数学基础知识丛书

有理数与无理数

唐复苏

江苏人民出版社

有理数与无理数
唐复苏
*
江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
扬州印刷厂印刷
1979年2月第1版
1979年2月第1次印刷
印数：1—250,000册
书号：13100·021　定价：0.40

目　　录

一、有 理 数

恩格斯指出："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。"（《反杜林论》）我们熟悉的自然数、零和分数的概念，以及它们的大小比较、运算法则等等，都是在实践中产生和发展起来的，并在实践中有着广泛的应用。

同时，随着数的概念的扩充，数的运算本身存在的矛盾也逐渐得到解决。例如在自然数范围内，乘法的逆运算——除法并不总是能施行的，引进分数以后，就解决了这个矛盾。

那么，有了自然数、零和分数，是不是已经没有矛盾了呢？是不是完全能够适应实践的需要呢？我们将会看到，现实世界中还存在着许多量，只用这些数还不能够有区别地精确地表示出来；同时，就数的运算本身来说，也还存在着不少矛盾，就连加法的逆运算——减法也并不总能施行。因此，就需要继续引进新数，扩充数集。

下面，我们将在自然数、零和分数的基础上，引进负数，把数集扩充为有理数；进而引进无理数，把数集扩充到实数。在引进新数以后，也象过去一样，要研究它们的大小比较、运算法则和有关性质，使我们对数的认识逐步完善起来。

§1　有理数的概念

1.相反意义的量　先看两个例子：

例 1　两辆汽车从某地出发（图 1），一辆向东行驶 5 公里，到达 A 地；另一辆向西行驶 5 公里，

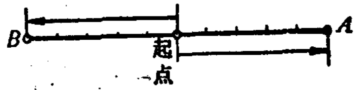


图　1

到达 B 地。通常用“位移”来描述这两辆汽车的行驶情况，它们的位移分别为“向东 5 公里”与“向西 5 公里”。尽管行驶的路程都是 5 公里，但是它们的方向相反，一个向东，一个向西。如果只用一个数 5 却不能把它们方向上的区别反映出来。

例 2　温度从5℃下降2℃，结果是3℃，可以用减法：5 － 2 ＝ 3 计算出来。如果从2℃下降5℃，结果是零下3℃，但是，如果也想用减法来计算，在原来的数中，2 减 5 是没有意义的。也就是说，零上 3℃ 可以用数 3 来表示，而零下 3 ℃就不能仍用一个数 3 来表示，暂时还没有一个数能够表示它。

这两个例子中所出现的量，如位移“向东5公里”与“向西 5 公里”，温度“零上3℃”与“零下3℃”，虽然有着不同的具体内容，但是有着一个共同的特点，它们都是具有相反意义的量。我们可以把量的一种意义规定为正的，而把和它相反的另一种意义规定为负的。如例 1，可以规定向东为正，向西为负；例 2 可以规定零上为正，零下为负。这样，无论是向东向西，零上零下，或者其它具体的量的两种相反意义，都可以抽象为“正”和“负”概括地反映出来。

正的量仍用原来的那些数（零除外）来表示，负的量就用原来的那些数（零除外）前面放上“－”（读作负）号的数来表示。例如可以把向东 5 公里记作 5 公里，向西 5 公里记作－5公里；零上3℃记作3℃，零下3℃记作－3℃。又如：

水位上升7厘米与下降8厘米，如果规定上升为正，那么它们可以分别记作7厘米与-8厘米；

前进$5\frac{1}{2}$公里与后退$3\frac{1}{2}$公里，如果规定前进为正，那么它们可以分别记作$5\frac{1}{2}$公里与$-3\frac{1}{2}$公里；

收入50.36元与支出10.05元，如果规定收入为正，那么它们可以分别记作50.36元与-10.05元。

对于某一量的两种相反意义，究竟规定哪一种意义为正的，并不是绝对的。正如恩格斯所指出的："正和负可以看作彼此相等的东西——不管把哪方面当作正，把哪方面当作负，都是一样的"（《自然辩证法》）。如例1中，我们也可以规定向西为正，这时向东5公里就应记作-5公里了，或者可以说，向东5公里就是向西-5公里。但是，当我们把一种意义规定为正以后，另一种与它相反的意义就必须规定为负，决不能同时规定为正（或负）。当然，在处理实际问题时，所作的规定应该合乎习惯，便于应用。如温度，固然也可以规定零下为正，但这是非常别扭的。

2.正数和负数 在上面，我们为了表示具有相反意义的量，引进了一种新数，即在原来的那些数（零除外）前面放上"$-$"号的数，例如-5、-3、-8、$-3\frac{1}{2}$、-10.05等等，叫做**负数**。原来的那些数（零除外），例如5、3、7、$5\frac{1}{2}$、50.36等等，叫做**正数**。正数前面有时也可以放上"$+$"（读作正）号，如5可以写成$+5$，$+5$与5是一样的。

表示正数与负数的记号"$+$"与"$-$"是数的性质符号。它们虽然形式上与加、减号相似，但在这里并没有运算的意思。当然，表示正数与负数，采用任意两个不同的符号

都是可以的。如我国古代就曾用红色的算筹表示正数，用黑色的算筹表示负数。然而我们将会看到（见§4），采用符号“+”与“-”来表示数的正负，不仅不会引起矛盾，而恰恰相反，它比之采用其它任何符号都要合理与方便。

例3 要加工一根直径为40毫米的轴，规定加工后轴的直径最大尺寸不能比40毫米大0.015毫米，最小尺寸不能比40毫米小0.01毫米，试用正负数表示所允许的偏差。

解 以40毫米作为标准，比40毫米大多少毫米和小多少毫米是相反意义的量，可用正负数表示如下：

大0.015毫米，记作+0.015毫米；

小0.01毫米，记作-0.01毫米。

在图纸上一般用 $\phi 40^{+0.015}_{-0.01}$ 来表示，这里右上角数字+0.015叫做上偏差，右下角数字-0.01叫做下偏差（单位都是毫米）。

3.数　零 数零（0）既不是正数，也不是负数。零处在正数与负数的对立之中，是一切正数和负数之间的界线，它有着极其深刻的含义，不能简单地理解为“没有”。

例如0℃不是表示没有温度，而是表示在标准大气压下纯水结成冰的一个确定的温度。

4.有理数 正数和负数不是孤立地存在的。没有正，就无所谓负；没有负，也无所谓正。有了负数，应该说过去学过的自然数与分数都是正数。自然数又叫正整数，原来的分数如$\frac{1}{3}$、$5\frac{1}{2}$、3.14等就叫做正分数。

这样，我们认识的数不仅包含原来的那些数——正整数、零和正分数，而且增添了新数——负整数和负分数。正整数、零、负整数统称**整数**，正分数与负分数统称**分数**。整

数与分数统称**有理数**。即有

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整 数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)。如}1,2,3,4,5\cdots\cdots\\ \text{零}(\ 0\ )\\ \text{负整数。如}-1,-2,-3,-4,-5\cdots\cdots\end{cases}\\ \\ \text{分 数}\begin{cases}\text{正分数。如}\frac{1}{3},\ 5\frac{1}{2},\ 3.14\text{等。}\\ \\ \text{负分数。如}-\frac{1}{3},-5\frac{1}{2},\ -3.14\text{等。}\end{cases}\end{cases}
$$

5.相反的数 正数和负数是现实世界具有相反意义的量在数学上的反映，它们是数学中的一对矛盾，是相反相成的。任一正数a，总有一个确定的负数$-a$与它对应，例如3有-3与它对应，$\frac{1}{4}$有$-\frac{1}{4}$与它对应.象这样互相对应的两个数a与$-a$，叫做互为**相反的数**。例如3与-3是互为相反的数，也就是说，-3是3的相反的数，3也是-3的相反的数。特别地，我们规定，**零的相反的数是零**。

任一正数a，$-a$是a的相反的数.我们看到，一个正数前面添上一个“$-$”号，就变成了它的相反的数。一般地，我们也可以用$-a$表示任一数a（不一定是正数）的相反的数。例如，$-(+3)$表示$+3$的相反的数，$-(-3)$表示-3的相反的数，显然

$$-(+3)=-3, \qquad -(-3)=+3.$$

在这里，“$-$”号看作表示相反的数的符号。在这种意义下，$-a$不一定是一个负数，如果a是正数，那么$-a$是与a相反的一个负数；如果a是负数，那么$-a$是与a相反的一个正数；如果a是零，$-a$就是零的相反的数——仍是零。

我们还约定，$+a$就表示数a。

6.绝对值 利用有理数，可以有区别地表示具有相反意义的量。如例1中位移“向东5公里”与“向西5公里”可以分别用有理数$+5$与-5来表示。但是有时要考虑这样的问题，例如要计算汽车行驶所消耗的汽油，起决定作用的是汽车行驶的距离（路面的阻力、风力等影响忽略不计），而不管行驶的方向。对于每个确定的位移，都对应着一个确定的距离。例如，位移是$+5$(公里)，距离是5（公里）；位移是-5(公里)，距离也是5（公里)；特别地，位移是“0”，即汽车仍然在起点，距离就是“0”。这样的感性认识，在数学上可以抽象出有理数的绝对值的概念：

正数的绝对值是这个数本身，负数的绝对值是这个数的相反的数，零的绝对值是零。

一个数a的绝对值，可以用符号$|a|$表示。即有

$$|a|=\begin{cases} a & \text{（如果}a\text{是正数）} \\ 0 & \text{（如果}a\text{是零）} \\ -a & \text{（如果}a\text{是负数）。} \end{cases}$$

例如，$|+5|=5$，$|-5|=5$，$|0|=0$。

显然，两个互为相反的数的绝对值相等。

我们看到，任一个有理数只有一个绝对值，但是绝对值为同一个正数的有理数就有两个，它们是互为相反的数。要确定一个有理数，不仅要确定它的绝对值，还要确定它的正负(符号).只有零是一种特殊情况，绝对值等于零的数就是零。

两个有理数相等，就是指它们符号相同，绝对值相等。例如$-\frac{2}{4}$与$-\frac{1}{2}$，它们都是负数，并且$\left|-\frac{2}{4}\right|=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，所以$-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$。

任一有理数（不管是正数、零或负数）的绝对值总是非负数（即正数或零）。正因如此，绝对值可以作为沟通旧数（非负数）与新数（有理数）之间的桥梁，在有理数的研究中将起着重要的作用。

习 题 一

1. 不用负数，说明下面一些话的意义：

(1) 温度上升 $-3°C$；　　(2) 运进 -1000 斤大米；

(3) 成本增加 -12%；　　(4) 向北走 -8.5 公里。

2. 下列各数中，哪些是正数？哪些是负数？哪些是整数？哪些是分数？

$-3.1416,\ 1,\ 0,\ -\left(-\frac{1}{1000}\right),\ \left|-2\frac{1}{2}\right|,\ -|-101|$。

3. 求满足下列条件的有理数：

(1) 绝对值等于 4；|-4|　　(2) 相反的数等于 4；-4

(3) 绝对值等于 0；0　　(4) 相反的数等于 0。0

4 如果用 a 表示任一有理数，下列说法对吗？为什么？

(1) $-a$ 一定是负数；　　(2) $|a|$ 一定是正数；

(3) $|a|$ 一定不是负数；　　(4) $-|a|$ 一定是负数。

§2 数 轴

1. 数 轴 在日常生活中，常常用一条直线上的刻度来表示量，例如用尺上的刻度表示物体的长度，用温度计上的刻度表示温度等等。一般地，有理数可以用直线上的点表示出来。

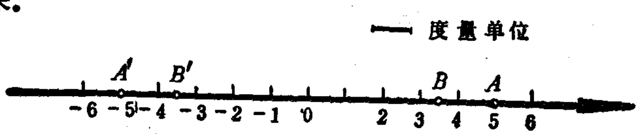


图 2

如图2，画一条直线，规定一个方向为正方向（通常把直线画成水平的，规定从左到右的方向为正方向），并用箭头来表示。在直线上取定一点O，叫做原点。再取一条定线段作为度量单位。象这样规定了方向、原点和度量单位的直线叫做**数轴**。原点、长度单位和方向是构成数轴的三个要素。

任何一个有理数都可以用数轴上一个确定的点表示出来：

任一正数，用原点右边的一个点来表示，例如5用原点右边5个单位的点A来表示，$3\frac{1}{2}$用原点右边$3\frac{1}{2}$个单位的点B来表示。

任一负数，用原点左边的一个点来表示，例如-5用原点左边5个单位的点A'来表示，$-3\frac{1}{2}$用原点左边$3\frac{1}{2}$个单位的点B'来表示。

数零用原点O来表示。

在数轴上，表示一个数的点，叫做这个数的**对应点**。如图2中的点A、B、A'、B'和O分别是数5、$3\frac{1}{2}$、-5、$-3\frac{1}{2}$和0的对应点，有时也可以记作点5、点$3\frac{1}{2}$、点-5、点$-3\frac{1}{2}$和点0。

利用数轴，可以揭示数与形之间的内在联系。有理数的一些概念，可以在数轴上直观地反映出来：

正数与负数的对立，就反映为它们的对应点在原点的右边与左边的区别；

数零的对应点是原点，而原点具有许多重要的特点，例

如原点是构成数轴的三个要素之一，是确定其它点的一个基准点，又是正数点与负数点的分界点，明显地反映了数零的辩证而深刻的含意；

两个互为相反的数，它们的对应点位于原点的两侧，并且与原点的距离相等。也就是说，它们是关于原点对称的；

一个数的绝对值，就是这个数的对应点与原点之间的距离。

每一有理数都有数轴上唯一确定的点与它对应，但是反过来并不成立，数轴上每一点并不是都有有理数与它对应的，在§10中我们将说明这个问题。

2.数轴上的有向线段 我们知道，温度计上水银柱上升3个单位或下降3个单位，可以表示温度升高3℃或降低3℃，或者说温度的变化是+3℃或−3℃。

一般地，可以用数轴上点的移动来表示有理数。例如在图3中，一个点从A移到B，它向右移动了3个单位，可以表示+3；一个点从A移到C，它向左移动了3个单位，可以表示−3。在这里，一点从A移到B，在数轴上就确定了一条线段，并且这条线段的两个端点A与B是有区别的，A是起

图 3

点，B是终点。象这样有确定起点和终点的线段，叫做**有向线段**。从起点到终点的方向，叫做**这个有向线段的方向**。起点为A、终点为B的有向线段，记作$\overrightarrow{AB}$（表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面）。

数轴上有向线段的方向，我们规定与数轴的方向相同为

正，相反为负。这样，有理数可以用数轴上的有向线段来表示，如图 3 中，有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方向是正的，长度是 3 个单位，它就表示 $+3$；有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 的方向是负的，长度是3个单位，它就表示 -3。数轴上有向线段所表示的数，叫做**有向线段的值**，它的符号（正负）取决于有向线段的方向，它的绝对值就是有向线段的长度。

有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值是a，可以记作

$$\overrightarrow{AB}=a\ .$$

例 1 写出下列各有向线段的值（图 4）：

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CA}$。

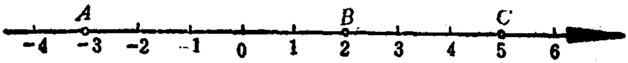


图 4

解 $\overrightarrow{AB}=+5$， $\overrightarrow{BC}=+3$， $\overrightarrow{AC}=+8$，

$\overrightarrow{BA}=-5$， $\overrightarrow{CB}=-3$， $\overrightarrow{CA}=-8$。

有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是不同的，它们长度相同，方向相反，这样的两个有向线段叫做互为**相反的有向线段**，它们的值是互为相反的数。如例 1 中：

$$\overrightarrow{AB}=+5,\quad \overrightarrow{BA}=-5.$$

一般地，有

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$$

有一种特殊的有向线段，它的终点和起点重合，这时线段的长度为 0，这样的有向线段叫做**零线段**，它的值等于 0。

决定有向线段的要素是方向和长度，至于它的起点在什

么位置并不是本质的。例如考察温度的变化，不管原来的温度是多少度，只要温度计上水银柱上升了3个单位，都认为是升高3℃。如果两个有向线段的方向相同，长度相等，那么沿着数轴把其中一个有向线段的起点移到另一个的起点上，它们的终点一定重合，也就是说，经过移动以后，这两个有向线段可以完全重合。就这种意义上来说，这两个有向线段实质上是相同的。因此，我们认为数轴上的有向线段是可以自由移动的。如图5中，有向线段 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{OM}$ 可以看成是相同的有向线段，显然它们的值相等，即

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OM}=+4$$

图 5

正因如此，我们可以把数轴上任一有向线段移动，使它的起点与原点重合。这样做，有时可使问题简化。如数轴上任一点A与一个数a的对应关系*，可以通过有向线段来建立（图6）：

点A←→有向线段 $\overrightarrow{OA}$ ←→数a（有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的值）

上面的"←→"表示对应。

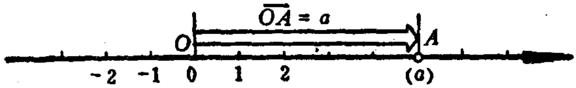


图 6

---

* 这里我们只研究有理数，所说的点是指有理点（有理数的对应点），所说的有向线段的值是有理数。以后，数的概念扩充到了实数，这里的结论对于数轴上任一点或任一有向线段仍然是成立的。

由此可见，在数轴上用点来表示有理数与用有向线段表示有理数，这两者之间是有着密切联系的。

习　题　二

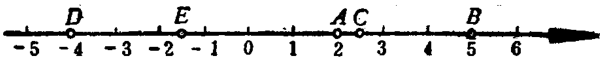
1. 画一数轴，并在数轴上表示下列各数：

   $3, -2, 0, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$.

2. 如图，数轴上A、B、C、D、E各点表示什么数？

3. 如图，写出下列各有向线段的值：

   $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE}$.



（第2、3题）

§3　有理数的大小比较

1.有理数大小比较的法则　任意两个非负有理数（正数或零），可以比较它们的大小。两个数的大小关系，用符号“>”（大于）或“<”（小于）来表示。例如 $3>2$，$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}>0$ 等。$3>2$ 也就是 $2<3$。

现在数的概念已经扩充到有理数，也需要建立比较它们大小的方法。

从数轴（图2）可以看出，两个正数，对应点在右边的那个数比较大。把这个规则推广，自然地，我们也应该认为：两个有理数，在数轴上的对应点在右边的那个数比较大。

由此启发，我们规定有理数大小比较的法则如下：

(1) **正数和正数，正数和零的大小比较，仍按过去所建**

立的法则进行；

（2）正数和零大于一切负数；

（3）负数小于零，也小于一切正数；

（4）两个负数，绝对值大的数较小，绝对值小的数较大。

法则(1)说明，所建立的有理数大小比较的法则（简称（“新法则”）是过去非负有理数大小比较法则（简称“旧法则”）的推广，而“旧法则”则是“新法则”的一种特例。在法则(4)中，比较两个负数的大小，是通过它们绝对值的大小比较来规定的，这就把问题转化为两个正数的大小比较来解决，所以这个“新法则”是以“旧法则”为基础而建立起来的。

在比较两个有理数的大小时，尤其要注意两个负数的大小比较，这时结果与它们绝对值的大小关系恰好相反。

例1 比较下列各数的大小：

（1）$-\frac{2}{3}$与$-\frac{3}{4}$；（2）$-\frac{3}{4}$与$\frac{4}{5}$；

（3）$-\frac{5}{8}$与-0.618；（4）0与-0.001.

解 （1）$\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$，$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$.

$\because \quad \frac{8}{12}<\frac{9}{12}$，

$\therefore \quad \left|-\frac{2}{3}\right|<\left|-\frac{3}{4}\right|$，

$\therefore \quad -\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$.

这里两个数的绝对值是两个异分母的分数，为了比较它们的大小，一般先把它们化成同分母的分数。

(2) $-\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$.

这里的两个数是一负一正，可由法则(3)立即得出结论，而不必考虑它们绝对值的大小。

(3) $\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}=0.625$，$|-0.618|=0.618$.

$\because\quad 0.625>0.618$,

$\therefore\quad -\frac{5}{8}<-0.618$.

这里两个数的绝对值一个是分数，一个是小数（十进分数），为了比较它们的大小，一般可以把分数化成小数。

(4) $0>-0.001$.（有理数大小比较法则(2)）

从有理数的大小比较法则可知：

一个数a是正数，就意味着$a>0$；

一个数a是负数，就意味着$a<0$。

必须指出，两个有理数，可能是一个比另一个大（或小），但也可能相等。在§1中我们已经规定了两个有理数相等的意义，很明显，在数轴上两个相等的数的对应点是同一个点，或者说它们是重合的。

2.有理数的顺序律 有理数的相等和不等（大小）关系，反映了数轴上点的顺序关系。分析数轴上点的顺序关系，可以进一步发现有理数具有如下顺序律：

(1) 三岐性

数轴上任何两点A、B，或者A在B的左边，或者A与B重合，或者A在B的右边。这个事实反映在数间，就有：

对于任意两个有理数a、b，在

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

三种关系中，有一种并且只有一种成立。