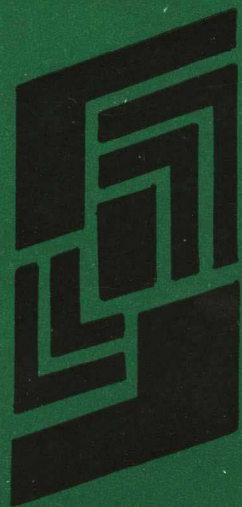


可靠性数学

李玉亚 编



华中理工大学出版社

西

可靠性数学

李玉亚 编

华中理工大学出版社

内 容 简 介

本书共分十章,内容包括可靠性概说、几种常见的失效分布、不可修复系统的可靠性、可修复系统的可靠性、可靠性分配、网络系统的可靠性、故障树分析、单调关联系统理论、可靠性筛选和维修等。

本书取材深浅适中,图、文、表结合,例题较多,论述通俗、简明。

本书可供工程技术人员,工企业领导干部和管理人员,高等学校师生学习或参考。

可靠性数学

李玉亚 编

责任编辑 龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/32 印张:7.75 字数:189 000

1990年12月第1版

1990年12月第1次印刷

印数:1—1 500

ISBN 7-5609-0174-2/O·73

定价:1.56元

编 者 的 话

在科学技术高度发展的今天，产品生产日益大规模化和复杂化，产品的可靠性问题变得越来越重要，于是从本世纪40年代起就开始产生了以产品的寿命特征为研究对象的可靠性技术理论。可靠性数学是可靠性理论的基础理论之一，了解可靠性理论中的数学方法，对于工程技术人员、工业企业领导干部和管理人员已成为非常重要的事了。

本书共分十章：第一章可靠性概说、第二章几个常见的失效分布、第三章不可修复系统的可靠性、第四章可修复系统的可靠性、第五章可靠性分配、第六章网络系统的可靠性、第七章故障树分析、第八章单调关联系统、第九章可靠性筛选和第十章维修。叙述和论证都力求简明易懂，使具有一般概率知识和线性代数知识的读者都能学懂弄通。本书除可供工程技术人员、工业企业领导干部和管理人员阅读外，还可作为高等学校的高年级学生及研究生的读物和数学教师的教学参考资料之用。

作者在编写过程中，曾参考曹晋华、程侃、茆诗松和王玲等同志的著作，特此感谢。特别感谢华中理工大学出版社的同志们对本书的关心、支持和帮助。

由于水平所限，书中错误疏漏之处在所难免，敬请读者惠予指正，亦望专家不吝赐教。

编者 李玉亚

目 录

第一章 可靠性概说	(1)
1.1 可靠性数学理论的背景和研究方法	(1)
1.2 产品的可靠性	(1)
1.3 评定产品可靠性的几个数量指标	(3)
1.4 例题	(7)
第二章 几种常见的失效分布	(11)
2.1 失效率函数	(11)
2.2 失效率的单位	(13)
2.3 产品的失效规律	(13)
2.4 几种常见的失效分布	(14)
2.5 例题	(20)
第三章 不可修复系统的可靠性	(24)
3.1 系统图与可靠性框图	(24)
3.2 串联系统	(25)
3.3 并联系统	(29)
3.4 冗余系统	(33)
3.5 混联系统	(34)
3.6 n 中取 K 的表决系统	(37)
3.7 贮备系统	(42)
第四章 可修复系统的可靠性	(54)
4.1 随机过程有关知识	(54)
4.2 马尔柯夫型可修复系统的一般模型	(59)
4.3 系统的瞬时可用度	(62)
4.4 系统的可靠度	(63)
4.5 系统首次故障前的平均时间	(65)

4.6	系统的平均开工时间和平均停工时间	(67)
4.7	单部件可修复系统	(67)
4.8	例题	(71)
4.9	可修复的串联系统	(74)
4.10	可修复的并联系统	(82)
4.11	$K/n[G]$ 系统、一个修理工的情况	(95)
4.12	例题	(97)
第五章	可靠性分配	(101)
5.1	可靠性分配的目的	(101)
5.2	等同分配法	(102)
5.3	ARINC分配法	(103)
5.4	AGREE分配法	(105)
5.5	费用最小的分配法	(109)
5.6	动态规划法	(112)
5.7	条件极值法	(118)
5.8	按不可靠度比的分配法	(119)
5.9	复杂系统的可靠性分配	(120)
第六章	网络系统的可靠性	(124)
6.1	图与网络的有关知识	(124)
6.2	系统的网络图	(131)
6.3	二终端问题	(132)
6.4	串、并联网路的简化	(133)
6.5	无向网络的简化法	(134)
6.6	有向网络的简化法	(135)
6.7	例题	(139)
6.8	无向网络的 Δ -Y型简化法	(143)
第七章	故障树分析	(150)
7.1	树的有关知识	(150)
7.2	故障树	(151)

7.3	例题	(155)
7.4	故障树的数学描述	(160)
7.5	求全部最小割的方法	(163)
7.6	求全部最小路的方法	(166)
7.7	故障树的定量评定	(169)
7.8	例题	(169)
第八章	单调关联系统理论	(175)
8.1	定义	(175)
8.2	单调关联系统的性质	(179)
8.3	用路集表示单调关联系统	(182)
8.4	单调关联系统的可靠度	(186)
8.5	单调关联系统可靠度的求法	(190)
8.6	例题	(190)
8.7	单调关联系统可靠度的界	(194)
8.8	部件的重要度	(195)
8.9	例题	(197)
第九章	可靠性筛选	(201)
9.1	可靠性筛选的目的和意义	(201)
9.2	筛选方法的选择	(201)
9.3	老化筛选	(203)
9.4	线性判别筛选	(205)
9.5	例题	(215)
第十章	维修	(215)
10.1	年龄更换策略	(215)
10.2	事后维修	(220)
10.3	成批更换策略	(221)
10.4	检修周期的确定	(228)
10.5	故障小修的周期更换策略	(230)
10.6	考虑可用度的年龄维修策略	(232)

10.7 考虑可用度的故障小修的周期维修策略.....	(235)
附录	(238)

第一章 可靠性概说

1.1 可靠性数学理论的背景和研究方法

可靠性理论是以产品的寿命特征为主要研究对象的，它是本世纪40年代发展起来的一门综合性技术理论。随着科学技术的发展，可靠性理论得到了迅速的发展；随着可靠性理论分析的日趋定量化、模型化，用到的数学工具也越来越复杂，因而可靠性数学已成为可靠性理论的重要基础理论之一了。

可靠性理论的许多基本概念的定义，都是用数学中的术语给出的，所以必须要理解好这些基本概念的严格数学定义，否则，就会在工作中造成概念上的混乱。同时一个可靠性工作者，也只有在熟悉了可靠性理论中的数学方法之后，才能根据问题合理地建立起数学模型(概率模型和统计模型)。

产品的寿命是一个非负的随机变量，研究产品寿命特征的主要数学工具是概率论和数理统计，所以可靠性数学就成了应用概率论和数理统计的一个分枝；在可靠性理论研究中又与决策问题及最优化问题有密切关系，可靠性数学又是运筹学的一个重要分枝。

1.2 产品的可靠性

产品在规定的条件下和规定的时间内，完成规定功能的能力称为产品的**可靠性**。

“规定的时间”是指要求保持功能的使用时间、贮存时间以及
与时间相当的动作次数和运行里程等。离开时间就失去可靠性意义，而规定时间的长短，是随着产品对象不同和使用目的不

同而异。譬如地下电缆和海底电缆要求几十年内可靠；一般的电视机和通讯设备则要求在几千小时到几万小时内可靠。一般说来，产品的可靠性是随着产品的使用时间的延长而逐渐降低，所以一定的可靠性是对时间而言的。

“规定的条件”是指使用条件、维护条件、环境条件和人的因素（或人机关系）等。这些条件对产品的可靠性都会有直接的影响。在不同的条件下，同一产品的可靠性也不一样。譬如由于实验室使用条件与现场使用条件的不同，对同一产品的可靠性就可能相差几倍到几十倍。所以不在规定的条件下谈论可靠性，就失去比较产品质量的前提。

“规定的功能”是指产品的各种技术性能指标。在讨论产品的可靠性之前，应先规定出产品达到什么样的技术性能指标才算可靠或不可靠。把产品丧失规定功能的状态称为产品发生**故障或失效**，相应的各项性能指标称为**故障判据或失效判据**。在讨论产品的可靠性之前，先合理地、明确地给出失效判据是很重要的，否则可靠性问题就会争论不休。

“能力”必须对它有定量的刻划，通常是用概率值来度量（以便说明产品可靠性的程度），它具有统计学的意义。“能力”通常指的是各种可靠性指标。常用的可靠性指标有可靠度、平均寿命和失效率等。这些基本概念，将在以后逐个介绍。

技术性能指标只能反映产品质量的一个方面，全面的产品质量应包含技术性能、可靠性、经济性等指标，即 $Q = F \times R \times C$ 。对某些产品在一定的意义下和一定场合下，可靠性指标比技术性能指标还重要。例如对于导弹、核武器等国防尖端产品来说，若是不可靠，就不能命中目标或是发射不出去，有时甚至引起爆炸事件，这时它的技术性能指标再好也是没有意义的。当然，没有基本性能指标，产品的可靠性问题就无从谈起，

产品的所谓不可靠是针对产品的某些基本性能指标而言的。产品的基本性能与产品的可靠性两者是不可分割的。

产品的可靠性指标与技术性能指标之间有一个很重要的区别点，那就是主要技术性能指标一般可以通过仪器测量而获得，如电子产品就能用测得的灵敏度、选择性、稳定度等表示其技术性能，而要衡量产品的可靠性，就必须进行大量的试验分析和调查研究工作，才能对产品的可靠度、平均寿命和失效率等作出统计估计。

1.3 评定产品可靠性的几个数量指标

由一些基本部件组成的完成某种指定功能的整体称为系统。

一个产品可以是一个部件，也可以是一个系统。

产品分为可修复产品与不可修复产品两类。产品丧失规定功能的状态对不可修复的产品称为失效，对可修复的产品则称为故障。

产品从开始工作到首次故障（对不可修复的产品则是到失效）前的一段工作时间 T 称为产品的**寿命**。由于产品发生故障（失效）是随机的，所以寿命 T 是一个随机变量。这个随机变量 T 有离散型和连续型之分，当它符合分布函数条件时，便有后面的各种寿命分布。

一、不可修复产品的主要可靠性数量指标

(1) 失效分布函数与失效密度

称寿命 T 的分布函数

$$F(t) = P\{T \leq t\} \quad (1-1)$$

为**失效分布函数**。它表示在规定的条件下，产品的寿命 T 不超

过 t 的概率, 或者说是产品在 t 时刻前发生失效的概率。

若失效分布函数 $F(t)$ 可微时, 则称微商

$$F'(t) = f(t) \quad (1-2)$$

为失效密度。

失效分布函数 $F(t)$ 和失效密度 $f(t)$ 二者之一确定了, 产品寿命 T 的统计规律性就完全确定了。

(2) 平均寿命

设产品寿命 T 的失效密度为 $f(t)$, 则称 T 的数学期望

$$E[T] = \int_0^{+\infty} t f(t) dt \quad (1-3)$$

为产品的平均寿命, 记为 MTTF (Mean Time To Failure)。

(3) 可靠度

$$R(t) = P\{T > t\} = 1 - F(t) \quad (1-4)$$

称为产品的可靠度函数, 简称可靠度。通常所说的可靠性就是指可靠度而言的。

依公式 (1-4) 知, $R(t)$ 是时间 t 的非增函数, 且有 $R(0) = 1$ 和 $R(+\infty) = 0$ 。

(4) 可靠寿命、中位寿命和特征寿命

由于产品的可靠度 $R(t)$ 的非增性, 所以随着时间的延长, 产品的可靠度会越来越低。在可靠性工作中, 有时人们需要知道, 对于给定的 r ($0 < r < 1$), 产品的可靠度下降到 r 时的时间 t_r 是多少? 这个时间 t_r 称为产品的可靠寿命, 称 r 为可靠性水平。这就是说, 对于给定的可靠性水平 r , 使产品的可靠度下降到 r 的那个寿命时间 t_r 称为产品的可靠寿命。用公式表示即是

$$R(t_r) = r \quad (1-5)$$

其图形如图 1-1 所示。

对应于可靠性水平 $r = 0.5$ 的可靠寿命 $t_{0.5}$ 称为中位寿命。

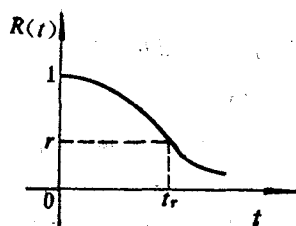


图1-1

对应于可靠性水平 $r = e^{-1}$ 的可靠寿命 t_r 称为**特征寿命**。

可靠寿命是按产品的可靠度要求而提出的寿命要求，而平均寿命则不能直接反映出对应的可靠度要求。

二、可修复产品的主要可靠性数量指标

对于可修复产品，由于产品故障后可以予以修复，所以可修复产品的运行随时间的进程是正常状态与故障状态交替出现的，如图 1-2 所示

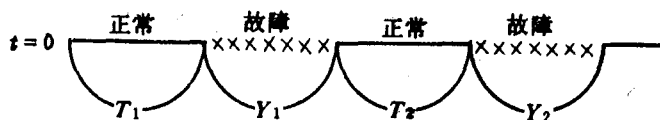


图1-2

其中 T_i 和 Y_i 分别表示第 i 个周期的开工时间和停工时间， $i = 1, 2, 3, \dots$ 。在开工时间内产品处于正常状态，在停工时间内产品处于故障状态。

一般， $T_1, T_2, \dots$ 或 $Y_1, Y_2, \dots$ 不一定是同分布的。

(1) 首次故障前的时间分布

产品首次故障前的时间分布函数为

$$F_1(t) = P\{T_1 \leq t\} \quad (1-6)$$

T_1 的数学期望

$$E[T_1] = \int_0^{+\infty} t dF_1(t) \quad (1-7)$$

称为**首次故障前平均时间**。

对于可修复产品，也常用可靠度的概念，其定义为

$$R(t) = P\{T_1 > t\} = 1 - F_1(t) \quad (1-8)$$

它表示可修复产品在时间区间 $[0, t]$ 内正常的概率。这与 (1-4) 表示的可靠度的定义是一致的。

(2) 平均开工时间

平均开工时间是指可修复产品的平均无故障的工作时间。

记为 MTBF (Mean Time Between Failure)。其数学表达式为

$$MTBF = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad (1-9)$$

(3) 故障次数的分布

设可修复产品在时间区间 $(0, t]$ 内的故障次数为 $N(t)$ ，则 $N(t)$ 是一个取自自然数的离散型随机变量。产品在时间区间 $(0, t]$ 内的故障次数的分布为

$$P_K(t) = P\{N(t) = K\}, K = 0, 1, 2, \dots \quad (1-10)$$

产品在时间区间 $(0, t]$ 内的平均故障次数为

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{K=1}^{+\infty} K P_K(t) \quad (1-11)$$

若 $M(t)$ 可微，则称微商

$$m(t) = \frac{d}{dt} M(t) \quad (1-12)$$

为产品的**瞬时故障频度**。若极限

$$M = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) \quad (1-13)$$

存在, 则称此极限值 M 为产品的**稳态故障频度**。

在更换问题中, 指标 $M(t)$ 和 M 告诉人们大约需准备多少个备件。

(4) 可用度

可修复产品可用一个服从 (0—1) 分布的随机变量来描述。
对 $t \geq 0$, 令

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{时刻 } t \text{ 时产品正常} \\ 0, & \text{时刻 } t \text{ 时产品故障} \end{cases}$$
$$A(t) = P\{X(t) = 1\} \quad (1-14)$$

称 $A(t)$ 为可修复产品在时刻 t 时的**瞬时可用度**。 $A(t)$ 只能说明产品在时刻 t 时正常的概率。若极限

$$\tilde{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \quad (1-15)$$

存在, 则称此极限值 $\tilde{A}$ 为产品的**稳态可用度**, 它表示产品经长期运行, 产品处于工作状态时间的百分比。

1.4 例 题

例1 设某种产品的寿命 T 服从指数分布, 其失效密度为

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 试求:

- (1) 可靠度 $R(t)$; (2) 平均寿命 $E[T]$; (3) $R\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 。

解 (1) 依公式 (1-4) 得

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) = 1 - \int_{-\infty}^t f(x) dx = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 + e^{-\lambda x} \Big|_0^t = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

- (2) 依分部积分公式得

$$\int_0^{+\infty} t dR(t) = tR(t) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} R(t) dt$$

又因 $\int_0^{+\infty} t dR(t) = -\lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt$ 及 $tR(t) \Big|_0^{+\infty} = t e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = 0$,

故

$$-\int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_0^{+\infty} R(t) dt$$

即

$$\int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt$$

依公式(1-3)得

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} R(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$(3) \quad R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{-\lambda t} \Big|_{t=1/\lambda} = e^{-1} = 0.368$$

$R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0.368$ 说明: 若产品的寿命 T 服从指数分布, 则只有一小部分产品 (约占 36.8%) 的寿命超过了平均寿命 $E[T] = 1/\lambda$; 而大部分产品 (约占 63.2%) 在平均寿命前就失效了。

例2 某种产品的寿命 T 服从参数为 λ 的指数分布, 其平均寿命为 200 小时, 试求:

(1) 连续工作 200 小时的可靠度 $R(200)$;

(2) 连续工作 10 小时的可靠度 $R(10)$ 。

解 由例 1 知, 当产品的寿命 T 服从参数为 λ 的指数分布时, 平均寿命 $E[T] = 1/\lambda$, 可靠度 $R(t) = e^{-\lambda t}$ 。

依题设, $1/\lambda = 200$, 所以分布参数 $\lambda = 1/200$ 。故

$$(1) \quad R(200) = e^{-\frac{1}{200} \times 200} = 0.368,$$

$$(2) \quad R(10) = e^{-\frac{1}{3700} \times 10} = 0.95.$$

例 3 某种设备的寿命 T 服从参数为 λ 的指数分布, 其平均寿命为 3700 小时, 试求:

(1) 对应于可靠性水平 $r = 0.9$ 的可靠寿命;

(2) 中位寿命.

解 依例 1 的结果和题设得, $1/\lambda = 3700$, 因而有分布参数 $\lambda = 1/3700$; 可靠度 $R(t) = e^{-t/3700}$.

(1) 令 $e^{-t/3700} = 0.9$, 则 $t = 388.5$ 小时, 即对应于可靠性水平 $r = 0.9$ 的可靠寿命为 388.5 小时.

(2) 令 $e^{-t/3700} = 0.5$, 则 $t = 2564$ 小时, 即中位寿命为 2564 小时.

例 4 为了求出一批失效分布不知道的电子管的平均寿命, 抽取 1 个容量为 110 的样本, 观测的结果见表 1-1 (单位: 小时). 试求出平均寿命和寿命不超过 1000 小时的概率的估计值.

表 1-1

组号	失效时间范围	组中值	频数
1	0~400	200	6
2	400~800	600	28
3	800~1200	1000	37
4	1200~1600	1400	23
5	1600~2000	1800	9
6	2000~2400	2200	5
7	2400~2800	2600	1
8	2800~3200	3000	1

解 这 110 只电子管总的工作时间近似等

$$S = 200 \times 6 + 600 \times 28 + \cdots + 3000 \times 1 = 120000 \text{ (小时)}$$