高等数学

上册

余国钧 主编

华中工学院出版社

高 等 数 学

（上 册）

余国钧　　主编

贺志贤　杨林锡　罗媛芳　刘国钧　　编

华中工学院出版社

高 等 数 学（上册）

余 国 钧 主编

贺志贤 杨林锡 罗媛芳 刘国钧 编

责任编辑 李 立 鹏

华中工学院出版社出版发行

（武 昌 喻 家 山）

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：12.5 字数：284,000

1987年8月第1版. 1987年8月第1次印刷

印数：1—5 000

ISBN 7-5609-0099-2/O.14

统一书号：13255—079 定价：2.08元

前　言

本书是编者在历年采用高等数学教材经验的基础上，根据现行高中数学课程开设的状况，及工科专业的教学需要而编写的。全书分上、中、下三册，可作为高等工业学校“高等数学”课程的教材或教学参考书，也可供部分理科专业的读者参考。计划授课时数为 210 学时（含习题课）。

为了使学生通过“高等数学”这门课程的学习，为后续课程奠定较好的数学基础，并顾及到他们毕业以后能有相当的后劲，本书在部分内容的要求方面略高于同类教材，主要是在一定程度上和一定范围内，加强了理论性和严密性；在选择例题和习题方面，也适当增加了深广度和综合性。对一些常见的基本定理都尽量给予证明（虽然，由于学时的限制，有些专业不可能在课堂上一一讲解，但可供学生课外自学）。我们认为，如果只叙述不证明的定理过多，这将影响学生对所学内容的深刻理解和灵活运用；也不利于他们通过这门课程的学习，提高自己进行科学抽象的能力。为了便于取舍，有些内容如闭区间上连续函数的性质，定积分两种定义的等价性，及含参量的积分等定理的证明都采用小字排印。

鉴于矢量代数、矢量分析广泛应用于其它学科，本书除将矢量代数与空间解析几何等章紧密联系外，另列“矢性函数”一章，第十三章则以矢量作为工具，将曲线积分、曲面积分与场论结合讨论。

每章除配有基本的和较综合的例题和习题外，还选编了一些高等院校招考研究生的试题，一般均附有答案。对于较难的题目都标有“*”，书末附有部分习题解法提示，供读者参考。

限于我们的水平，缺点错误一定不少，诚恳希望读者给予批评指正。

本书在编写过程中得到华中工学院数学系领导的热情支持，并承广大教师提供宝贵意见，特此谨致谢意。

编者

1987年2月

目 录

第一章 函 数

客观事物都是相互影响，相互联系而且是发展变化着的，同时这种联系和发展都有一定的规律性，认识和掌握事物的这种规律，从而用来造福于人类，这是科学研究的任务。要认识这种规律不仅要作定性的分析，而且要作定量的研究。函数关系便是当我们从量的侧面来研究这种规律时所得到变量间的一种重要的依从关系。数学分析（微积分学）则是以函数作为自已的主要研究对象。

本章主要是复习中学已经学过的有关函数的知识。

§1.1 函数的概念

1.1.1 常量与变量

在观察各种自然现象或生产过程时，常常会遇到各种不同的量，这些量一般可分为两种：常量与变量，在考察过程中会起变化的量称为**变量**，保持不变的量称为**常量**。

在数学中，不管是常量还是变量，常常只注意它们的数值而不顾其具体意义。

如果不特别指明，本书所讨论的量都是实数，即实常量，实变量。

变量的每一个值都是一个数，这些数的全体构成的数集称为这个变量的**变域**。

通常所考虑的变量都是连续变化的，为方便起见，引入如下区间符号：

开区间(a,b)表示数集$\{x|a<x<b\}$；

闭区间$[a,b]$表示数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开区间$(a,b]$表示数集$\{x|a<x\leqslant b\}$。

开区间$(-\infty,+\infty)$表示全体实数，$(a,+\infty)$表示大于a的一切实数，$(-\infty,a)$表示小于a的一切实数，等等（这里“∞”只是一个记号并非数量，它前面的“+”或“-”表示方向）。

有时，采用绝对值不等式来表示变量的变化区间更为方便。例如

$|x-a|<1$即$-1<x-a<1$亦即区间$(a-1,a+1)$，又称它是以a为中心、1为半径的邻域，不等式$|x-a|\geqslant 1$表示$x\leqslant a-1$及$x\geqslant a+1$这两部分，即上述邻域以外的部分。

例1 用区间表示满足不等式$|x^2-2|\leqslant 1$的x的变化范围。

解 由 $|x^2-2|\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant x^2-2\leqslant 1$ 即$1\leqslant x^2\leqslant 3$ 或 $1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{3}$，也就是$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$及$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$。所以$x$的变化范围为闭区间$[-\sqrt{3},-1]$及$[1,\sqrt{3}]$。

1.1.2 函数的概念

数学分析不是孤立地研究每一个变量，而是着重研究变量之间确定的依从关系，即所谓函数关系。

函数的定义 设有两个变量x和y，它们的变域分别是实数集X和Y，如果对于X中的每个数x，按照确定的规律f有Y中唯一的数y与它对应，我们就称f是X上的一个函数，函数f在x的数值y记作$y=f(x)$。

上述定义可简单地表示为

$$f:X\to Y,\qquad x\longmapsto y=f(x).$$

它表明通过函数f的作用，把整个X变到Y里，将X中每一个数x变为Y内唯一的数y。

我们称x是自变量，y是因变量。自变量x的变域X称为函数f的定义域。当x遍取X中的一切数时，相应的函数值$f(x)$的集合称为函数f的值域。值域不一定就是数集Y，它可能是Y的一个真子集。

通常为了方便，我们将函数 $f:\ \begin{array}{l} X \to Y; \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ 简记为$y=f(x)$。今后常用这种省略写法。

例 1　圆的面积S与它的直径d之间的函数关系是

$$S=f(d)=\frac{1}{4}\pi d^2.$$

因为圆的直径不能为负，故它的定义域是$[0,+\infty)$，函数的值域是$[0,+\infty)$，对应规律f是：将自变量d自乘后再乘以$\frac{\pi}{4}$。

由此，有

$$f(1)=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4},\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

这种用数学式子表示函数关系的方法称为分析法，它严谨地描述了变化过程中变量间的依从关系，是微积分学中表示函数关系的最主要的方法。

为了便于直接查出相应于给定直径的圆的面积，常将一些对应值用表格列出。

例如（准确到小数点后第二位）

d	…	1	2	3	4	5	6	7	…
S	…	0.79	3.14	7.07	12.57	19.63	28.27	38.48	…

这种表示函数关系的方法称为列表法。大家熟知的对数表、三角函数表等，都是用这种方法表示函数关系的。工程技术上很多经验公式也就是这样将大量实验数据列成表格，然后归纳出来的。

此外，若将自变量与因变量的每一对数值作为平面直角坐标系内的点的横坐标与纵坐标，函数关系便可用图象表示出来。本例中 S 与 d 的函数关系可用图 1-1 中的抛物线弧表示。这种表示函数关系的方法称为图象法。它能非常直观地反映函数的变化情况，有助于研究函数的性质，也是一种常用的函数关系表示法。图象法在科学技术领域中的应用也是极为广泛的，如气温、气压的自动记录仪等就是利用曲线来表示气温、气压等与时间的函数关系的，所描出的曲线，就是该函数的图象。

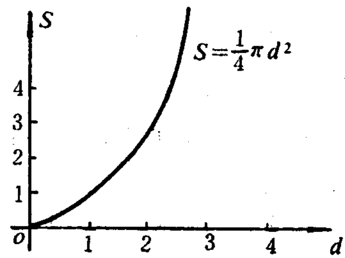

图 1-1

需要特别注意的是用分析法表示函数时，两变量间的对应规律不一定只用一个分析式子给出，可能对于自变量的某一部分数值，对应规律用某一分析式表示，而对于自变量的另一部分数值，对应规律用另一分析式，这样的函数称为分段函数。

例2 $y=f(x)$

$$=\begin{cases}2x, & \text{当} -2\leqslant x\leqslant 0 \text{ 时；}\\ \sqrt{x}, & \text{当} 0<x\leqslant 4 \text{ 时。}\end{cases}$$

是定义在 $[-2,4]$ 上的函数。它的图象如图 1-2 所示，函数的值域是 $[-4,2]$。

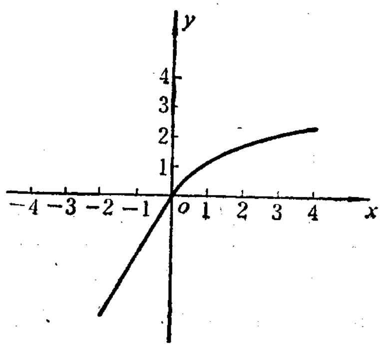

图 1-2

例3 符号函数sgnx*，其定义如下：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0\text{ 时；}\\0, & 当x=0\text{ 时；}\\-1, & 当x<0\text{ 时，}\end{cases}$$

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $\{-1, 0, 1\}$，函数图象如图1-3所示。

（在图象中我们用实心小圆点表示该点属于函数图象，用空心小圆点表示该点不属于函数图象。）

显然，$|x|=x\operatorname{sgn}x$。

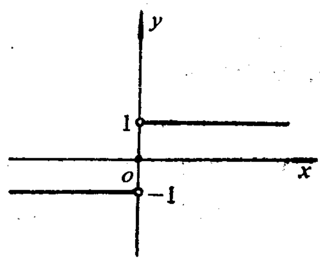

图 1-3

例4 函数 $y=[x]$，

（这里符号$[x]$表示“不超过x的最大整数”。例如 $[2.1]=2$，$[5]=5$，$[\pi]=3$，$[-3.51]=-4$等等），

$$即\quad y=[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\\-2 & (-2\leqslant x<-1)；\\-1 & (-1\leqslant x<0)；\\0 & (0\leqslant x<1)；\\1 & (1\leqslant x<2)；\\2 & (2\leqslant x<3)；\\\cdots & \cdots\end{cases}$$

此函数的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是一切整数，其图象如图1-4所示。

---

* sgn是拉丁文signum的缩写，原意为符号。

例 5 旅客乘坐火车时，随身携带的物品不超过 20 公斤时免费，超过 20 公斤部分每公斤收费 0.20元，超过50公斤部分再加收50%。写出收费与物品重量的函数关系。

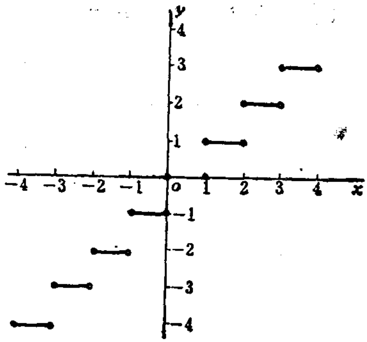
图 1-4

解 设物品重量为 x 公斤，收费为 y 元，则

$$y=\begin{cases}0 \quad (0\leqslant x\leqslant 20); \\ 0.2(x-20)\,(20<x\leqslant 50); \\ 0.3(x-50)+0.2(50-20)\,(x>50).\end{cases}$$

§1.2 函数的简单性态

1. 单调性 对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2 若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加（或单调减少）。

若对于区间 I 内任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内严格单调增加（或严格单调减少）。

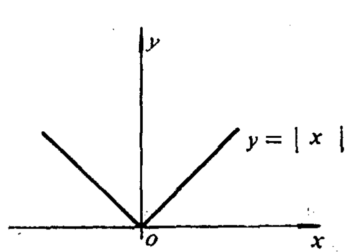

图 1-5

单调增加的函数的图形是沿横轴正向上升的，单调减少的函数的图形是沿横轴正向下降的。