微分方程式, 它表明采用等效作用力后, 牛顿定律在形式上也适用于非惯性坐标系, 即: 等效作用力等于质点的质量与质点相对非惯性动坐标系相对加速度的乘积。

第三节 刚体的运动

刚体相对某一参考系作一般运动时具有六个运动自由度, 这个一般运动可以分解成为该刚体的质心平移运动的三个线自由度以及刚体绕其质心定点转动的三个角自由度。因此, 只要分别地描述出刚体质心相对该参考系的平移运动以及刚体绕其质心相对那个参考系的定点转动运动, 就可以完全描述出刚体相对参考系的一般运动。

一、作一般运动时, 刚体内的速度及加速度

图 1-3 中, $IXYZ$ 为惯性坐标系, $Oxyz$ 为固定在刚体质心上的动坐标系。我们研究刚体相对惯性坐标系的一般运动, 可以分解成为动坐标系原点的平移运动以及刚体绕该点的转动运动。

设 P 为刚体上的任意一点, 它在惯性坐标系 $IXYZ$ 及动坐标系 $Oxyz$ 中的位置分别用矢量 R_s 及 R_r 表示。刚体质心 O 点相对惯性坐标系 $IXYZ$ 的位移、速度及加速度分别用 R_o 、 v_o 及 a_o 来表示, 而刚体绕其质心 O 相对惯性坐标系的角速度用 ω 来表示。由于 P 点在刚体上不动, 即相对动坐标系 $Oxyz$ 没有运动, 所以 P 点的相对速度及相对加速度都等于零, 即

$$\frac{\partial R_r}{\partial t} = \frac{\partial^2 R_r}{\partial t^2} = 0 \quad (1-24)$$

将式 (1-24) 代入式 (1-8), 则得

$$\frac{dR_s}{dt} = \frac{dR_o}{dt} + \omega \times R_r \quad (1-25)$$

即

$$v_s = v_o + \omega \times R_r \quad (1-26)$$

将式 (1-24) 代入式 (1-17) 则得