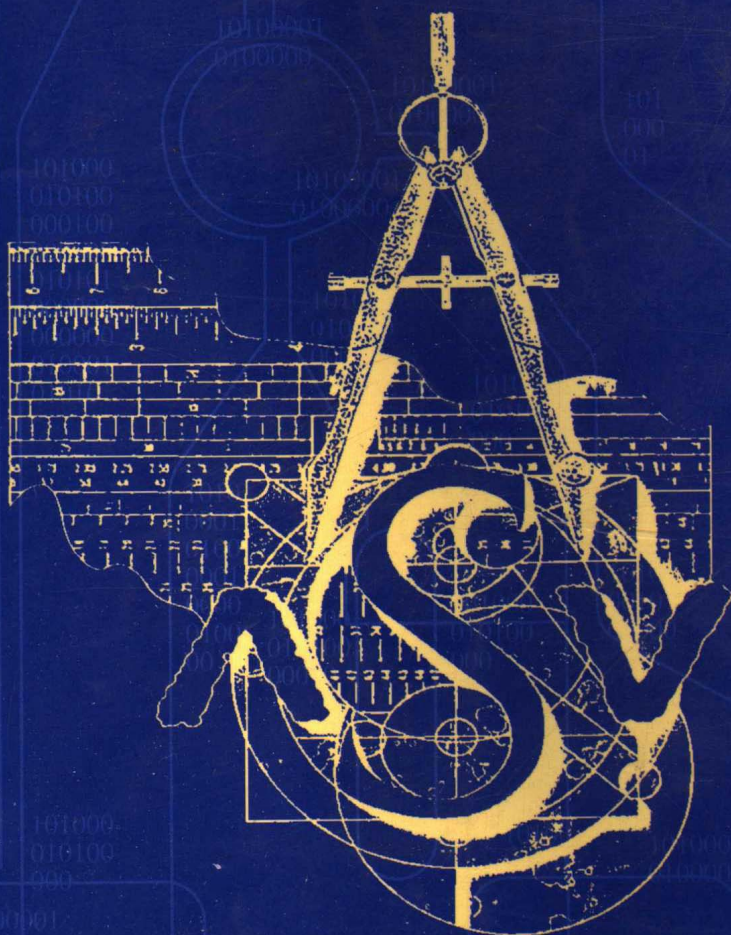


高职高专机电类系列教材

# 高等数学基础

GAOZHIGAOZHUANJIDIANLEI  
XILIEJIAOCAI

肖作武 主编



中国  
人民  
大学  
出版  
社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学基础/肖作武主编.  
北京:中国人民大学出版社,2000.  
高职高专机电类系列教材

ISBN 7-300-03445-4/F·1032

I. 高…  
II. 肖…  
III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材  
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 37950 号

高职高专机电类系列教材

**高等数学基础**

肖作武 主编

肖作武 李进生 肖玉霞 撰稿

---

出版发行:中国人民大学出版社

(北京海淀路 157 号 邮编 100080)

发行部:62514146 门市部:62511369

总编室:62511242 出版部:62511239

E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经 销:新华书店

印 刷:中国人民大学印刷厂

---

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:22.75

2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷

字数:518 000

---

定价:27.00 元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

# 前 言

随着科学技术的迅速发展,计算机的广泛使用,标志着现代数学以技术化的方式迅速地渗透到人们的日常生活的各个领域;与经济相关的“盘算”的学问,如近似计算与估算、比与比例、利息与利率、统计与概率、运筹与优化以及系统分析与决策等的频繁使用,要求人们具备更多的能有效运用的数学知识以及数学思想和方法。我们编写这本书的目的就是为了把数学作为一种有用的工具介绍给读者。

本书力图对纯粹数学与应用的关系以及与应用数学方法的关系予以足够的重视;从技术科学与日常实际中搜集各种实例引入问题,以提出的问题为线索,展开讲述数学概念、定义、定理等知识内容;精选例题,以提高解题技能,介绍数学思想方法;数形结合,以加深对数学概念、定义、定理的直观理解,代替严格的数学证明;回到实际,以反映数学的应用,体现数学的工具性作用;数学建模,介绍基本数值计算方法;以适量的计算题与练习题为载体,融入一些实用的计算思想及其实现过程,如分割枚举、最优化等。在内容编排上尽可能相互独立,以便不同专业选择使用。

本书内容包括集合、函数、向量代数初步、解析几何基础、极限与连续、微积分及其应用、级数与逼近、微分方程,计算方法的内容穿插于各相应内容之中。

本书书末只附了答案,没有提示,这对于读者来说一定不很方便。要想得到完整的解题过程,好学的读者必须勤奋而深入地努力,任何人想不付出辛勤的汗水就学好这门课是不可能的。

虽然本书是为大专层次的高职学生编写的,但它也有益于其他大专相应学科的学生。

本书第一章、第二章由肖玉霞编写,第三章、第四章由李进生编写,第五章至第七章由肖作武编写。

本书力求做到叙述简明扼要,内容深入浅出,提供学习注意事项,并且对于例题和习题的选择、安排,注意了典型性和整体性。但是,限于编者的水平,本书的不妥之处在所难免,恳请读者不吝指正。

**编者**

1999年8月

# 目 录

<b>第一章 基础知识</b> .....	1
§ 1.1 集合 集合的运算 .....	1
1.1.1 集合 .....	1
1.1.2 集合的运算 .....	4
§ 1.2 数集 .....	5
1.2.1 数集 .....	5
1.2.2 数的误差 .....	7
§ 1.3 向量及其运算 .....	9
1.3.1 向量的概念 .....	9
1.3.2 向量的运算 .....	11
1.3.3 三维直角坐标系 .....	15
1.3.4 向量的坐标表示 .....	17
1.3.5 向量的坐标运算 .....	18
§ 1.4 空间曲线与曲面 .....	20
1.4.1 曲面及其方程 .....	20
1.4.2 曲面的等高线与等高线图 .....	22
1.4.3 常见曲面的一般方程与参数方程 .....	23
1.4.4 空间曲线及其方程 .....	31
小结 .....	35
习题 .....	38
<b>第二章 函数及其图像</b> .....	42
§ 2.1 映射与函数 .....	42
2.1.1 映射 .....	42
2.1.2 函数 .....	43
§ 2.2 一元函数的反函数 .....	54
2.2.1 反函数的概念 .....	54
2.2.2 互为反函数的图形特征 .....	54
2.2.3 反函数存在定理 .....	55
2.2.4 函数概念的推广 .....	56
§ 2.3 初等函数及图像 .....	56

2.3.1	常函数	56
2.3.2	幂函数	56
2.3.3	指数函数与对数函数	57
2.3.4	三角函数与反三角函数	59
§ 2.4	多元函数	64
2.4.1	例	64
2.4.2	平面点集和区域	65
2.4.3	多元函数概念	67
2.4.4	二元函数的定义域	68
2.4.5	二元函数的图像	69
2.4.6	多元初等函数	70
小结		70
习题		71
<b>第三章</b>	<b>极限与连续</b>	75
§ 3.1	极限的概念	75
3.1.1	数列的极限	75
3.1.2	函数的极限	78
§ 3.2	极限的运算法则	80
§ 3.3	判断极限存在的两个准则与两个重要极限	82
3.3.1	判断极限存在的两个准则	82
3.3.2	两个重要极限	84
§ 3.4	无穷小量与无穷大量	86
3.4.1	无穷小量与无穷大量的概念	86
3.4.2	无穷小的性质	88
3.4.3	无穷小的比较	88
§ 3.5	函数的连续性	89
3.5.1	函数的连续与间断	89
3.5.2	初等函数的连续性	93
3.5.3	闭区间上连续函数的性质及其应用	95
3.5.4	多元函数的极限和连续性	97
小结		99
习题		102
<b>第四章</b>	<b>微分学及应用</b>	105
§ 4.1	导数的概念	105
4.1.1	引例	105
4.1.2	导数的定义	107
4.1.3	导数的几何意义	108
4.1.4	可导与连续的关系	110

§ 4.2	求导法则与基本求导公式	111
4.2.1	导数的四则运算	111
4.2.2	反函数的求导法则	112
4.2.3	复合函数的求导法则	112
4.2.4	隐函数的求导法则	113
4.2.5	由参数方程所确定的函数的求导法则	114
4.2.6	对数求导法	115
4.2.7	基本求导公式	115
§ 4.3	高阶导数	116
4.3.1	高阶导数的定义	116
4.3.2	高阶导数的求法	117
§ 4.4	微分	118
4.4.1	微分与可微	118
4.4.2	微分的几何意义	120
4.4.3	微分的求法	121
4.4.4	一阶微分形式的不变性	122
4.4.5	微分在近似计算中的应用	123
§ 4.5	中值定理	124
4.5.1	罗尔定理	124
4.5.2	拉格朗日中值定理	125
4.5.3	柯西中值定理	126
§ 4.6	导数的应用	127
4.6.1	洛必塔法则	127
4.6.2	函数单调性的判别	130
4.6.3	函数的极值	131
4.6.4	曲线的凹凸性、拐点、渐近线和函数作图	136
4.6.5	弧微分与曲率	140
§ 4.7	偏导数及其应用	142
4.7.1	偏导数	142
4.7.2	全微分	145
4.7.3	多元复合函数和多元隐函数的求导法则	147
4.7.4	多元函数的极值	150
小结		154
习题		158
<b>第五章</b>	<b>积分学及应用</b>	<b>161</b>
§ 5.1	不定积分	161
5.1.1	不定积分的概念及基本积分公式	161
5.1.2	不定积分的性质	163

5.1.3	基本积分法	163
§ 5.2	定积分	170
5.2.1	累积问题举例	170
5.2.2	定积分的概念	173
5.2.3	定积分的几何意义	175
5.2.4	定积分的性质	177
5.2.5	微积分基本定理	179
5.2.6	定积分的换元法和分部积分法	183
§ 5.3	广义积分	185
5.3.1	无穷区间上的积分	186
5.3.2	无界函数的积分	188
§ 5.4	定积分的应用	189
5.4.1	平面图形的面积	189
5.4.2	旋转体的体积	192
5.4.3	定积分在物理学中的应用	194
§ 5.5	重积分	196
5.5.1	二重积分的概念	196
5.5.2	二重积分的性质	198
5.5.3	二重积分的计算	199
5.5.4	二重积分的应用	205
§ 5.6	积分的近似计算	207
5.6.1	矩形法	208
5.6.2	梯形法	209
5.6.3	抛物线法	209
5.6.4	广义积分的近似计算	211
5.6.5	二重积分的近似计算	211
§ 5.7	曲线积分	212
5.7.1	对弧长的曲线积分	213
5.7.2	对坐标的曲线积分	215
5.7.3	格林公式	219
5.7.4	平面上曲线积分与路径无关的条件	221
	小结	223
	习题	226
<b>第六章</b>	<b>级数与逼近</b>	234
§ 6.1	问题的引入	234
§ 6.2	常数项级数的概念和性质	235
6.2.1	常数项级数及其敛散性概念	235
6.2.2	收敛级数的基本性质	238



§ 6.3	常数项级数的敛散性判别法 .....	241
6.3.1	正项级数及其敛散性判别法 .....	242
6.3.2	交错级数及其敛散性判别法 .....	247
6.3.3	绝对收敛与条件收敛 .....	248
§ 6.4	函数项级数 .....	250
6.4.1	函数项级数的概念 .....	250
6.4.2	幂级数及其收敛半径和收敛域 .....	251
6.4.3	幂级数的运算 .....	254
§ 6.5	函数展开成幂级数 .....	256
6.5.1	泰勒级数 .....	256
6.5.2	函数展开成幂级数 .....	261
6.5.3	幂级数在近似计算中的应用 .....	265
§ 6.6	函数逼近 .....	267
6.6.1	多项式插值 .....	267
6.6.2	分段插值法 .....	271
§ 6.7	曲线拟合的最小二乘法 .....	273
6.7.1	直线拟合 .....	273
6.7.2	多项式拟合 .....	275
小结	.....	276
习题	.....	279
<b>第七章</b>	<b>微分方程</b> .....	<b>283</b>
§ 7.1	微分方程的基本概念 .....	283
7.1.1	例 .....	283
7.1.2	微分方程的基本概念 .....	286
§ 7.2	一阶微分方程 .....	287
7.2.1	变量分离方程 .....	288
7.2.2	可化为变量分离方程的类型 .....	289
7.2.3	一阶线性微分方程 .....	291
7.2.4	贝努利方程 .....	295
§ 7.3	二阶线性微分方程 .....	296
7.3.1	二阶线性微分方程的解的结构 .....	296
7.3.2	二阶常系数线性微分方程 .....	298
§ 7.4	可降阶的高阶微分方程 .....	308
7.4.1	$y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程 .....	308
7.4.2	$y''=f(x, y')$ 型的微分方程 .....	309
7.4.3	$y''=f(y, y')$ 型的微分方程 .....	310
§ 7.5	微分方程组 .....	311
§ 7.6	微分方程的近似解 .....	314



7.6.1	欧拉折线法	314
7.6.2	改进的欧拉折线法	315
7.6.3	龙格-库塔法	316
§ 7.7	微分方程在实际中的应用	317
7.7.1	浓度问题	317
7.7.2	压强问题	318
7.7.3	力学问题	320
7.7.4	质点振动问题	321
7.7.5	$R-L$ 电路问题	323
7.7.6	经济分析中的问题	324
7.7.7	其他问题	325
小结		327
习题		329
习题答案		335
参考文献		351

# 第一章 基础知识

## 本章提要

本章主要介绍学习本书所必须具备的数学基础知识:集合及其运算、数集、向量代数初步及空间解析几何基础.集合是数学上一个最基本的概念,数学的每一个分支都离不开它,但这里我们只作一些简单的介绍.向量又名矢量,它是由力学、物理学的需要而引入的数学概念,向量代数是关于数的代数运算的一种推广.空间解析几何的实质在于建立空间点与三元有序实数组之间的对应关系,曲线和曲面则对应于方程(组)的解集,使得可以用代数方法来解决几何问题.这一部分内容在本章中介绍得较多,原因在于它是解决微积分及其他数学分支问题的工具.

科学技术的绚丽多彩的伟大成就深刻地影响着人类的生活,使人们普遍认识到数学的重要性.21世纪是信息化社会,是计算机时代.未来社会经济和社会发展有赖于高新科学技术和高素质的人才.数学是科学技术的基础,这不仅仅因为数学在日常生活和生产中有广泛的应用,在高新科学技术中不可须臾离开;而且它为我们理解和适应信息化社会提供了一种强有力的工具.这就要求人们在工作中使用数学,而用好数学的关键在于学好数学,掌握数学的分析方法与应用.

以下从数学基础知识开始,逐步介绍函数、微分学、积分学、级数与逼近、常微分方程等基本理论及其应用.

## § 1.1 集合 集合的运算

### 1.1.1 集合

#### 一、集合的概念

集合是一个重要的数学概念.自从19世纪,德国数学家康托尔(Georg Cantor,

1845年~1918年)创立了关于集合的理论以来,集合理论发展很快.至今,集合已不仅仅是数学最重要的基础之一,而且是一种广泛应用的科学语言和基本的观点.

### (一) 集合的概念

集合不是讨论处于孤立状态下的事物个体,而是讨论具有某种共性的一类事物.例如下面的几个例子:

例1 某大学的全体学生.

例2 某电脑键盘上的所有按键.

例3 一年中有31天的月份.

例4 一位的正奇数.

例5 0与1之间的全体实数.

它们分别是由具有某种共同属性的学生、按键、月份、数等组成的.我们说,上面每组对象的全体构成一个集合,集合中的每个对象叫做元素.如例4中的集合是由1,3,5,7,9五个数组成的集合,其中的对象1,3,5,7,9都是集合中的元素.

通常,我们用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 来表示集合.用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 来表示集合中的元素.当 $a$ 是集合 $A$ 的元素时,就说“ $a$ 属于 $A$ ”,记为“ $a \in A$ ”;当 $a$ 不是集合 $A$ 的元素时,用符号“ $a \notin A$ ”表示,读作“ $a$ 不属于 $A$ ”.例如,如果用 $A$ 表示例5所描述的集合,

那么 $\frac{1}{2} \in A, \frac{\sqrt{2}}{2} \in A$ ,而 $2 \notin A$ .

### (二) 集合的表示法

表示一个具体集合通常有两种方法:列举法和描述法.

#### 1. 列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号 $\{\}$ 内表示集合的方法,叫做列举法,如例3所描述的集合可表示为{1月,3月,5月,7月,8月,10月,12月}.用列举法表示集合时,不必考虑元素之间的顺序.

#### 2. 描述法

把集合中的元素所具有的共同属性清楚地描述出来,写在大括号内表示集合的方法,叫做描述法.用 $A = \{a | a \text{ 具有的共同属性}\}$ 表示.如例4所描述的集合可表示为 $B = \{n | n \text{ 为一位的正奇数}\}$ .又如例5所描述的集合可表示为 $C = \{x | 0 \leq x < 1\}$ .

选用什么方法表示一个给定的集合,要看集合中的元素所具有的共同属性而定.有的集合适合用列举法表示;有的适合用描述法表示;有的只能用描述法表示,而不能用列举法表示,例如例5所描述的集合 $C$ ;有的两种表示方法都适合,如例3、例4.

#### 3. 空集

不含任何元素的集合,称之为空集,记为 $\emptyset$ .例如:

$\{x | x \text{ 为小于零的自然数}\} = \emptyset,$

$\{x | x = x - 10\} = \emptyset.$

最后,我们还要强调下面几点:

(1) 对于一个给定的集合,集合中的元素必须是确定的,也就是说对于集合所涉及的对象,要么是这个集合中的元素,要么不是这个集合中的元素,二者必居其一,且只居其一.例如“全体大个子”并不构成一个集合.因为一个人究竟算不算“大个子”并没有明确的界限,因此难以判断某人是否是这个集合的元素.再如“好看的花布”也不构成一个集合.因为没有明确的标准判断什么样的布为“好看的花布”.

(2) 对于一个给定的集合,集合中的元素必须是互异的,也就是说一个集合的任何元素都互不相同.

(3) 集合中的元素无先后次序.如由元素 3,4,7,8 组成的集合与由元素 4,7,8,3 组成的集合是相同的.

(4) 集合中的元素可以是任何对象.可以是人,也可以是物,还可以是数或数学表达式等等.

(5) 如同零在数的运算中起的作用一样,空集对下面要讲的集合运算来说是不可缺少的.注意空集  $\emptyset$  不能与含有单个元素“0”的集合  $\{0\}$  相混淆.

## 二、集合间的关系

### (一) 相等

考查集合  $A = \{1,2,3,4\}$ ,

$$B = \{n | n \text{ 为不大于 } 4 \text{ 的正整数}\}.$$

我们看到集合  $A$  与集合  $B$  是由相同的元素组成的,而一个集合由且只由其全部元素所确定.因此,两个集合  $A$  与  $B$  当且仅当它们有完全一致的元素时叫做  $A$  与  $B$  相等.

### (二) 子集 真子集

#### 1. 子集

我们知道,任何一个自然数都是一个整数,就是说由自然数构成的集合  $\mathbf{N}$  的任何一个元素都是由整数构成的集合  $\mathbf{Z}$  的一个元素.同样, $\mathbf{Z}$  的任何一个元素都是由有理数构成的集合  $\mathbf{Q}$  的一个元素.

一般地,对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果集合  $A$  的任何一个元素都是集合  $B$  的元素,那么集合  $A$  叫做集合  $B$  的子集,记为  $A \subseteq B$  (或  $B \supseteq A$ ),读作“ $A$  包含于  $B$ ”(或“ $B$  包含  $A$ ”).  
例如:  $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$ .

注:一般教科书上用“ $\subset$ ”表示,它可以表示子集,也可表示真子集.

对于任何一个集合  $A$ ,因为它的任何一个元素都属于集合  $A$  本身,所以根据定义有  $A \subseteq A$ .

我们规定空集是任何集合  $A$  的子集,也就是说,对于任何集合  $A$ ,都有  $\emptyset \subseteq A$ .

#### 2. 真子集

如果  $A$  是  $B$  的子集但不等于  $B$ ,即  $B$  中至少有一个元素不是  $A$  的元素,那么  $A$  叫做  $B$  的真子集.记为  $A \subset B$  (或  $B \supset A$ ).例如,对于上面提及的  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ ,有  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ ,

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ .

显然,空集是任何非空集合的真子集.

在引入了符号“ $\subseteq$ ”(或“ $\subset$ ”)以后,我们必须注意“ $\in$ ”(或“ $\bar{\in}$ ”)和“ $\subseteq$ ”(或“ $\subset$ ”)的区别.“ $\in$ ”(或“ $\bar{\in}$ ”)是连接集合与元素之间的关系符号,“ $\subseteq$ ”(或“ $\subset$ ”)是连接集合与集合之间的关系符号.

## 1.1.2 集合的运算

从给定的一些集合出发,我们可以通过所谓“集合的运算”作出一些新的集合,其中最常用的运算有“交”、“并”、“差”.

### 一、交

已知6的正约数构成的集合为 $A = \{1, 2, 3, 6\}$ ,10的正约数构成的集合为 $B = \{1, 2, 5, 10\}$ ,那么6与10的公约数构成的集合为 $C = \{1, 2\}$ .容易看出集合 $C$ 是由所有属于 $A$ 且属于 $B$ 的元素(即 $A, B$ 的公共元素)所构成的集合.

一般地,由所有属于集 $A$ 且属于集 $B$ 的元素所构成的集合,叫做 $A$ 与 $B$ 的交集,简称交,记作 $A \cap B$ ,读作“ $A$ 交 $B$ ”,它可以表示为: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ .

### 二、并

已知方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集为 $A = \{1, -1\}$ ,方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集为 $B = \{2, -2\}$ ,那么方程 $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$ 的解集为 $C = \{1, -1, 2, -2\}$ .容易看出,集合 $C$ 是由所有属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素所构成的集合.

一般地,由所有属于集 $A$ 或属于集 $B$ 的元素所构成的集合,叫做 $A$ 与 $B$ 的并集,简称并,记为 $A \cup B$ ,读作“ $A$ 并 $B$ ”,它可以表示为: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ .

### 三、差

考查下面方程的解集.已知方程 $(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0$ 的解集为 $A = \{2, -2, 3, -3\}$ ,方程 $x + 3 = 0$ 的解集为 $B = \{-3\}$ ,方程 $(x^2 - 4)(x - 3) = 0$ 的解集为 $C = \{2, -2, 3\}$ ,不难发现,集合 $C$ 是所有属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素所构成的集合.

一般地,由所有属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的元素所构成的集合,叫做集合 $A$ 与集合 $B$ 的差集,记为 $A - B$ ,读作“ $A$ 减 $B$ ”,它可以表示为 $A - B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$ .

为了直观形象地表示集合与元素、集合与集合之间的关系和集合的交、并、差等三种运算,常用图形表示,这种图形叫做文氏图.图1-1-1给出了属于(或不属于)相等、包含、交、并、差等关系的文氏图.

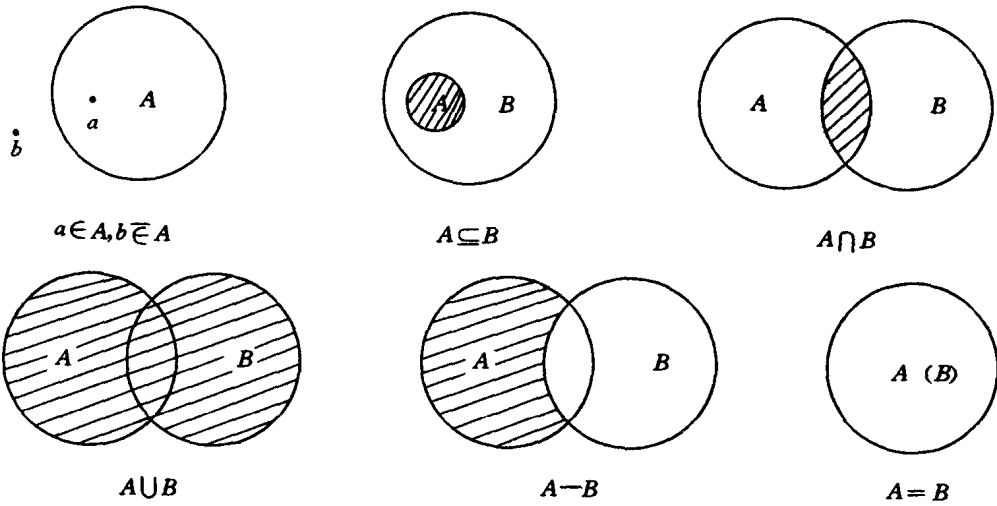


图 1-1-1

## § 1.2 数 集

### 1.2.1 数集

#### 一、常用的数集及符号

所谓数集是指由数构成的集合. 常见的数集有: 由所有自然数构成的数集叫做自然数集, 用  $N$  表示; 由所有整数构成的数集叫做整数集, 用  $Z$  表示; 由所有有理数构成的数集叫做有理数集, 用  $Q$  表示; 由所有实数构成的数集叫做实数集, 用  $R$  表示; 由所有复数构成的数集叫做复数集, 用  $C$  表示. 它们的关系是:  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ .

#### 二、实数与数轴

为了表示实数的几何意义, 我们画一条叫做数轴的直线. 数轴是一条规定了方向、原点和长度单位的直线, 如图 1-2-1 所示.

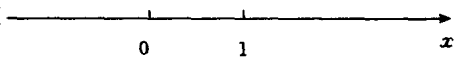


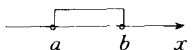
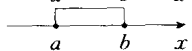





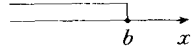
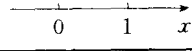
图 1-2-1

原点与实数零对应, 原点的右侧即数轴的正方向的所有点与正实数对应, 原点左侧即数轴的负方向上的点与负实数对应, 这样一来, 每个实数都可以在数轴上找出它的惟一对应点; 反之, 数轴上的每个点都对应着惟一的实数. 也就是说, 数轴上的点和实数之间有着——对应的关系. 正因为如此, 我们把实数集和

数轴上对应的点集看成是同一个东西而不加以区别地混合使用.

### 三、区间 邻域

在实际问题中,一个变量根据所研究问题的条件,一般有着一定的变化范围,如果超出了这个范围,就会使研究的问题失去意义.例如,1米以下的儿童乘公车不需购票,而1米以上的儿童乘公车必须购票.某儿童的身高在哪个范围内,就可判断他是否需购票.数学中常用区间表示这个变量的范围.所谓“区间”是指数轴上一“段”上的所有点构成的点集,也可以说是由介于某两个实数之间的全体实数构成的数集,这两个实数叫做区间的端点.区间的类型、名称、记号及描述见下表:

类型	名称	记号	描述	图形
有限区间	开区间	$(a, b)$	$\{x   a < x < b\}$	
	闭区间	$[a, b]$	$\{x   a \leq x \leq b\}$	
	左闭右开区间	$[a, b)$	$\{x   a \leq x < b\}$	
	左开右闭区间	$(a, b]$	$\{x   a < x \leq b\}$	
无限区间	左有限开区间	$(a, +\infty)$	$\{x   x > a\}$	
	右有限开区间	$(-\infty, b)$	$\{x   x < b\}$	
	左有限闭区间	$[a, +\infty)$	$\{x   x \geq a\}$	
	右有限闭区间	$(-\infty, b]$	$\{x   x \leq b\}$	
	实数轴	$(-\infty, +\infty)$	$\{x   x \in R\}$	

注意:“ $+\infty$ ”(读正无穷大)、“ $-\infty$ ”(读负无穷大)是引用的符号,不能作为数看待.最后引入某点的“邻域”概念:

所谓点  $x_0$  的  $\delta$  邻域,是指以  $x_0$  为中心的开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,亦即设  $x_0$  和  $\delta$  为两个实数,  $\delta > 0$ , 则满足不等式  $|x - x_0| < \delta$  的全体实数组成的集合就称为点  $x_0$  的  $\delta$  邻域.点  $x_0$  为该邻域的中心,  $\delta$  为该邻域的半径,在数轴上的表示见图 1-2-2.

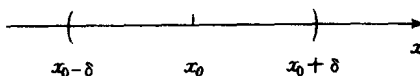


图 1-2-2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉.点  $x_0$  的  $\delta$  邻域去掉中心  $x_0$  后,称为点  $x_0$  的去心的  $\delta$  邻域.点  $x_0$  的去心的邻域是满足不等式  $0 < |x - x_0| < \delta$  的全体实数组成的集合.

例 1  $|x - 4| < \frac{1}{4}$ , 即是以后  $x_0 = 4$  为中心的  $\frac{1}{4}$  邻域,也就是开区间  $(3\frac{3}{4}, 4\frac{1}{4})$ , 对于  $x_0 = 4$  的去心的  $\frac{1}{4}$  邻域,则是两个开区间的并集:

$$(3\frac{3}{4}, 4) \cup (4, 4\frac{1}{4}).$$



## 1.2.2 数的误差

现代科学的发展使得庞大的计算在计算机上得以实现. 但是由于计算机中所储存的机器数的全体是一个有限的离散的数集, 其分布也是不均匀的, 并且, 在计算机数的运算中, 一般运算也并非总是成立的. 因此, 计算出的结果往往只是真正结果的近似值, 而不是结果的准确值, 有时甚至与准确数据相差甚远. 这个计算结果与其准确值之间的差距就是误差. 误差分析不能忽视, 否则, 计算机上一个好的算法, 也可能得出错误的结果.

### 例2 方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6}, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12}, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60}, \end{cases}$$

其解为  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ .

在计算机中, 是没有  $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$  等这些分数的, 只有将它们化成有限位的小数, 才能进行运算. 若把系数舍入成三位小数

$$\begin{cases} 1.00x_1 + 0.500x_2 + 0.333x_3 = 1.83, \\ 0.500x_1 + 0.333x_2 + 0.250x_3 = 1.08, \\ 0.333x_1 + 0.250x_2 + 0.200x_3 = 0.783, \end{cases}$$

再求解得,  $x_1 = 1.09, x_2 = 0.488, x_3 = 1.49$ .

我们看到, 尽管系数改变不大, 所求出的解却有很大出入.

### 一、误差的来源

数值分析往往给人以不严格, 不准确以至于不够完善的感觉. 其实, 数值计算中的近似是正常的, 误差是不可避免的.

#### (一) 模型误差

我们知道, 为了进行数值计算, 首先必须将实际问题归结为数学问题, 建立起合适的数学模型. 在建立数学模型时, 通常要加上许多限制, 忽略一些次要因素, 这样建立起的“理想化”的数学模型, 虽然具有“精确”而“完美”的外表, 其实只是客观现象的一种近似而粗糙的描述. 而这种数学上描述的近似必然会产生误差. 这样的误差称之为模型误差.

#### (二) 观测误差

“理想化”的数学模型中的原始数据, 往往是由观测而得到的, 由于观测手段的限制或实验仪器的精密程度不同, 得到的数据也必然带有一定程度的误差, 这种误差称之为观

测误差.

### (三) 截断误差

在以后的学习中,我们将看到许多数学运算(诸如微分、积分及无穷级数求和等)是通过极限过程来定义的,需要无限次运算才能得到精确的结果.然而在计算机上只能完成有限次的算术运算和逻辑运算,因此需要将解题方案加工成算术运算与逻辑运算的有限序列,这种加工常常表现为无穷过程的截断,由此产生的误差称作截断误差.

### (四) 舍入误差

计算过程中所用的数据可能位数很多,甚至是无穷小数,然而受机器字长的限制,用机器代码表示的数据必须舍入成一定的位数,这就会引起舍入误差.每一步的舍入误差是微不足道的,但经过计算过程的传播和积累,舍入误差可能会“淹没”所需的真解.

## 二、绝对误差和相对误差

误差虽然不可避免,但人们总是希望计算结果能足够准确,这就需要估计误差,人们通常用绝对误差和相对误差来衡量.

### (一) 绝对误差与绝对误差限

#### 1. 绝对误差

准确值  $x$  与近似值  $a$  的差  $x - a$  叫做近似值  $a$  的绝对误差,记作  $e(x)$ .

**例 3** 用刻有毫米的米尺测量桌子的长度,使用正确的测量方法测得桌子长度为 985 毫米,设  $x$  是桌子的真实长度,则实际长为  $x$  的一个近似值,绝对误差  $e(x) = x - 985$ . 由于测量误差不会超过半个毫米,即  $|e(x)| = |x - 985| \leq 0.5$ ,从而  $985 - 0.5 \leq x \leq 985 + 0.5$ ,因此准确值  $x$  在区间  $[984.5, 985.5]$  中,通常也可记为  $x = 985 \pm 0.5$ .

#### 2. 绝对误差限

实际中的准确值  $x$  往往无法得到,因此绝对误差  $x - a$  的具体数值也无法确定,但是人们可以根据测量工具或计算过程,设法估算出它的取值范围,即误差绝对值的最大限度:  $|x - a| \leq \epsilon$ .

这个最大限度  $\epsilon$  称作近似值  $a$  的绝对误差限. 例 3 中的绝对误差限为 0.5.

### (二) 相对误差与相对误差限

用近似值  $a$  的绝对误差及其误差限来衡量误差的大小是有局限的. 例如,测量 1 000 米左右的长度时发生 3.1 米的误差,和测量 1 米左右的长度时发生 3.1 厘米的误差,两者的含义是大有区别的. 可见要刻划近似值的精度,除了看绝对误差的大小外,还应当考察准确值本身的大小.

绝对误差  $x - a$  与准确值  $x$  的比  $\frac{x - a}{x}$  (常用百分数表示) 叫做近似值  $a$  的相对误差.