新世纪高级应用型人才培养系列教材
A Practical Textbook Series for the New Century

高等数学 经管类

(上册)

主编 孟广武 副主编 谭成波 董立华

同济大学出版社
Tongji University Press

高等数学

（上册）

新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

高等数学 经管类

（上册）

主　编　孟广武

副主编　谭成波　董立华

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．经管类．上册/孟广武主编．—上海：同济大学出版社，2005.7

（新世纪高级应用型人才培养系列教材）

ISBN 7-5608-2812-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．孟…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 135675 号

高等数学(经管类)(上册)

主编　孟广武　　副主编　谭成波　董立华

责任编辑　卞玉清　责任校对　郁　峰　封面设计　潘向蓁

出　版 发　行	同济大学出版社
	（上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）
经　销	全国各地新华书店
印　刷	同济大学印刷厂印刷
开　本	787mm×960mm　1/16
印　张	15.25
字　数	305 000
印　数	1—9100
版　次	2005 年 7 月第 1 版　　2005 年 7 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5608-2812-4/O·258
定　价	20.00 元

前　　言

为了适应普通本科院校经贸、财会、管理、金融、教育等专业的教学要求，我们编写了这套《高等数学》教材。

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学，下册包括空间解析几何、多元函数微积分学、级数和常微分方程及差分方程。各节配有习题，每章配有总习题，书末附有习题答案。为了满足考研学生的需要，每章还配置了考研试题选讲。

为了增强实用性，本书强化了高等数学在经济学方面的应用等内容。考虑到经管类的学生报考研究生时一般只考高等数学三或高等数学四的实际情况，高等数学中的有些内容仅仅提一下，而不去追求数学上的严格证明；有些内容则是干脆不提，例如傅立叶级数、三重积分、曲线积分和曲面积分等。但同时也增加了一些内容，例如差分方程等。此外，在例题配置及习题选取等方面也尽量符合专业特点。相信这会为教学带来便利。

参加本书编写、讨论、修改和定稿工作的有孟广武、王佩民、张晓岚、李苏北、曹伟平、谭成波和董立华等同志，最后由聊城大学孟广武教授主编。

限于编著水平，加之编写时间比较仓促，书中难免有不妥之处，希望读者批评指正。

编　者

2005 年 4 月 9 月

目　录

第一章　函数与极限

高等数学的研究对象是所谓的变量，函数则反映了变量间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法，连续函数是高等数学所讨论的主要函数类型．本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质．

第一节　函　数

一、变量与区间

在自然界或在社会生产实践活动中，常会遇到各种各样的量，如面积、温度、价格、速度等．在某个过程中，数值不变的量称为常量，数值变化的量称为变量．例如，我们观察一辆运行中的客运汽车，乘客的人数、全部行李的重量、汽车的长度等量均为常量，而汽车离始发站的距离、车速、汽油的储存量等量则均为变量．

变量在某一特定的过程中总是在一定的范围内取值，这个取值范围可以用区间来表示．

本课程中涉及到的数基本上都是实数，所以，今后如不特别说明，提到的数均为实数，数集则均为实数集．我们用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数之集．

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$. 称数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

为闭区间，记作$[a,b]$. 称数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

为开区间，记作(a,b). 类似地可定义下面的两个半开区间：

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间，a 和 b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度．

此外，还有所谓的无限区间．引进记号$+\infty$（读作正无穷大）与$-\infty$（读作负无穷大）. 无限区间的定义与记号如下：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

有一种称为邻域的数集是今后常要用到的，现给出其定义．

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，称开区间

$$(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$．其中点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此，$U(a,\delta)$ 表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体(图 1-1)．

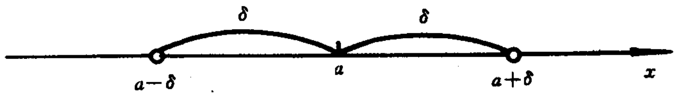

图　1-1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉．称集合

$$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$．

当不需要指明邻域半径时，一般用 $U(a)$($\mathring{U}(a)$)表示 a 的邻域(去心邻域)．

二、函数的概念

定义 1　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，且两个变量 x 和 y 分别在 D 和 $\mathbf{R}$ 中取值．如果对每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D,$$

数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．

当 x 取定数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域．

由函数的定义可知，构成函数的基本要素有两个，一个是对应法则，一个是

定义域．值域是派生的．若两个函数的对应法则和定义域都相同，则这两个函数是相同的，而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示．例如，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与 $f(x)=x+2$ 是不同的，因为它们的定义域不同；而函数 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(t)=1$ 是相同的，因为它们的定义域和对应法则完全相同．

在函数的定义中，我们用“惟一确定”来表明所讨论的函数都是单值函数．当 D 中的某些 x 值有多于一个 y 值与之对应时，我们称之为多值函数．本书只讨论单值函数．

现在给出几个函数的例子．

例 1　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

它的定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=[0,+\infty)$，其图形如图 1-2 所示．

例 2　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

它的定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-3 所示．

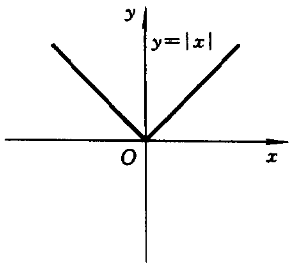

图　1-2

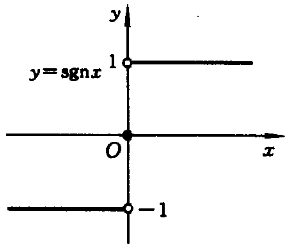

图　1-3

例 3　取整函数

$$y=[x].$$

这里的记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如，$[3.1]=3$，$[-3.1]=-4$，$[3]=3$，等等．这个函数的定义域 $D=\mathbf{R}$，值域 $W=\mathbf{Z}$（全体整数之集），其图形如图 1-4 所示．

上述三个例子中的函数有一个共同的特点：自变量在不同的范围内取值，函数的表达式也不相同．通常称这种函数为分段函数．下面再给出一个生活中常见的分段函数．

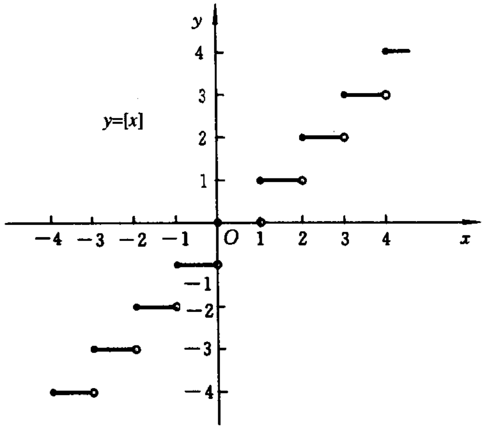

图 1-4

例 4 某城市的出租车计价方法为:3 公里以内收 5 元;超过 3 公里后,超过部分每公里为 1.20 元. 求车费与里程之间的函数关系.

解 车费和里程分别用 F 和 s 表示. 则由题意可列出如下的函数关系式

$$F=\begin{cases}5, & 0<s\leqslant 3,\\ 5+1.20(s-3), & s>3.\end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,对于数集 $G\subset D$,若存在数 M_1,使得对任意的 $x\in G$,恒有 $f(x)\geqslant M_1$,则称函数 $f(x)$ 在 G 上有下界,而称 M_1 为函数在 G 上的一个下界. 如果存在数 M_2,使得对任意的 $x\in G$,恒有 $f(x)\leqslant M_2$,则称函数 $f(x)$ 在 G 上有上界,而称 M_2 为函数在 G 上的一个上界. 如果存在正数 M,使得对任意的 $x\in G$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 G 上有界. 如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 G 上无界. 这就是说,如果对任何正数 M,总存在 $x_0\in G$,使得 $f(x_0)>M$,那么,函数 $f(x)$ 在 G 上无界.

容易证明,函数 $f(x)$ 在 G 上有界的充分必要条件是它在 G 上既有上界又有下界.

例如,$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为 $|\cos x|\leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立. 函数 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有下界而无上界. 但如果给定数集 $G=[-1,1]$,则 $y=x^2$ 在 G 上有界. $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的,但在 $[1,+\infty)$ 上是有界的. 有界函数的界 M 不是惟一的. 对 $y=\cos x$ 而言,不仅 1

是它的界，而且任何大于 1 的数都可取作定义中的 M.

有界函数的图形总是位于平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间．

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．若对 I 中的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（单调减少）的．单调增加与单调减少的函数统称为单调函数，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间．

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数．

函数的奇偶性与周期性在中学已学过，这里不再赘述．

四、反函数

给定函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中任一值 $y=y_0$，必定在 D 中有惟一的 x_0，使 $f(x_0)=y_0$，则称在 W 上确定了 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in W.$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 而言，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因而常把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式．

不难验证，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

函数 $y=x^3$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数存在，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$，或改写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

对于给定的函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W$，不一定存在反函数．例如

$$y=x^2,\ x\in(-\infty,+\infty),\ y\in[0,+\infty)$$

就不存在反函数．因为对每一个 $y_0\in(0,+\infty)$，总有两个数值 x_0 和 $-x_0$ 与之对应，均满足 $y_0=x_0^2=(-x_0)^2$. 但是，当把 $y=x^2$ 看成分别定义在 $(-\infty,0]$ 和 $[0,+\infty)$ 上的两个函数时，它们的反函数均存在，分别为 $y=-x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{\frac{1}{2}}$.

可以证明，函数 $y=f(x)$，$x\in D$，$y\in W$，在 D 上存在反函数的充分必要条件是 $f(x)$ 在 D 上是一一对应的．

因为单调函数是一一对应的，所以，单调函数一定存在反函数．例如，正弦

函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是一一对应的，所以不存在反函数．但当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=\sin x$ 是单调增加函数，故有反函数，即反正弦函数

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

五、复合函数

对有些函数而言，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$，我们可以把它看作是将 $u=1-x^2$ 代入到 $y=\sqrt{u}$ 之中得到的．像这样在一定条件下，将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算，而得到的函数则称为复合函数．

一般地，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，值域为 W，而函数 $u=g(x)$ 的定义域为 G，值域为 K，且 $K\subset D$．那么，对任一 $x\in G$，通过函数 $u=g(x)$ 有惟一确定的 $u\in K$ 与之对应，由于 $K\subset D$，因此，对这个 u 值，通过函数 $y=f(u)$ 有惟一确定的 $y\in W$ 与之对应（见图 1-5）．这样，对任一 $x\in G$，通过 u 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数，称这个函数为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，记作

$$y=f[g(x)],\quad x\in G.$$

而 u 称为中间变量．

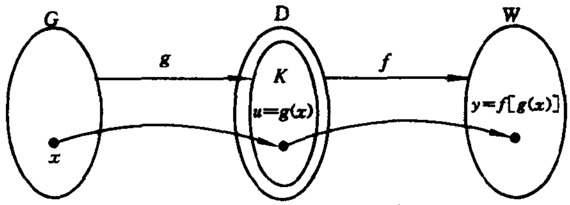

图 1-5

必须注意，不是任何两个函数都是可以复合成一个复合函数的．例如，$y=\lg u$ 和 $u=-x^2$ 就不能复合成一个复合函数．因为 $y=\lg u$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$，而 $u=-x^2$ 的值域 $K=(-\infty,0]$，无论 x 取何值，对应的 u 值都不在 D 内．

复合函数的概念可以推广到任意有限多个函数复合的情况．例如，函数 $y=2^{\sqrt{x-1}}$ 可以看作是由

$$y=2^u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=x-1\quad(x\geqslant 1)$$

三个函数复合而成，其中，u,v 为中间变量，x 为自变量，y 为因变量．复合函数

$y=2^{\sqrt{x-1}}$的定义域为$[1,+\infty)$.

例 5 已知 $f(a^x+1)=a^{2x}+a^x+1$,求 $f(x)$.

解 令 $u=a^x+1$,将 $a^x=u-1$ 代入原式,得

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1,$$

即

$$f(x)=x^2-x+1.$$

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}4, & |x|\leqslant 4,\\ 0, & |x|>4,\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)]=\begin{cases}4, & |f(x)|\leqslant 4,\\ 0, & |f(x)|>4,\end{cases}$$

因为

$$|f(x)|\leqslant 4,\ x\in(-\infty,+\infty),$$

所以

$$f[f(x)]=4,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

六、初等函数

我们经常讨论的一些函数都是由几种最简单的函数构成的,这些最简单的函数就是在中学已学过的基本初等函数:

常数函数:$y=c$(c 为常数).

幂函数:$y=x^a$(a 为常数).

指数函数:$y=a^x$(a 为常数且 $a>0,a\neq 1$).

在科技应用中,常会用到以常数 e(这是个无理数,e≈2.718 28…,其意义将在本章第六节中说明)为底的指数函数 $y=e^x$.

对数函数:$y=\log_a x$(a 为常数,$a>0,a\neq 1$).

以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 称为自然对数函数,简记为 $y=\ln x$.

三角函数:

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x.$$

反三角函数:

$$y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\arctan x,\ y=\operatorname{arccot} x.$$

基本初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算和有限次函数的复合运算所得到的并可以用一个解析表达式表示的函数,称为初等函数. 例如

$$y=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m},\ y=\sin^2(x-1),\ y=\lg(x+\sqrt{1+x^2}),$$

等等，都是初等函数．

现在介绍一类特殊的初等函数——双曲函数，它们在工程与物理中是很有用的．

双曲正弦：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

双曲余弦：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

双曲正切：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

它们的图形分别见图 1-6 与图 1-7. 它们的一些基本性质也可以从图形中反映出来．比如，双曲正弦在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，双曲余弦在$[0,+\infty)$内是单调增加的，双曲正切在其定义域$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的．如此，我们便可以来求它们的反函数．以 $y=\mathrm{sh}x$ 为例．

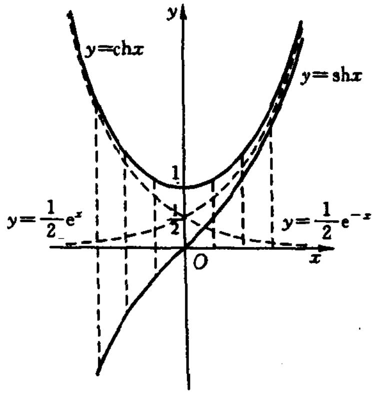

图 1-6

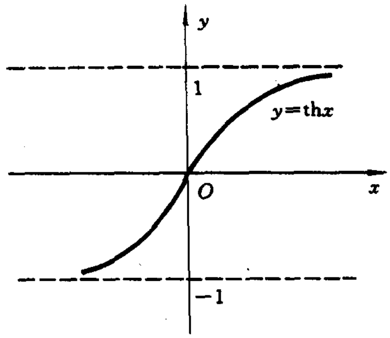

图 1-7

记 $y=\mathrm{sh}x$ 的反函数为 $y=\mathrm{arcsh}x$.

在 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的两边同乘以 e^x，得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

这是一个关于 e^x 的二次方程，它的根为

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

由于 $e^x>0$，故上式根号前应取正号，于是