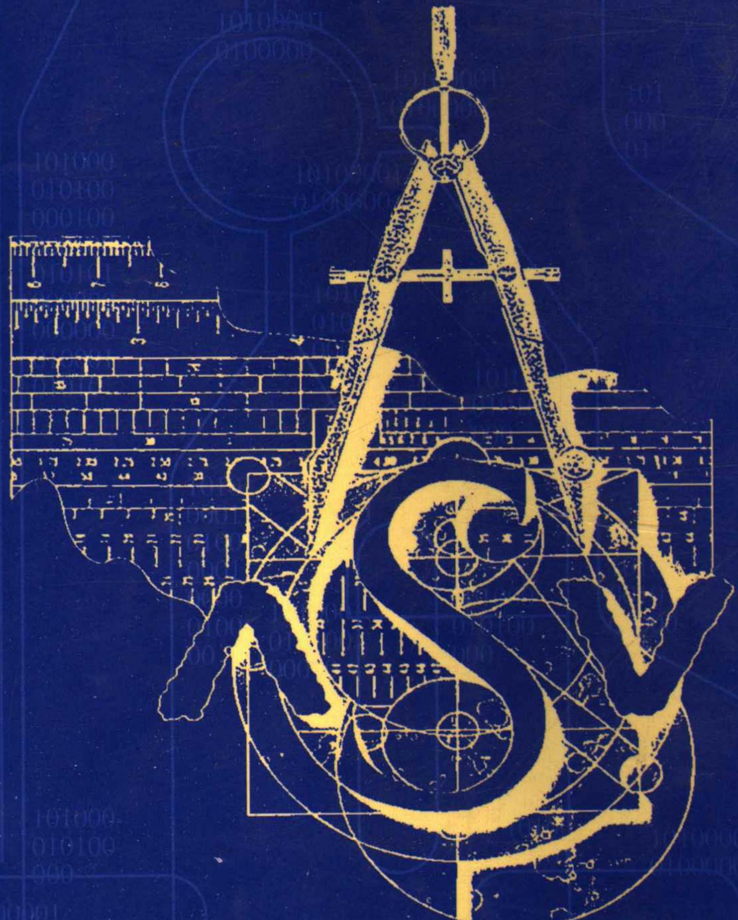
高职高专机电类系列教材

高等数学基础

GAOZHIGAOZHUANJIDIANLEI
XILIEJIAOCAI

肖作武 主编



中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础/肖作武主编.
北京：中国人民大学出版社，2000.
高职高专机电类系列教材

ISBN 7-300-03445-4/F・1032
Ⅰ. 高…
Ⅱ. 肖…
Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第37950号

高职高专机电类系列教材
高等数学基础
肖作武　主编
肖作武　李进生　肖玉霞　撰稿

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路157号　邮编100080）
发行部：62514146　门市部：62511369
总编室：62511242　出版部：62511239
E-mail：rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销：新华书店
印　　刷：中国人民大学印刷厂

开本：787×1092毫米 1/16　印张：22.75
2000年9月第1版　2000年9月第1次印刷
字数：518 000

定价：27.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

随着科学技术的迅速发展，计算机的广泛使用，标志着现代数学以技术化的方式迅速地渗透到人们的日常生活的各个领域；与经济相关的“盘算”的学问，如近似计算与估算、比与比例、利息与利率、统计与概率、运筹与优化以及系统分析与决策等的频繁使用，要求人们具备更多的能有效运用的数学知识以及数学思想和方法。我们编写这本书的目的就是为了把数学作为一种有用的工具介绍给读者。

本书力图对纯粹数学与应用的关系以及与应用数学方法的关系予以足够的重视；从技术科学与日常实际中搜集各种实例引入问题，以提出的问题为线索，展开讲述数学概念、定义、定理等知识内容；精选例题，以提高解题技能，介绍数学思想方法；数形结合，以加深对数学概念、定义、定理的直观理解，代替严格的数学证明；回到实际，以反映数学的应用，体现数学的工具性作用；数学建模，介绍基本数值计算方法；以适量的计算题与练习题为载体，融入一些实用的计算思想及其实现过程，如分割枚举、最优化等。在内容编排上尽可能相互独立，以便不同专业选择使用。

本书内容包括集合、函数、向量代数初步、解析几何基础、极限与连续、微积分及其应用、级数与逼近、微分方程，计算方法的内容穿插于各相应内容之中。

本书书末只附了答案，没有提示，这对于读者来说一定不很方便。要想得到完整的解题过程，好学的读者必须勤奋而深入地努力，任何人想不付出辛勤的汗水就学好这门课是不可能的。

虽然本书是为大专层次的高职学生编写的，但它也有益于其他大专相应学科的学生。

本书第一章、第二章由肖玉霞编写，第三章、第四章由李进生编写，第五章至第七章由肖作武编写。

本书力求做到叙述简明扼要，内容深入浅出，提供学习注意事项，并且对于例题和习题的选择、安排，注意了典型性和整体性。但是，限于编者的水平，本书的不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

1999 年 8 月

目　录

第一章　基础知识

本章提要

本章主要介绍学习本书所必须具备的数学基础知识：集合及其运算、数集、向量代数初步及空间解析几何基础.集合是数学上一个最基本的概念，数学的每一个分支都离不开它，但这里我们只作一些简单的介绍.向量又名矢量，它是由力学、物理学的需要而引入的数学概念，向量代数是关于数的代数运算的一种推广.空间解析几何的实质在于建立空间点与三元有序实数组之间的对应关系，曲线和曲面则对应于方程(组)的解集，使得可以用代数方法来解决几何问题.这一部分内容在本章中介绍得较多，原因在于它是解决微积分及其他数学分支问题的工具.

科学技术的绚丽多彩的伟大成就深刻地影响着人类的生活，使人们普遍认识到数学的重要性.21世纪是信息化社会，是计算机时代.未来社会经济和社会发展有赖于高新科学技术和高素质的人才.数学是科学技术的基础，这不仅仅因为数学在日常生活和生产中有广泛的应用，在高新科学技术中不可须臾离开；而且它为我们理解和适应信息化社会提供了一种强有力的工具.这就要求人们在工作中使用数学，而用好数学的关键在于学好数学，掌握数学的分析方法与应用.

以下从数学基础知识开始，逐步介绍函数、微分学、积分学、级数与逼近、常微分方程等基本理论及其应用.

§1.1　集合　集合的运算

1.1.1　集合

一、集合的概念

集合是一个重要的数学概念.自从19世纪，德国数学家康托尔(Georg Cantor,

1845 年 ~1918 年）创立了关于集合的理论以来，集合理论发展很快. 至今，集合已不仅仅是数学最重要的基础之一，而且是一种广泛应用的科学语言和基本的观点.

（一）集合的概念

集合不是讨论处于孤立状态下的事物个体，而是讨论具有某种共性的一类事物. 例如下面的几个例子：

例 1 某大学的全体学生.

例 2 某电脑键盘上的所有按键.

例 3 一年中有 31 天的月份.

例 4 一位的正奇数.

例 5 0 与 1 之间的全体实数.

它们分别是由具有某种共同属性的学生、按键、月份、数等组成的. 我们说，上面每组对象的全体构成一个**集合**，集合中的每个对象叫做**元素**. 如例 4 中的集合是由 1,3,5,7,9 五个数组成的集合，其中的对象 1,3,5,7,9 都是集合中的元素.

通常，我们用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示集合. 用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示集合中的元素. 当 a 是集合 A 的元素时，就说"a 属于 A"，记为"$a \in A$"；当 a 不是集合 A 的元素时，用符号"$a \overline{\in} A$"表示，读作"a 不属于 A". 例如，如果用 A 表示例 5 所描述的集合，那么 $\frac{1}{2} \in A$，$\frac{\sqrt{2}}{2} \in A$，而 $2 \overline{\in} A$.

（二）集合的表示法

表示一个具体集合通常有两种方法：列举法和描述法.

1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号{}内表示集合的方法，叫做**列举法**，如例 3 所描述的集合可表示为{1 月，3 月，5 月，7 月，8 月，10 月，12 月}. 用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序.

2. 描述法

把集合中的元素所具有的共同属性清楚地描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**. 用 $A=\{a \mid a$ 具有的共同属性$\}$ 表示. 如例 4 所描述的集合可表示为 $B=\{n \mid n$ 为一位的正奇数$\}$. 又如例 5 所描述的集合可表示为 $C=\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$.

选用什么方法表示一个给定的集合，要看集合中的元素所具有的共同属性而定. 有的集合适合用列举法表示；有的适合用描述法表示；有的只能用描述法表示，而不能用列举法表示，例如例 5 所描述的集合 C；有的两种表示方法都适合，如例 3、例 4.

3. 空集

不含任何元素的集合，称之为**空集**，记为 $\varnothing$. 例如：

$\{x \mid x$ 为小于零的自然数$\} = \varnothing$，

$\{x \mid x = x - 10\} = \varnothing$.

最后，我们还要强调下面几点：

(1) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是确定的，也就是说对于集合所涉及的对象，要么是这个集合中的元素，要么不是这个集合中的元素，二者必居其一，且只居其一. 例如“全体大个子”并不构成一个集合. 因为一个人究竟算不算“大个子”并没有明确的界限，因此难以判断某人是否是这个集合的元素. 再如“好看的花布”也不构成一个集合. 因为没有明确的标准判断什么样的布为“好看的花布”.

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是互异的，也就是说一个集合的任何元素都互不相同.

(3) 集合中的元素无先后次序. 如由元素 3,4,7,8 组成的集合与由元素 4,7,8,3 组成的集合是相同的.

(4) 集合中的元素可以是任何对象. 可以是人，也可以是物，还可以是数或数学表达式等等.

(5) 如同零在数的运算中起的作用一样，空集对下面要讲的集合运算来说是不可缺少的. 注意空集 $\varnothing$ 不能与含有单个元素“0”的集合 $\{0\}$ 相混淆.

二、集合间的关系

(一) 相等

考查集合 $A = \{1,2,3,4\}$，

$B = \{n \mid n$ 为不大于 4 的正整数$\}$.

我们看到集合 A 与集合 B 是由相同的元素组成的，而一个集合由且只由其全部元素所确定. 因此，两个集合 A 与 B 当且仅当它们有完全一致的元素时叫做 A 与 B **相等**.

(二) 子集　真子集

1. 子集

我们知道，任何一个自然数都是一个整数，就是说由自然数构成的集合 $\mathbf{N}$ 的任何一个元素都是由整数构成的集合 $\mathbf{Z}$ 的一个元素. 同样，$\mathbf{Z}$ 的任何一个元素都是由有理数构成的集合 $\mathbf{Q}$ 的一个元素.

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$)，读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”). 例如：$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

注：一般教科书上用“$\subset$”表示，它可以表示子集，也可表示真子集.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以根据定义有 $A \subseteq A$.

我们规定空集是任何集合 A 的子集，也就是说，对于任何集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集但不等于 B，即 B 中至少有一个元素不是 A 的元素，那么 A 叫做 B 的 **真子集**. 记为 $A \subset B$(或 $B \supset A$). 例如，对于上面提及的 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$，有 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$,

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

显然,空集是任何非空集合的真子集.

在引入了符号"$\subseteq$"(或"$\subset$")以后,我们必须注意"$\in$"(或"$\overline{\in}$")和"$\subseteq$"(或"$\subset$")的区别."$\in$"(或"$\overline{\in}$")是连接集合与元素之间的关系符号,"$\subseteq$"(或"$\subset$")是连接集合与集合之间的关系符号.

1.1.2　集合的运算

从给定的一些集合出发,我们可以通过所谓"集合的运算"作出一些新的集合,其中最常用的运算有"**交**"、"**并**"、"**差**".

一、交

已知6的正约数构成的集合为 $A=\{1,2,3,6\}$,10的正约数构成的集合为 $B=\{1,2,5,10\}$,那么6与10的公约数构成的集合为 $C=\{1,2\}$.容易看出集合 C 是由所有属于 A 且属于 B 的元素(即 A,B 的公共元素)所构成的集合.

一般地,由所有属于集 A 且属于集 B 的元素所构成的集合,叫做 A 与 B 的**交集**,简称为**交**,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",它可以表示为:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

二、并

已知方程 $x^2-1=0$ 的解集为 $A=\{1,-1\}$,方程 $x^2-4=0$ 的解集为 $B=\{2,-2\}$,那么方程 $(x^2-1)(x^2-4)=0$ 的解集为 $C=\{1,-1,2,-2\}$.容易看出,集合 C 是由所有属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合.

一般地,由所有属于集 A 或属于集 B 的元素所构成的集合,叫做 A 与 B 的**并集**,简称为**并**,记为 $A\cup B$,读作"A 并 B",它可以表示为:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

三、差

考查下面方程的解集.已知方程 $(x^2-4)(x^2-9)=0$ 的解集为 $A=\{2,-2,3,-3\}$,方程 $x+3=0$ 的解集为 $B=\{-3\}$,方程 $(x^2-4)(x-3)=0$ 的解集为 $C=\{2,-2,3\}$,不难发现,集合 C 是所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合.

一般地,由所有属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所构成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的**差集**,记为 $A-B$,读作"A 减 B",它可以表示为 $A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\overline{\in} B\}$.

为了直观形象地表示集合与元素、集合与集合之间的关系和集合的交、并、差等三种运算,常用图形表示,这种图形叫做**文氏图**.图1－1－1给出了属于(或不属于)相等、包含、交、并、差等关系的文氏图.

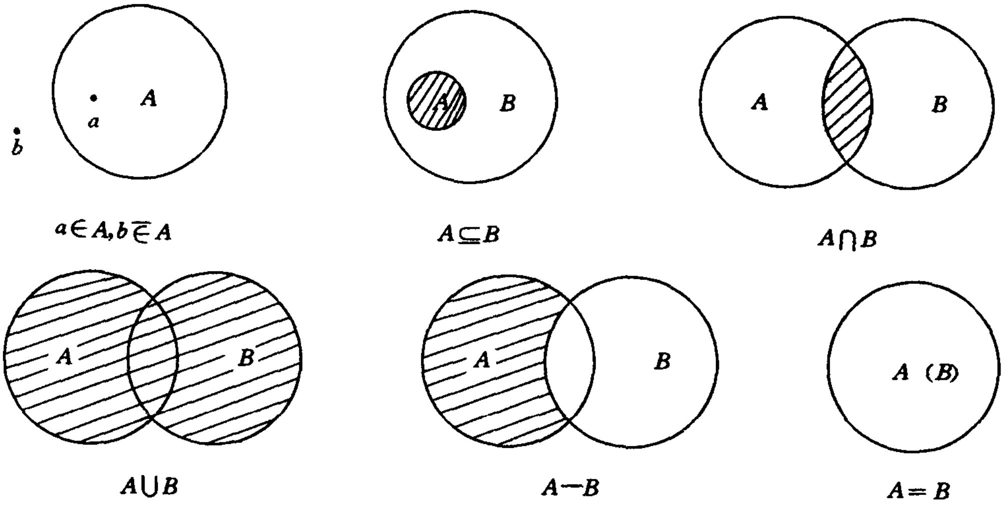


图 1－1－1

§1.2 数 集

1.2.1 数集

一、常用的数集及符号

所谓**数集**是指由数构成的集合. 常见的数集有：由所有自然数构成的数集叫做**自然数集**，用**N**表示；由所有整数构成的数集叫做**整数集**，用**Z**表示；由所有有理数构成的数集叫做**有理数集**，用**Q**表示；由所有实数构成的数集叫做**实数集**，用**R**表示；由所有复数构成的数集叫做**复数集**，用**C**表示. 它们的关系是：$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

二、实数与数轴

为了表示实数的几何意义，我们画一条叫做**数轴**的直线. **数轴**是一条规定了方向、原点和长度单位的直线，如图 1－2－1 所示.

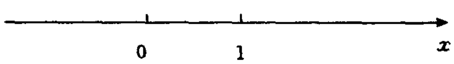


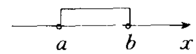
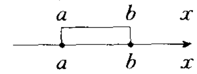
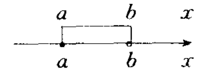
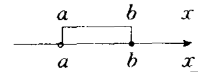
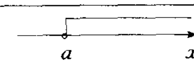
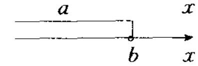
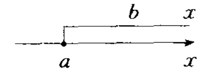
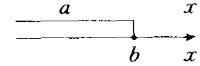
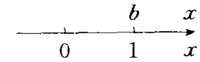
图 1－2－1

原点与实数零对应，原点的右侧即数轴的正方向的所有点与正实数对应，原点左侧即数轴的负方向上的点与负实数对应，这样一来，每个实数都可以在数轴上找出它的惟一对应点；反之，数轴上的每个点都对应着惟一的实数. 也就是说，数轴上的点和实数之间有着一一对应的关系. 正因为如此，我们把实数集和

数轴上对应的点集看成是同一个东西而不加以区别地混合使用.

三、区间　邻域

在实际问题中，一个变量根据所研究问题的条件，一般有着一定的变化范围，如果超出了这个范围，就会使研究的问题失去意义. 例如，1 米以下的儿童乘公车不需购票，而 1 米以上的儿童乘公车必须购票. 某儿童的身高在哪个范围内，就可判断他是否需购票. 数学中常用区间表示这个变量的范围. 所谓“**区间**”是指数轴上一“段”上的所有点构成的**点集**，也可以说是由介于某两个实数之间的全体实数构成的数集，这两个实数叫做区间的**端点**. 区间的类型、名称、记号及描述见下表：

类型	名称	记号	描述	图形
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x\|a<x<b\}$	
	闭区间	$[a,b]$	$\{x\|a\leqslant x\leqslant b\}$	
	左闭右开区间	$[a,b)$	$\{x\|a\leqslant x<b\}$	
	左开右闭区间	$(a,b]$	$\{x\|a<x\leqslant b\}$	
无限区间	左有限开区间	$(a,+\infty)$	$\{x\|x>a\}$	
	右有限开区间	$(-\infty,b)$	$\{x\|x<b\}$	
	左有限闭区间	$[a,+\infty)$	$\{x\|x\geqslant a\}$	
	右有限闭区间	$(-\infty,b]$	$\{x\|x\leqslant b\}$	
	实数轴	$(-\infty,+\infty)$	$\{x\|x\in R\}$	

注意：“$+\infty$”(读正无穷大)、“$-\infty$”(读负无穷大) 是引用的符号，不能作为数看待.

最后引入某点的“邻域”概念：

所谓**点 x_0 的 δ 邻域**，是指以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，亦即设 x_0 和 δ 为两个实数，$\delta>0$，则满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数组成的集合就称为**点 x_0 的 δ 邻域**. 点 x_0 为该**邻域的中心**，δ 为该**邻域的半径**，在数轴上的表示见图 1 － 2 － 2.

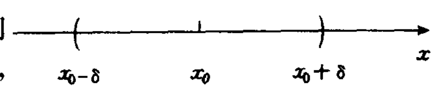


图 1 － 2 － 2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为**点 x_0 的去心的 δ 邻域**. 点 x_0 的去心的邻域是满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的全体实数组成的集合.

例 1　$|x-4|<\frac{1}{4}$，即是以后 $x_0=4$ 为中心的 $\frac{1}{4}$ 邻域，也就是开区间 $(3\frac{3}{4},4\frac{1}{4})$，对于 $x_0=4$ 的去心的 $\frac{1}{4}$ 邻域，则是两个开区间的并集：

$$(3\frac{3}{4},4)\cup(4,4\frac{1}{4}).$$

1.2.2 数的误差

现代科学的发展使得庞大的计算在计算机上得以实现.但是由于计算机中所储存的机器数的全体是一个有限的离散的数集,其分布也是不均匀的,并且,在计算机数的运算中,一般运算也并非总是成立的.因此,计算出的结果往往只是真正结果的近似值,而不是结果的准确值,有时甚至与准确数据相差甚远.这个计算结果与其准确值之间的差距就是**误差**.误差分析不能忽视,否则,计算机上一个好的算法,也可能得出错误的结果.

例 2 方程组

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{3}x_3 = \dfrac{11}{6}, \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 = \dfrac{13}{12}, \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 + \dfrac{1}{5}x_3 = \dfrac{47}{60}, \end{cases}$$

其解为 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

在计算机中,是没有$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{7}$,$\frac{1}{11}$ 等这些分数的,只有将它们化成有限位的小数,才能进行运算.若把系数舍入成三位小数

$$\begin{cases} 1.00x_1 + 0.500x_2 + 0.333x_3 = 1.83, \\ 0.500x_1 + 0.333x_2 + 0.250x_3 = 1.08, \\ 0.333x_1 + 0.250x_2 + 0.200x_3 = 0.783, \end{cases}$$

再求解得,$x_1 = 1.09, x_2 = 0.488, x_3 = 1.49$.

我们看到,尽管系数改变不大,所求出的解却有很大出入.

一、误差的来源

数值分析往往给人以不严格,不准确以至于不够完善的感觉.其实,数值计算中的近似是正常的,误差是不可避免的.

(一) 模型误差

我们知道,为了进行数值计算,首先必须将实际问题归结为数学问题,建立起合适的数学模型.在建立数学模型时,通常要加上许多限制,忽略一些次要因素,这样建立起的"理想化"的数学模型,虽然具有"精确"而"完美"的外表,其实只是客观现象的一种近似而粗糙的描述.而这种数学上描述的近似必然会产生误差.这样的误差称之为**模型误差**.

(二) 观测误差

"理想化"的数学模型中的原始数据,往往是由观测而得到的,由于观测手段的限制或实验仪器的精密程度不同,得到的数据也必然带有一定程度的误差,这种误差称之为**观**

测误差.

（三）截断误差

在以后的学习中，我们将看到许多数学运算(诸如微分、积分及无穷级数求和等）是通过极限过程来定义的，需要无限次运算才能得到精确的结果. 然而在计算机上只能完成有限次的算术运算和逻辑运算，因此需要将解题方案加工成算术运算与逻辑运算的有限序列，这种加工常常表现为无穷过程的截断，由此产生的误差称作**截断误差**.

（四）舍入误差

计算过程中所用的数据可能位数很多，甚至是无穷小数，然而受机器字长的限制，用机器代码表示的数据必须舍入成一定的位数，这就会引起**舍入误差**. 每一步的舍入误差是微不足道的，但经过计算过程的传播和积累，舍入误差可能会“淹没”所需的真解.

二、绝对误差和相对误差

误差虽然不可避免，但人们总是希望计算结果能足够准确，这就需要估计误差，人们通常用绝对误差和相对误差来衡量.

（一）绝对误差与绝对误差限

1. 绝对误差

准确值 x 与近似值 a 的差 $x-a$ 叫做近似值 a 的**绝对误差**，记作 $e(x)$.

例 3　用刻有毫米的米尺测量桌子的长度，使用正确的测量方法测得桌子长度为 985 毫米，设 x 是桌子的真实长度，则实际长为 x 的一个近似值，绝对误差 $e(x)=x-985$. 由于测量误差不会超过半个毫米，即 $|e(x)|=|x-985|\leqslant 0.5$，从而 $985-0.5\leqslant x\leqslant 985+0.5$，因此准确值 x 在区间 $[984.5,985.5]$ 中，通常也可记为 $x=985\pm 0.5$.

2. 绝对误差限

实际中的准确值 x 往往无法得到，因此绝对误差 $x-a$ 的具体数值也无法确定，但是人们可以根据测量工具或计算过程，设法估算出它的取值范围，即误差绝对值的最大限度：$|x-a|\leqslant\varepsilon$.

这个最大限度 ε 称作近似值 a 的**绝对误差限**. 例 3 中的绝对误差限为 0.5.

（二）相对误差与相对误差限

用近似值 a 的绝对误差及其误差限来衡量误差的大小是有局限的. 例如，测量 1 000 米左右的长度时发生 3.1 米的误差，和测量 1 米左右的长度时发生 3.1 厘米的误差，两者的含义是大有区别的. 可见要刻划近似值的精度，除了看绝对误差的大小外，还应当考察准确值本身的大小.

绝对误差 $x-a$ 与准确值 x 的比 $\frac{x-a}{x}$（常用百分数表示）叫做近似值 a 的**相对误差**.